

DINÁMICA DE LAS ITERACIONES DE LA FUNCIÓN DE ARNOLD

JR GUZMÁN, H CARRILLO CALVET

Laboratorio de Dinámica No Lineal

Facultad de Ciencias, UNAM

y

F ONGAY LARIOS*

Escuela de Ciencias

Universidad Autónoma del Estado de México

Resumen. Se revisan algunas propiedades generales de los sistemas dinámicos determinados por funciones de la circunferencia, y se ejemplifican con la familia biparamétrica de funciones $V_{a,b} : S^1 \rightarrow S^1$, definida por $V_{a,b}(x) = x + a + b \sin(2\pi x) \pmod{1}$, las posibles dinámicas que estos pueden tener.

Palabras clave: Sistema dinámico, resonancia, biestabilidad, caos

1. Introducción

Las funciones de la circunferencia determinan sistemas dinámicos útiles para modelar diversos procesos naturales donde se manifiesta una actividad cíclica. Sobre el trabajo pionero de Poincaré y Denjoy se han acumulado múltiples investigaciones de matemáticos y científicos contemporáneos que han estudiado la dinámica de la iteración de estas funciones desde un punto de vista puro o aplicado. El estudio de estos sistemas dinámicos se ha hecho usando una bella combinación de métodos matemáticos (analíticos y geométricos) con simulaciones computacionales, para dar resultados teóricos de importancia para la ciencia. Entre otros campos, esta teoría ha sido relevante en la Mecánica Clásica (Teoría de Kolmogorof-Arnold-Moser) [5] y en la Biología (modelos de neuronas y del corazón) [12, 19].

A pesar de la simplicidad que tienen los modelos que se construyen con funciones de la circunferencia, el espectro de dinámicas que estos son capaces de desplegar es muy rico. Se conocen importantes propiedades generales de la dinámica generada por estas funciones, que son válidas cuando estas son homeomorfismos. En cambio, en el caso en que estas funciones no son inyectivas, la complejidad dinámica aumenta (pueden aparecer dinámicas caóticas) y todavía no ha sido suficientemente explorada. Un ejemplo interesante es el de la familia de funciones $V_{a,b}(x) = x + a + b \sin(2\pi x)$. Estas funciones fueron introducidas por Arnold en conexión con problemas de Mecánica [2] y de Biología [3] y posteriormente han sido estudiadas por muchos otros investi-

* Este trabajo fue realizado durante su estancia sabática en la Facultad de Ciencias de la UNAM

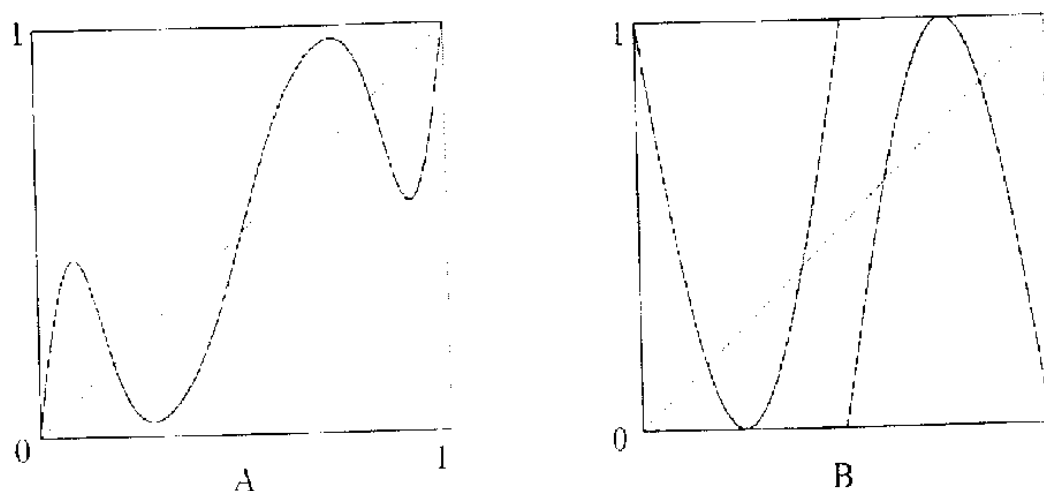


Fig. 1. Gráficas en el toro. A. $f(x) = x + 0.35 \sin 2\pi(x + 0.35 \sin 2\pi x)$. B. $f(x) = \sin 2\pi x$.

