
UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOFTWARE PARA EL ANÁLISIS VISUAL-
INTERACTIVO DE SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS
EN LA CIRCUNFERENCIA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA

OSCAR RAFAEL GARCIA REGIS

TOLUCA, MEX.

1999

Introducción

El presente trabajo trata de los osciladores geométricos de integración y disparos, de sus modelos matemáticos y del uso de la computadora para hacer análisis numérico y simulaciones de ellos.

El trabajo está constituido por 2 partes fundamentales:

La primera parte lo integran los capítulos siguientes

- En el primer capítulo, se discuten de manera amena, conceptos básicos de sistemas dinámicos, necesarios en los capítulos posteriores.
- En el segundo capítulo, se muestran algunos conceptos y resultados de los sistemas dinámicos discretos en la circunferencia. Generalizando algunos de ellos.
- En el tercer capítulo, se describe un sistema mecánico simple, que permite observar claramente el origen de la familia clásica de funciones de la circunferencia, y su relación con la modelación de neuronas biológicas.

La segunda parte está integrada por:

- El cuarto capítulo, que proporciona información del software construido desde el punto de vista del usuario, y se discute la forma en que fueron implementados los algoritmos utilizados.
- En el quinto capítulo, se muestra el manual del software.
- En el último capítulo, se exhibe el uso del software, a través de un tutorial, permitiendo:
 - Ejemplificar la teoría expuesta.
 - Motivar a la investigación de este tipo de sistemas, y
 - Reproducir resultados numéricos obtenidos y publicados en libros y revistas especializados en el tema.
- Por último, se proporciona un apéndice, con los temas no tratados explícitamente en el trabajo, pero que de alguna manera se utilizan en él.

Deseo manifestar mi reconocimiento a las personas siguientes:

- Al Dr. Humberto Andrés Carrillo Calvet, responsable del Laboratorio de Dinámica No Lineal de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., por permitir unirme a su grupo de trabajo, por su amistad y sobre todo por sus pláticas de su visión de vida.
- Al M. en C. Fernando Alberto Ongay Larios, profesor de tiempo completo de la Facultad de Ciencias de la U.A.E.M., por su constante apoyo y enseñanza.
- Al M. en C. Luis Alonso Nava Fernández, por introducirme al área de las Ciencias de la Computación, y
- a todos aquellos que me han ayudado a aprender de ellos.

I n d i c e

Introducción

Primera Parte

Dinámica

Capítulo 1: Sistemas Dinámicos

1.1. Sistemas Dinámicos

1.1.1. Sistemas Semi-Dinámicos Discretos

1.2. Comportamientos Periódicos

1.3. Comportamientos Estables

1.3.1 Conjugación Topológica

1.3.2 Conjuntos Límites

1.4. Bifurcaciones en Sistemas con Parámetros

1.5. Comportamientos Caóticos

1.5.1 Sistemas Dinámicos Caóticos

1.5.2 Exponente de Lyapunov

Capítulo 2: Dinámica de las Funciones de la Circunferencia

2.1. Funciones de la Circunferencia

2.1.1 Iteraciones de Funciones de la Circunferencia

2.2. Levantamientos

2.2.1 Proyección Canónica

2.2.2 Definición y Propiedades del Levantamiento

2.3. Homeomorfismos de la Circunferencia

2.3.1 Funciones Diferenciables

2.4. Número y Conjunto de Rotación

2.4.1 Propiedades del Número de Rotación

2.4.2 Conjunto de Rotación

2.5. Sincronización

Capítulo 3: Osciladores de Integración y Disparo

3.1. Análisis del Comportamiento de las Células Nerviosas

3.1.1 Excitabilidad

3.1.2 Respuestas Periódicas

3.1.3 Modelos del Impulso Eléctrico

3.1.3.1 El Modelo de Hodgkin y Huxley (HH)

3.1.3.2 El Modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN)

3.2. Sistema Mecánico Simple

3.2.1 Modelo Geométrico

3.3. Sistema Mecánico con Nivel de Reposo Variable

3.3.1 Modelo Geométrico

3.4. Sistema Mecánico con Contrapeso Variable

3.4.1 Modelo Geométrico

3.5. Sistema Mecánico Combinado

3.5.1 Modelo Geométrico

3.6. Forzamiento Periódico

3.6.1 Oscilador Geométrico Asociado a la Familia de Arnold

Segunda Parte

DIENTE DE SIERRA: Un Sistema de Software para el Análisis Visual-Interactivo de Sistemas Dinámicos Discretos en la Circunferencia y