gadores [8, 10, 15]. En algunas regiones del espacio de parámetros, los elementos de esta familia dejan de ser homeomorfismos y constituyen uno de los pocos ejemplos de funciones no inyectivas cuyas iteraciones han sido estudiadas, teórica y computacionalmente.

2. Funciones de la circunferencia

Llamamos S^1 a la circunferencia de radio 1 con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y a las funciones $f: S^1 \rightarrow S^1$ las llamamos *funciones de la circunferencia*. La gráfica de estas funciones es un subconjunto del *toro de dimensión dos*, $T^2 = S^1 \times S^1$. El toro T^2 se puede visualizar como la superficie de una dona, que es el espacio que resulta de identificar, preservando la orientación, los lados opuestos del cuadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$. Lo importante de esta representación, para nosotros, es que permite dibujar las gráficas de las funciones de la circunferencia en el cuadrado C en lugar de hacerlo en la superficie del toro (Figura 1).

Cada función, f , de la circunferencia, determina un *sistema dinámico discreto* mediante la aplicación repetida (iteración) de f a condiciones iniciales. Para cada $x \in S^1$, al conjunto $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ se le llama la *órbita de x* y estas se pueden representar gráficamente como se muestra en la figuras 4, 6 y 7.

Estos sistemas dinámicos pueden tener órbitas periódicas, es decir, órbitas constituidas por puntos x que satisfacen $f^k(x) = x$ para alguna $k > 0$. Una órbita así es llamada *periódica*. Si k es el menor entero para el cual se tiene la propiedad ante-

rior, se dice entonces que la órbita es de *período* k o k -*periódica*. Cada una de estas órbitas está constituida por k *puntos periódicos*. Los puntos periódicos de período $k = 1$ son llamados *puntos fijos* del sistema dinámico.

Una órbita es estable si cualquier otra órbita que comienza suficientemente cerca de ella permanece cerca. Diremos aquí que una órbita es *atractora* si además de ser estable tiene una vecindad, X , tal que, si $x_0 \in X$, entonces la sucesión $x_n = f^n(x_0)$ converge a X cuando $n \rightarrow \infty$. La *cuenca de atracción* de una órbita atractora es el mayor conjunto X con la propiedad anterior. Una función f de la circunferencia puede tener varios atractores, fenómeno conocido como *multiestabilidad*.

El conjunto de puntos de acumulación del conjunto $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es conocido como el *conjunto ω -límite* del punto x ; este conjunto se denota por $\omega(x)$. Análogamente, si existe f^{-1} , se define el α -*límite* como el conjunto de puntos de acumulación de $\{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Como espacio topológico, S^1 es equivalente a la circunferencia unitaria del plano complejo: $S^1 = \{e^{2\pi i x} \mid x \in [0, 1]\}$. Las funciones de la circunferencia pueden expresarse, mediante la regla $f(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i \tilde{f}(x)}$, en términos de funciones $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que conmutan con la función proyección: $\tilde{f} \pi = \pi \tilde{f}$, estando la función proyección, $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, definida por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ (esto significa, formalmente, que S^1 es el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Una función $\tilde{f}$, como ésta, es llamada un *levantamiento* de la función f .

Cuando la función f es un homeomorfismo que preserva la orientación del círculo, el *número de rotación* de f definido por

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^n(x_0)}{n} \pmod{1} \quad (1)$$

existe y no depende del levantamiento, $\tilde{f}$, de f que se haya escogido, ni de la condición inicial x_0 .

Los siguientes resultados sobre homeomorfismos que preservan la orientación de la circunferencia se deben, principalmente, a Poincaré y Denjoy, y han sido ampliados posteriormente por otros investigadores [6, 7, 15, 18]:

(1) Si la función f tiene una órbita k -periódica, entonces cualquier otra órbita periódica es también de período k . Además, cuando existe una órbita k -periódica, el ω y α -límite de cualquier órbita es también una órbita k -periódica [13].

(2) Si $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, la dinámica de f es periódica, i.e.: $\rho(f) = p/q$ si y sólo si, existe x tal que $\tilde{f}^q(x) = x + p$ ($\tilde{f}$ un levantamiento continuo de f), es decir, f tiene alguna órbita periódica de período q que envuelva p veces a la circunferencia.

(3) Si f es de clase C^2 y $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, la dinámica de f es *topológicamente conjugada* a la rotación $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$, significando que existe un homeomorfismo $h: S^1 \rightarrow S^1$ tal que $hR_\alpha = fh$. Si el número de rotación es irracional el conjunto $\omega(x)$ es el mismo para todos los puntos x , existiendo para él dos posibilidades: $\omega(x)$ puede ser S^1 (forzosamente si $f \in C^2$) o un *conjunto de Cantor*, i.e.: un conjunto que es igual al conjunto de sus puntos de acumulación (perfecto) y que tiene interior vacío. Puede demostrarse también (véase [13]) que dado cualquier conjunto

de Cantor, existe una función de la circunferencia que lo tiene como ω -límite.

(4) El número de rotación $\rho(f)$ varía de manera continua en el espacio de homeomorfismos de la circunferencia [2].

Para más detalles sobre los anteriores conceptos ver las referencias [1, 8, 13].

3. Iteraciones de la función de Arnold

Consideraremos ahora la dinámica del sistema dinámico discreto determinado por la función de Arnold [4]:

$$V_{a,b}(x) = V(x) = x + a + b \operatorname{sen}(2\pi x) \pmod{1},$$

se consideran a y b como dos parámetros positivos.

El sistema dinámico determinado por esta función resulta de modelar, por ejemplo, un oscilador del tipo llamado de diente de sierra al cual se le aplica un forzamiento de amplitud b . Estos osciladores han sido propuestos como un modelo para la actividad cardíaca con forzamiento en el cual el parámetro a es interpretado como la frecuencia natural del nodo atrioventricular, el cual recibe impulsos de otro nodo llamado sinus [3, 9, 12].

Discutiremos ahora las distintas posibilidades que tiene la dinámica de la función de Arnold al variar los valores de los parámetros a, b .

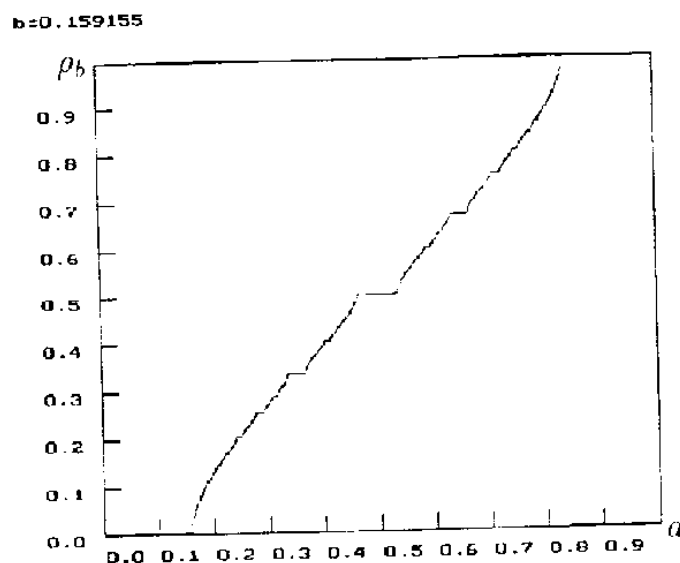
Si $0 \leq b < \frac{1}{2\pi}$, como la derivada de V no se anula, no es difícil ver que esta función resulta ser un difeomorfismo de clase C^∞ y solamente es un homeomorfismo para $b = \frac{1}{2\pi}$. Para $b > \frac{1}{2\pi}$ la función deja de ser inyectiva. En la región donde la función de Arnold es un difeomorfismo, el número de rotación $\rho(V_{a,b})$ varía de manera continua con respecto a los parámetros a y b ; esto se sigue del resultado (4) de la Sección 1 y el hecho de que la familia de funciones de Arnold es continua en los parámetros a y b , uniformemente respecto a x en S^1 .