Osciladores

Geométricos de Integración y Disparo

Capítulo 4: Descripción del Software *DIENTE DE SIERRA*

4.1. Descripción del Programa Desde el Punto de Vista del Usuario

- 4.1.1. Dinámica del Oscilador
- 4.1.2. Dinámica en la Circunferencia
- 4.1.3. Dinámica en el Toro Plano
- 4.1.4. Levantamientos
- 4.1.5. Bifurcaciones
- 4.1.6. Lenguas del Sistema Paramétrico
- 4.1.7. Requerimientos de Hardware

4.2. Descripción de los Algoritmos Utilizados en el Programa

- 4.2.1 Métodos para Calcular Funciones Inversas
- 4.2.2 Algoritmo de Cálculo para el Número de Rotación
- 4.2.3 Algoritmo para Calcular Bifurcaciones
 - 4.2.3.1 Bifurcación generada por la Función Directa
 - 4.2.3.2 Bifurcación generada por la Inversa de la Función
- 4.2.4 Cálculo del Exponente de Lyapunov
 - 4.2.4.1 Exponente de Lyapunov para la Función Directa
 - 4.2.4.2 Exponente de Lyapunov para la Inversa de la Función
- 2.5 Cálculo de Bifurcaciones en Sistemas Biparamétricos(Lenguas de Arnold)

Capítulo 5: Manual del Usuario

5.1. Introducción

5.2. Descripción Panorámica de *DIENTE DE SIERRA*

- 5.2.1. Pantalla de Presentación
- 5.2.2. Formatos de Pantalla y Escenarios Gráficos
 - 5.2.2.1 Formato de Cuatro Ventanas de Visualización
 - 5.2.2.2 Formato de Dos Ventanas de Visualización

5.2.2.3 Formato de Única Ventana de Visualización

5.3. Primera Pantalla de Trabajo: Formato de Cuatro Ventanas

5.4. Formatos de Una y Dos Ventanas de Visualización

5.4.1. Formato de Dos Ventanas

5.4.2. Formato de Única Ventana Amplificada

5.4.3. Escenarios para los Formatos de Una y Dos Ventanas

5.4.4. Menú de Escenarios del Formato de Dos Ventanas

5.5. Pasando de uno a otro formato

5.6. Escenarios Gráficos

5.6.1. Sawtooth Oscillator

5.6.1.1 Descripción del escenario

5.6.1.2 Barra de íconos

5.6.1.3 Funciones de los íconos

5.6.2. Circle Dynamics

5.6.2.1 Descripción del escenario

5.6.2.2 Barra de íconos

5.6.2.3 Funciones de los íconos

5.6.2.4 Formato de ventana amplificada

5.6.3. Torus Dynamics

5.6.3.1 Descripción del escenario

5.6.3.2 Barra de íconos

5.6.3.3 Funciones de los íconos

5.6.3.4 Formato de ventana amplificada

5.6.4. Lifts

5.6.4.1 Descripción del escenario

5.6.4.2 Barra de íconos

5.6.4.3 Funciones de los íconos

5.6.4.4 Formato de ventana amplificada

5.6.5. Bifurcations

5.6.5.1 Descripción del escenario

5.6.5.2 Barra de íconos

5.6.5.3 Funciones de los íconos

5.6.5.4 Formato de Ventana Amplificada

5.6.6. Tongues

5.6.6.1 Descripción del escenario

5.6.6.2 Barra de iconos

5.6.6.3 Funciones de los iconos

5.6.6.4 Formato de Ventana Amplificada

5.7. Glosario

Capítulo 6: Tutorial Osciladores de Integración y Disparo y La Familia Clásica de Funciones de la Circunferencia

6.1. Sucesión de Tiempos y Fases de Disparo

- 6.1.1 Comportamiento Periódico
- 6.1.2 Comportamiento Cuasi-Periódico
- 6.1.3 Comportamiento Biestable
- 6.1.4 Comportamiento Caótico