Cuando $b = 0$, se tienen las rotaciones $R_a(x) = x + a$ resultando que $\rho(V) = a$. En el caso en que $a = p/q \in \mathbb{Q}$ todas las órbitas son periódicas de período q . Si $a \notin \mathbb{Q}$ toda órbita de V es densa en la circunferencia [1] (en este caso se dice que las órbitas son *cuasi-periódicas*).

Si $0 < b < \frac{1}{2\pi}$ y $\rho(V) = p/q$, entonces existen órbitas periódicas de período q , y de éstas pueden existir a lo más dos [6]. Si $\rho(V) \notin \mathbb{Q}$, entonces f es topológicamente conjugada a una rotación (teorema de Denjoy) por lo que las órbitas son también densas en S^1 .

Para cada $0 \leq b < \frac{1}{2\pi}$, fijo, se tiene que la función $\rho_b(a) = \rho(V_{a,b})$ es una función continua. Para $b > 0$, esta función tiene la interesante propiedad de que, para cada número racional $r \in [0, 1]$, existe un intervalo cerrado, I_r , con interior no vacío y tal que $\rho_b(a) = r$, para toda $a \in I_r$. En cambio, los valores irracionales de r entre cero y uno, son alcanzados en un único punto, a . La gráfica de la función $\rho_b(a)$ es una curva continua que se conoce como *escalera del diablo* [8] (Fig. 2).

Los conjuntos de valores del espacio de parámetros (a, b) donde el sistema dinámico tiene número de rotación racional p/q , se conocen como *lenguas de Arnold*.

Fig. 2. Escalera del diablo: $\rho_b(a)$ con $b = 1.59$.

En la Figura 3 se han calculado lenguas para varios valores de p y q .

En la franja $0 \leq b < \frac{1}{2\pi}$, estas lenguas de Arnold son subconjuntos ajenos que se van estrechando conforme b se acerca a 0, hasta hacer contacto con el racional p/q sobre la recta $b = 0$. Cada recta $b = \text{constante}$, interseca el conjunto de lenguas de Arnold en un subconjunto que es denso en esta recta y cuya medida tiende a cero, cuando b tiende a cero [1, 2, 15].

De acuerdo a la teoría general de los sistemas dinámicos en la circunferencia, cada sistema que se encuentre en una lengua correspondiente a un número de rotación p/q tiene al menos una órbita periódica de período q que envuelve a la circunferencia p -veces. Por ejemplo, en la Figura 4 se ha escogido (a, b) en la lengua de rotación $1/4$ y se puede observar cómo $V_{a,b}$ tiene una órbita atractora de período 4. Se puede probar (véase [2, 8]) que, en el interior de las lenguas de Arnold hay, exactamente, dos órbitas periódicas, una estable y la otra inestable, y que estas convergen, una hacia la otra, cuando los parámetros se acercan a la frontera de la lengua. Sobre la frontera, estas órbitas periódicas constituyen una sola órbita semiestable y se aniquilan al dejar la lengua. Cada órbita periódica estable es el ω -límite de todos los puntos de S^1 excepto los puntos de la órbita inestable; constituye entonces un atractor con cuenca de atracción igual a S^1 menos la órbita inestable.

Para $b > \frac{1}{2\pi}$ la función de Arnold no es un homeomorfismo y pueden aparecer dinámicas más complicadas. El número de rotación puede definirse aún por la expresión (1), si existe el límite, pero depende de condiciones iniciales (i.e., de x_0). Se han hecho algunas generalizaciones de las lenguas de Arnold, [10], para esta región

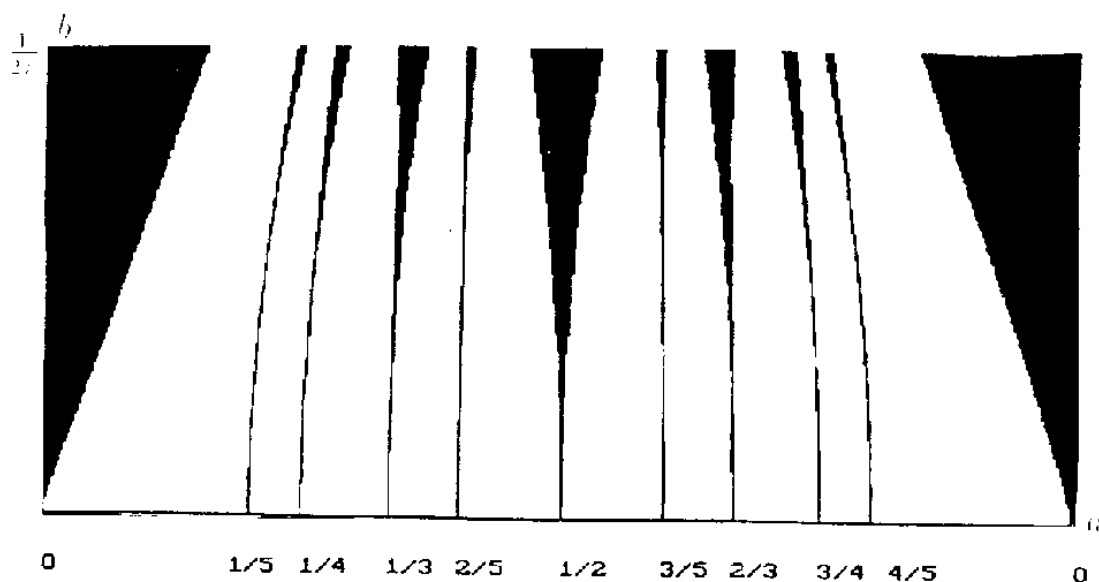


Fig. 3. Lenguas de Arnold.

del plano (a, b) . En estas regiones existen órbitas con número de rotación p/q y el sistema tiene una órbita localmente estable de período q . En [14] se demuestra que, siendo f cualquier difeomorfismo que preserve orientación, vale el siguiente resultado:

Proposición: *El número de rotación de f es p/q si y sólo si existen $x \in S^1$ y m, n enteros positivos tal que*

$$\begin{aligned} \tilde{f}^m(x) - [\tilde{f}^m(x)] &= \tilde{f}^n(x) - [\tilde{f}^n(x)] \\ [\tilde{f}^m(x)] - [\tilde{f}^n(x)] &= p \\ m - n &= q \end{aligned} \quad (2)$$

con $\tilde{f}$ un levantamiento de f .

Si f no es un homeomorfismo, se tiene de todas maneras que esta condición garantiza la existencia de una órbita periódica de período q que le da p vueltas a la circunferencia. Entonces puede usarse para generalizar el concepto de lengua de Arnold: el sistema determinado por las iteraciones de la función $V_{a,b}$ (no necesariamente homeomorfismo) está en la lengua de Arnold p/q , siempre que la condición (2) se cumpla. Esta definición es útil computacionalmente y en la Figura 5 se