6.2. Estabilidad e Inestabilidad

- 6.2.1 Caso Periódico
- 6.2.2 Caso Cuasi-Periódico
- 6.2.3 Caso Biestable
- 6.2.4 Caso Caótico

6.3. Exponente de Lyapunov

6.4. Cambios Cualitativos en la Dinámica

- 6.4.1 Bifurcaciones de Doblamiento de Periodo
- 6.4.2 Bifurcaciones Tangentes

6.5. Cálculo de la Constante de Feigenbaum

- 6.5.1 Mediante los Valores de los Puntos de Bifurcación
- 6.5.2 Mediante los Valores de los Super-atractores

6.6. Lenguas de Arnold

- 6.6.1 Número de Rotación
- 6.6.2 Sincronización
- 6.6.3 Coexistencia de Sincronizaciones

Conclusiones

Apéndice

1. Espacios Topológicos

Subespacios y Topologías Relativas

2. Teoría de Grupos

3. Conjuntos Invariantes, Puntos Recurrentes y Puntos No Errantes

Bibliografía

1. Sistemas Dinámicos

En muchas ramas de las ciencias se utilizan ecuaciones para describir cuantitativamente fenómenos de la naturaleza, pero no todas las ecuaciones que se plantean, pueden resolverse y, por lo tanto, no podemos obtener fácilmente de ellas la información que se desea.

Las llamadas ecuaciones lineales permiten un tratamiento algebraico, cuyas soluciones tienen un comportamiento relativamente simple y pueden ser analizadas con cierta facilidad. Pero existen otras ecuaciones, las llamadas "no lineales" que pueden dar lugar a dinámicas muy complejas y por lo mismo su análisis resulta muy difícil. La mayoría de los procesos de interés en las ciencias naturales son procesos no lineales. La teoría matemática de los sistemas dinámicos, sirve para proporcionarnos una mejor comprensión de los modelos que se emplean en diferentes ramas de la ciencia; sistemas de índole físico, químico, biológico, económico, etc. que sufren cambios en el tiempo, y los podemos modelar de alguna forma matemática.

En éste capítulo se pretende describir conceptos principales de la teoría de los sistemas dinámicos, que serán relevantes en capítulos posteriores. Iniciaremos con una definición formal de lo que entenderemos por un sistema dinámico, y posteriormente nos restringiremos a un sistema dinámico en la circunferencia.

1.1. Sistemas Dinámicos

Por sistema se entiende usualmente un conjunto de partes operativamente interrelacionados del que interesa considerar fundamentalmente su comportamiento global. Un sistema real puede entenderse como una fuente de datos observables de comportamiento. Un sistema dinámico se caracteriza por un conjunto de variables relacionadas, que pueden evolucionar en el tiempo, suponiendo que las influencias externas que actúan sobre él, sean conocidas.

Definición 1.1 Un Sistema Dinámico es una tripleta $(X; G; \cdot)$ donde:

- I. X es una variedad diferencial llamada espacio de estados o espacio fase,
- II. G un grupo, y
- III. \cdot función de clase C^k , con $k > 0$, llamado operador de evolución tal que:

$$\cdot : G \times X \rightarrow X.$$

Adoptemos la notación siguiente: $\cdot_s(x) = \cdot(s; x)$.

La función \cdot satisface que $\forall x \in X$ y $s, t \in G$ lo siguiente:

1. $\varphi_0(x) = x, y$
2. $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$.

A partir de la definición 1.1 se tiene lo siguiente:

- a. Si $G = \mathbb{R}$, tenemos un Sistema Dinámico Continuo.
- b. Si $G = \mathbb{Z}$, tenemos un Sistema Dinámico Discreto.

En muchos casos el espacio fase es un espacio euclideo o un subconjunto de él, pero puede no tener una estructura euclidea (circunferencia, esfera, toro o alguna otra variedad diferenciable). En nuestro caso consideraremos a la Circunferencia como el espacio fase en la definición de los sistemas de nuestro interes.

c. Si X es una variedad diferencial uno dimensional, y $G = \mathbb{Z}$, tenemos un Sistema Dinámico Discreto Unidimensional.

d. Si X es la Circunferencia, y $G = \mathbb{Z}$, tenemos un Sistema Dinámico Discreto en la Circunferencia.