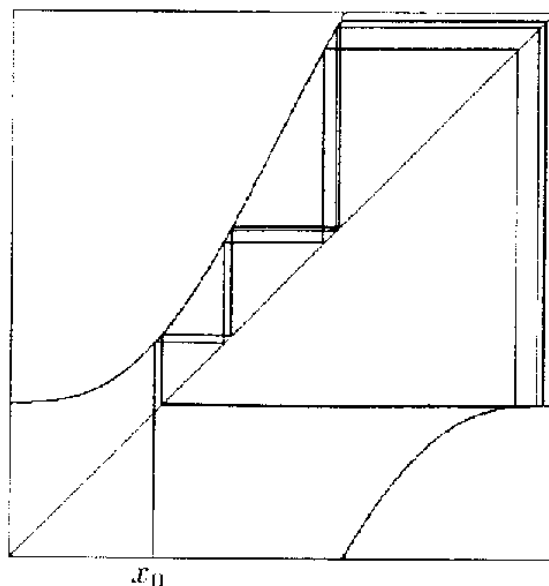


Fig. 4. Gráfica de $V(x) = x + a + b\text{sen}(2\pi x) \pmod{1}$ y de una órbita del sistema dinámico asociado para: $a = 0.28125$ y $b = 0.15625$; $x_0 = 0.267$. Obsérvese la convergencia a una órbita de período cuatro.

han calculado las lenguas de Arnold generalizadas usando un algoritmo basado en esta equivalencia. Las lenguas generalizadas han sido también calculadas por otros autores usando otras definiciones y algoritmos [17].

Dos lenguas de Arnold generalizadas, cualesquiera, se intersectan dando lugar a el fenómeno de biestabilidad [17]. Por ejemplo, si en la función de Arnold damos los valores $a = 0.5$ y $b = 0.52$, el punto (a, b) corresponde a un punto de la intersección de dos zonas distintas con número de rotación 0. La gráfica de f correspondiente a estos valores de a y b , así como dos condiciones que al iterarse convergen a dos puntos fijos estables, se muestra en la Figura 6.

En la misma figura se ve cómo se distribuyen las cuencas de atracción de estos dos puntos fijos, los puntos de la figura que están marcados en negro representan las condiciones iniciales que convergen al punto fijo estable de la derecha y los marcados en blanco las condiciones que convergen al punto fijo estable de la izquierda. La frontera de estas cuencas de atracción constituye un conjunto de Cantor [16].

Otro ejemplo de biestabilidad, que hemos observado en las simulaciones numéricas, se obtiene haciendo $a = 0.655$, $b = 0.3675$. Aquí una órbita periódica de período 1 (punto fijo) y una órbita de período 2 coexisten, este sistema corresponde a la intersección de dos lenguas con números de rotación 0 y $1/2$, respectivamente. Las cuencas de atracción que resultan en este caso tienen una estructura similar a las del ejemplo anterior (Figura 7).

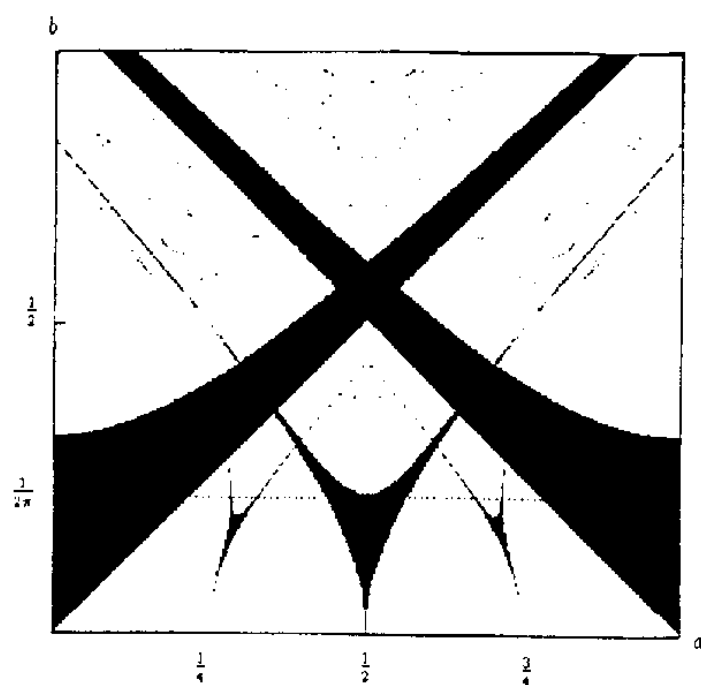
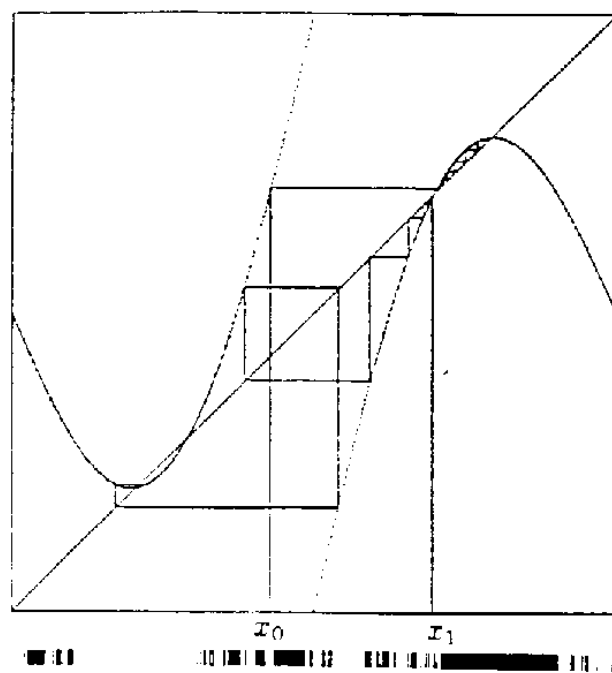