Hasta ahora sólo hemos tratado con sistemas donde su comportamiento pasado y futuro puede predecirse, es decir, el tipo de procesos considerados pueden ser reversibles. Para estos casos podemos reconstruir toda la historia de dicho fenómeno. Sin embargo, existen sistemas que son irreversibles (e.g.: sistemas termodinámicos); dichos sistemas son conocidos como sistemas semi-dinámicos.

e. Si G es un semigrupo aditivo, tenemos un Sistema Semi-Dinámico: En este caso, cuando $G = \mathbb{R}^+$ ó $G = \mathbb{R}^i$, lo conoceremos como un Sistema Semi-Dinámico Continuo; y cuando $G = \mathbb{N}$, tenemos un Sistema Semi-Dinámico Discreto.

f. Si X es una variedad diferencial uno dimensional, y $G = \mathbb{N}$, tenemos un Sistema Semi-Dinámico Discreto Unidimensional.

g. Si X es la Circunferencia, y $G = \mathbb{N}$, tenemos un Sistema Semi-Dinámico Discreto en la Circunferencia.

1.1.1. Sistemas Semi-Dinámicos Discretos

En la definición 1.1 $\varphi_t(x)$ representa la evolución de x después de t unidades de tiempo; si pensamos una función $f : X \rightarrow X$ como un vehículo que transporta algún $x \in X$ una unidad de tiempo, entonces podemos repetir la aplicación t veces mediante la composición de f consigo misma, obteniendo la evolución de x después de t unidades de tiempo, que estará representado por $f^t(x)$.

En el caso discreto, φ y f describen el comportamiento de x después de t unidades de tiempo, por lo que $\varphi_t(x) = f^t(x)$. En consecuencia, $\varphi_t(x)$ viene dada por la t -ésima iterada de la función f .

Si denotamos por $x_t = f^t(x)$, tenemos que:

$$f^{t+1}(x) = f^{t+1}(x) = f(f^t(x)) = f(x_t) = x_{t+1}, \text{ donde } t \in \mathbb{Z} \text{ o } \mathbb{N}.$$

Observación: Si f es de clase C^k , entonces f también lo es.

Por un lado, dado que f es un vehículo de transporte para cada estado del sistema, hace posible generar cambios. Por otro, nuestra intuición nos dice que, para que algo cambie de un estado a otro es necesario aplicarle una fuerza; razón por la cual la función f podría ser entendida en esta analogía como un operador que toma en cuenta a las fuerzas involucradas en el sistema.

En lo sucesivo cuando hablemos de un Sistema Dinámico, entenderemos que se trata de un Sistema Dinámico Discreto Unidimensional, y lo consideraremos como aquel generado por alguna función f .

En el análisis del comportamiento de los sistemas dinámicos debemos entender dos tipos de comportamientos importantes: Periódicos y Estables.

1.2. Comportamientos Periódicos

Definición 2.1: Sea $x \in X$, al conjunto $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ lo llamaremos: La Semi-Órbita (o Semi-Trayectoria) Positiva de x .

Cuando f es invertible, podemos definir $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$, y en éste caso, la órbita incluye la historia pasada de x , así que, de manera análoga definimos al conjunto $\{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ como: La Semi-Órbita (o Semi-Trayectoria) Negativa de x .

En consecuencia la órbita de x será la unión de las semi-órbitas positiva y negativa. Es decir, es el conjunto $O_x = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Definición 2.2: Un punto x que cumple $f(x) = x$, lo llamaremos punto fijo de f .

La órbita de un punto fijo consiste únicamente de ese punto.

Definición 2.3: Un punto x que cumple $f^n(x) = x$, lo llamaremos periódico.

Si n es el mínimo entero positivo que satisface la condición $f^n(x) = x$, se le llama periodo del punto periódico. A éstos puntos los denotaremos por $Per_n(f)$.

Al conjunto unión de $Per_n(f)$ con $n > 1$ lo denotaremos por $Per(f)$.

Definición 2.4: La órbita de un punto periódico de periodo n , está constituida de los n diferentes puntos $x; f(x); f^2(x); \dots; f^{n-1}(x)$, y al conjunto de estos n puntos se le llama órbita periódica de periodo n .

Las órbitas periódicas de periodo n , son también llamadas n -ciclos.

En consecuencia todos los puntos de una órbita periódica de periodo n son periódicos de periodo n .

De...nición 2.5: Un punto x se llama eventualmente periódico de periodo n , si x no es periódico de periodo n , pero existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(x) = f^n(f^i(x)) = f^i(x)$ para toda $i \geq m$.

Es decir, $f^i(x)$ es periódico de periodo n para $i \geq m$, por ende la órbita periódica de un punto eventualmente periódico de período n , está constituida de los n diferentes puntos $f^i(x); f^{i+1}(x); f^{i+2}(x); \dots; f^{i+n-1}(x)$. Este tipo de puntos pueden sólo ocurrir en sistemas semi-dinámicos, pues en esta situación no hay inyectividad de la función.

1.3. Comportamientos Estables

La estabilidad de un sistema dinámico se refiere a la permanencia en el tiempo del comportamiento de dicho sistema ante los cambios que puedan sufrir los diversos elementos que lo componen.

Mencionaremos los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov, para las dinámicas más fundamentales que encontramos en los sistemas dinámicos.

De...nición 3.1: Sea x^a un punto periódico de f . Decimos que x^a es estable si para toda V vecindad de x^a , existe una vecindad $V^0 \subset V$ de x^a tal que si $x \in V^0$, entonces $f^n(x) \in V$, $\forall n > 0$.

De...nición 3.2: x^a si además de satisfacer la de...nición 3.1, cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^a,$$

para toda x en alguna vecindad de x^a , se dice que es asintóticamente estable.

De modo sencillo, podemos decir que un punto es estable si la sucesión $f^t(x)$ no se aleja del equilibrio, para valores de x próximos al equilibrio; es asintóticamente estable si tiende hacia el equilibrio también para valores próximos.

De...nición 3.3: Puntos periódicos estables pero no asintóticamente estables son llamados neutrales o simplemente estables.

De...nición 3.4: Un punto que no es estable se dice que es inestable.

De...nición 3.5: Una órbita periódica de periodo n es estable (respectivamente asintóticamente estable e inestable) si para cualquiera de sus puntos, como puntos fijos de f^n , satisfacen la condición correspondiente.

De...nición 3.6: Si x^a es un punto periódico asintóticamente estable, la cuenca de atracción de x^a es el conjunto:

$$A(x^a) = \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^a\}.$$

A partir de la última definición, decimos que para cualquier órbita periódica asintóticamente estable ω , existe un abierto U , con $\omega \subset U$, tal que si $x \in U$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x); \omega) = 0.$$

1.3.1. Conjugación Topológica

Definición 3.7: Sean $f, g : X \rightarrow X$ funciones continuas. Si existe $h : X \rightarrow X$ homeomorfismo que cumpla $g \circ h = h \circ f$, decimos que f y g son funciones conjugadas topológicas, y a h se le conoce como conjugación topológica.

Proposición 3.1: La relación de conjugación topológica tiene las propiedades siguientes:

I. Es una relación de equivalencia; es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva, y, por tanto, define un espacio cociente o espacio de clases de equivalencia.

II. Se verifica que si f y g son conjugados topológicos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $g^n \circ h = h \circ f^n$.

De esto, se sigue que tienen igual número de puntos periódicos.

Por lo tanto, los puntos fijos y órbitas periódicas de la función f se corresponden con los puntos fijos y órbitas periódicas de la función g . Conduciendo a decir que ambas funciones tienen la misma estructura bajo iteración.

III. La conjugación topológica preserva las propiedades de estabilidad.

El concepto de conjugación topológica nos provee de una clasificación de los sistemas dinámicos, de modo que en ciertos casos, es posible analizar la dinámica de un sistema pasando a otro topológicamente equivalente más sencillo de estudiar.