Fig. 5. Lenguas de Arnold generalizadas.

Fig. 6. $f(x) = x + a + b \sin(2\pi x) \pmod{1}$, con $a = 0.5$ y $b = 0.52$. Condiciones iniciales $x_0 = 0.43$ y $x_1 = 0.7$.

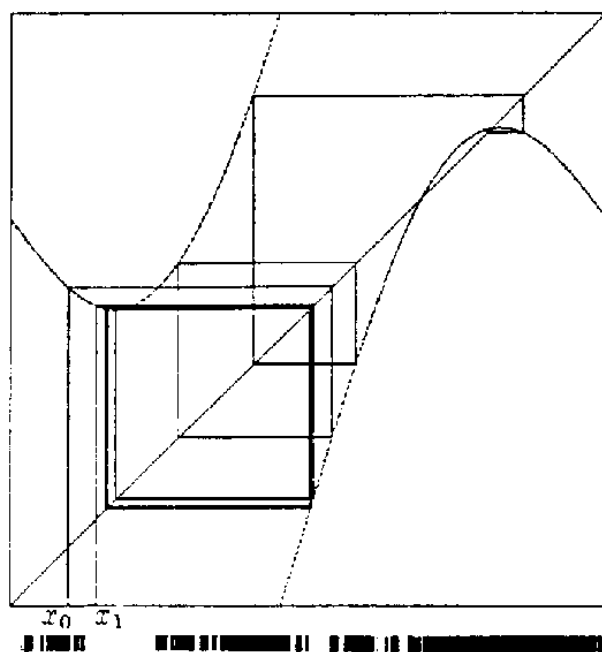


Fig. 7. $f(x) = x + a + b \operatorname{sen}(2\pi x) \pmod{1}$ con $a = 0.655$ y $b = 0.3675$. Condiciones iniciales $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.15$