1.3.2. Conjuntos Límites

Siempre será importante conocer el origen y el destino final de cualquier sistema de estudio, razón por la cual se proporcionan los siguientes conceptos:

Definición 3.8: El conjunto omega-límite de x , denotado por $\omega(x)$, del sistema dinámico generado por f , es el conjunto de puntos de acumulación de $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 3.9: Si la función f tiene inverso, entonces podemos definir el conjunto alfa-límite de x , denotado por $\alpha(x)$, del sistema dinámico generado por f , como el conjunto de puntos de acumulación de $f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.2: Dos funciones que son topológicamente conjugadas dan lugar a sistemas dinámicos tal que sus correspondientes ω -límites son homeomorfos. [Ref. 2]

1.4. Bifurcaciones en Sistemas con Parámetros

Una cuestión de gran importancia que debe ser considerada para analizar la dinámica de los sistemas es: ¿Qué tipo de cambios se pueden dar en la evolución de un sistema dinámico ante una pequeña modificación de la función que gobierna el sistema? Una posible respuesta la proporciona la teoría de las bifurcaciones.

Las bifurcaciones de sistemas ocurren al estudiar la dinámica generada por familias de funciones que dependen de uno o varios parámetros (condiciones externas al sistema).

Un diagrama de bifurcación es una representación visual de la iteración de una familia de funciones dependiente de un parámetro que varía, mientras los demás están fijos.

Para observarlo con claridad, quizás sea conveniente considerar un ejemplo. Supongamos la siguiente familia de funciones:

$$f_r(x) = rx(1 - x).$$

Podemos, para diversos valores del parámetro $r \in [1; 4]$, iterar la función con un valor de r determinado y a partir de alguna condición inicial fijada de antemano, pensemos en $x_0 = 0.16$, poder observar como afecta modificar r en el comportamiento de la función.

Para ello, utilizamos un plano cartesiano, donde el eje horizontal mide el parámetro r , y el vertical mide la distribución de la sucesión $f_r^k(x_0)$ con $300 \leq k \leq 400$. Naturalmente los números 300 y 400 son arbitrarios, pero es conveniente quitar los primeros puntos para que la iteración llegue a su posible régimen estacionario y no queden representados puntos que no son relevantes. Véase la figura 1.1 con la información proporcionada:

Del estudio del diagrama de bifurcación se desprenden las características de la relación entre el parámetro y el comportamiento de la iteración de la función. Cuando a cada valor del parámetro (eje horizontal) le corresponde un sólo valor en el eje vertical, significa que hay un único equilibrio; cuando son dos hay un ciclo de orden dos, etc. Dentro de la zona densa hay ventanas periódicas (zonas que

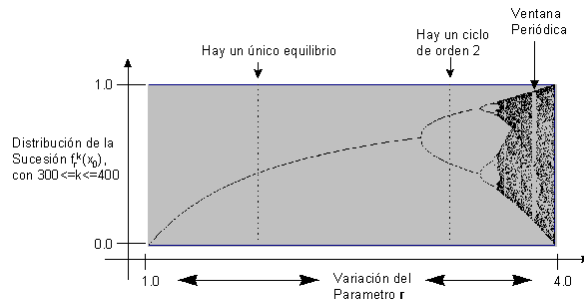


Fig. 1.1:

se van blancas), algunas distinguibles y otras que no se ven. Sin embargo, como muchos de esos periodos son grandes, no se pueden distinguir en el diagrama de aquellos valores que originan comportamientos caóticos.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, basta ver el diagrama de bifurcación para asegurar la complejidad de un determinado sistema dinámico.

Calcular analíticamente las bifurcaciones de sistemas generados por alguna función, representa un esfuerzo formidable, pues para el caso en que la función fuese un polinomio de grado dos, calcular las órbitas periódicas de periodo n , equivale a resolver una ecuación polinomial de grado $2n + 1$; trabajo imposible en general. Sin embargo numéricamente se tienen más posibilidades para estudiar estos sistemas.

1.5. Comportamientos Caóticos

A pesar de su orden fundamental, la naturaleza nos presenta un aspecto desordenado, ya que está siempre sujeta a la intervención de fuerzas externas. El crecimiento de un árbol puede ser reprimido por la sequía o el fuego, una onda luminosa puede ser distorsionada por el calor, un panal puede ser destruido por un oso. El tejido de las apariencias externas no es fácil de penetrar. Parece carecer de costuras, y su misma belleza es perturbadora, es por eso que una cosa es sencillamente admirar y contemplar la fachada y otra, investigar lo que hay detrás.