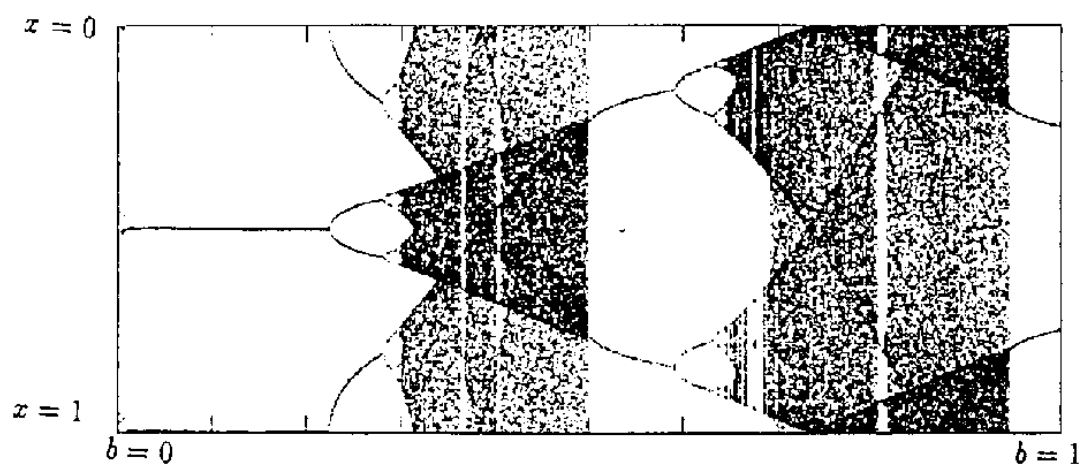


Fig. 8. Diagrama de bifurcación de la función $f(x) = x + 0.5 + b \operatorname{sen}(2\pi x) \pmod{1}$

Por último, para ilustrar las bifurcaciones y la complejidad de las dinámicas que pueden ocurrir en la región de parámetros donde la función $V_{a,b}$ no es inyectiva, realizamos el siguiente experimento computacional: escogemos un valor, fijo, para el parámetro a y dejamos que el parámetro b recorra el intervalo $[0, 1]$ al mismo tiempo que se deja evolucionar el sistema a partir de una condición inicial elegida aleatoriamente. Así se obtiene el diagrama de bifurcaciones (Figura 8). En él se pueden observar bifurcaciones de doblamiento de período, que se van multiplicando a medida que b aumenta hasta alcanzar un valor crítico donde las bifurcaciones se acumulan (cascada de bifurcaciones). A partir de este valor crítico se observa la presencia de dinámicas caóticas [17], que se van alternando con dinámicas periódicas.

Referencias

1. Arrowsmith DK, Place CM (1990) *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, UK
2. Arnold VI (1965) *Small denominators I. Mappings of the circumference onto itself*, Ann Math Soc I Ser 2 46: 213-284
3. Arnold VI (1991) *Cardiac arrhythmias and circle maps*, Chaos 1 (1): 20-24
4. Arnold VI (1983) *Geometric Theory of Differential Equations*, Springer Verlag, Germany
5. Arnold VI (1979) *Mathematical Methods of the Classical Mechanics*, Springer Verlag, New York
6. Arnold VI, Anosov DV (1988) *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol 1, Dynamical Systems I*, Springer Verlag, Germany
7. Denjoy A (1932) *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journ de Math XI: 333-375
8. Devaney RL (1986) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, USA
9. Glass L (1991) *Cardiac arrhythmias and circle maps. A classical problem*, Chaos 1 (1): 13-19
10. Glass L, Belair J, *Continuation of Arnold tongues in mathematical models of periodically forced biological oscillations*, Non Linear Oscillations in Biology and Chemistry, Lecture Notes in Biomathematics, Springer Verlag, New York, 66: 232-243
11. Glass L, Guevara MR, Shrier A, Pérez R (1983) *Bifurcations and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator*, Physica 7D: 89-101
12. Glass L, Mackey MC (1988) *From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life*, Princeton University Press, USA
13. Guzmán A (1988) *Dinámica generada por homeomorfismos del círculo*, Tesis profesional, UNAM
14. Guzmán JR (1994) *Sistemas Dinámicos en la Circunferencia: Aplicaciones a Teoría de Números y Modelación de Neuronas*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM
15. Herman MR (1977) *Measure de Lebesgue et nombre de rotation*, Geometry and Topology, Lecture Notes in Mathematics, 597: 271-293, Springer Verlag, New York
16. Martínez-Mekler GC, Mondragón R, Pérez R (1986) *Basin-Structure invariance of circle maps with bistable dynamics*, Physical Review A3, 33: 2143-2145
17. Pérez R, Glass L (1982) *Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator*, Physics Letters 90 A 9: 441-443
18. Poincaré H, *Sur les courbes définies par des Equations Différentielles*, Chp XV, Etude Particulière du Tore
19. Winfree AS (1980) *The Geometry of Biological Time*, Springer Verlag, New York