¿Por qué la realidad es difícil de comprender? La respuesta más general a esta pregunta es, tal vez, porque dicha realidad está compuesta de muchas partes que se interrelacionan entre sí, de modo que se hace difícil integrar lo esencial en unos pocos conceptos. Esto tiene como consecuencia que para comprender esa realidad

como un todo, como una unidad, haya que prescindir de algunos aspectos, o de algunas partes de ella; y esa simplificación lleva a perder rasgos quizá esenciales. Cuando, mediante un modelo simplificado, se capta lo básico de una situación, no se puede afirmar de modo rotundo que esa situación es compleja. En definitiva, una primera aproximación, podríamos decir que algo es complejo cuando es claro que se trata de una única realidad, de una sola cosa, pero que, al mismo tiempo, está compuesta por muchas partes, todas ellas necesarias y difíciles de agrupar bajo una sola idea.

Por tanto, de algún modo podemos decir que, aunque una realidad sea compleja, cuando logramos un modelo que capta lo esencial, hemos llegado a desenmarañar la complejidad y la hemos hecho comprensible. Y una prueba universalmente aceptada de que esta tarea ha sido llevada a cabo con éxito es si ese modelo sirve para predicción en muchos casos. Diremos que una realidad es compleja cuando, conociendo muy bien sus causas, su estructura, su fundamento, etc., se hace difícil predecir cual va a ser su comportamiento.

1.5.1. Sistemas Dinámicos Caóticos

Definición 5.1: Diremos que $f : X \rightarrow X$ es una aplicación topológicamente transitiva, si para cualesquiera dos abiertos de X , U y V , existe un entero positivo k , tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Señalando que el sistema no podrá descomponerse en dos subconjuntos disjuntos invariantes con interior no vacío. (Si f posee una órbita densa, entonces el sistema es topológicamente transitivo).

Definición 5.2: Decimos que $f : X \rightarrow X$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, si existe un número $a > 0$ tal que para todo punto $x \in X$, y para todo abierto de X , U , existe un punto $y \in U$ y n entero positivo, verificando que $d[f^n(x); f^n(y)] > a$.

Indicando que pequeños errores en la estimación de valores de la función se pueden ampliar considerablemente al iterarla.

Definición 5.3: (Devaney) Decimos que $f : X \rightarrow X$ genera un sistema dinámico caótico si cumple las siguientes condiciones:

I) Tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, indicando que por muy cerca que estén dos estados iniciales, la evolución de uno y otro, sometidos a la misma ley evolutiva, puede ser totalmente distinta.

Este es quizá el más sorprendente de los rasgos del caos: la existencia de leyes deterministas y prácticamente imprevisibles.

II) Es topológicamente transitiva, señalando que el sistema comience donde comience, pasará cerca de cualquier posible estado en algún momento.

III) El conjunto de puntos periódicos es denso en X , indicando que en las cercanías de cualquier estado hay puntos periódicos.

1.5.2. Exponente de Lyapunov

Es un concepto útil para determinar si un sistema es caótico. Pues mide una de las características que definen al caos: sensibilidad con respecto a condiciones iniciales.

Consideremos $f : S^1 \rightarrow S^1$, veamos cual es el exponente de Lyapunov para f . Eligamos dos puntos que distan ε , a saber x_0 y $x_0 + \varepsilon$, tal que en la N -ésima iterada están en $f^N(x_0)$ y $f^N(x_0 + \varepsilon)$ respectivamente (ver figura 1.2):

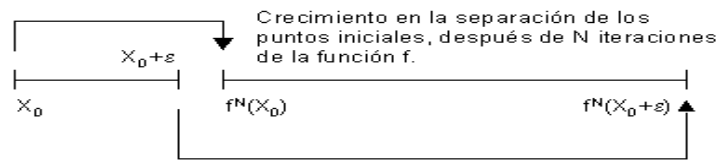


Fig. 1.2:

$$\text{Sea } F(x_0; \varepsilon; N) = \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon}$$

Supongamos que el comportamiento de F es el siguiente: $F(x_0; \varepsilon; N) = 2e^{\lambda(f; x_0) N}$,

$$\Rightarrow 2e^{\lambda(f; x_0) N} = \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow e^{\lambda(f; x_0) N} = \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lambda(f; x_0) = \frac{1}{N} \ln \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lambda(f; x_0) = \frac{1}{N} \ln \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lambda(f; x_0) = \frac{1}{N} \ln \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |(f^i)'(x_0)|$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, tenemos:

$$\lambda(f; x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df^i(x_0)}{dx} \right|$$

Se sabe que, bajo ciertas condiciones bastante usuales, el límite anterior no depende de la condición inicial x_0 .

Para el caso en que el exponente de Lyapunov no depende de condiciones iniciales, se define en términos de la función.

Definición 5.4: El exponente de Lyapunov asociado a un sistema dinámico generado por una función f es:

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^i(x)}{dx} \right|$$

Si el exponente de Lyapunov es positivo, indica que el sistema es sensible con respecto a las condiciones iniciales; en caso contrario (cuando es negativo) el sistema tiene por lo menos una órbita estable.

2. Dinámica de las Funciones de la Circunferencia

Las funciones de la circunferencia determinan sistemas dinámicos útiles para modelar diversos procesos naturales donde se manifiesta una actividad cíclica. En este capítulo llevaremos a cabo una revisión de las principales herramientas teóricas para estudiar la dinámica de estas funciones. Como se verá en el capítulo siguiente, varios modelos de osciladores de integración y disparo, tienen funciones de la circunferencia como funciones de fase de disparos. El análisis de la dinámica de estas funciones revela información importante sobre la forma en que estos sistemas responden a forzamientos externos.

2.1. Funciones de la Circunferencia

Denotaremos por S^1 a la circunferencia, identificada con el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

En rigor, debemos decir que S^1 es la clase de equivalencia topológica de la circunferencia unitaria del plano complejo. Todo aquel conjunto que sea homeomorfo a esta circunferencia será también una representación de ella.

Para nuestros propósitos, una representación útil de S^1 , la obtenemos del espacio cociente $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mediante la relación $x \sim y$, x_j y $z \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.1:

I. Una función $f : S^1 \rightarrow S^1$ se llama función de la circunferencia.

II. Si f es continua, la llamaremos endomorfismo.

III. Si f es continua con inversa continua, la llamaremos homeomorfismo.

La gráfica de una función de la circunferencia es un subconjunto de $T^2 = S^1 \times S^1$, superficie conocida como el Toro.

Cada punto de S^1 , mediante la identificación que nos ofrece el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} , tiene un representante en el intervalo $[0; 1]$, donde el 1 es identificado con el 0, por ende cada punto de $S^1 \times S^1$ puede representarse por un punto en el cuadrado unitario $[0; 1] \times [0; 1]$; en donde además los lados opuestos de dicho cuadrado quedan identificados. Fig 2.1.

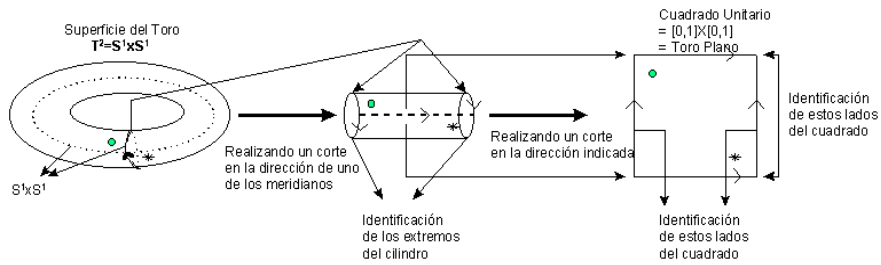


Fig. 2.1: Visualización en el Toro plano

Llamaremos a dicho cuadrado unitario el Toro Plano.

La gráfica de un endomorfismo es una curva continua en $S^1 \times S^1$. Esta curva envuelve al toro una vez en la dirección de los paralelos y un cierto número de veces en la dirección de los meridianos. Pudiéndose visualizar en el Toro Plano, como se muestra en las Figs. 2.2 y 2.3:

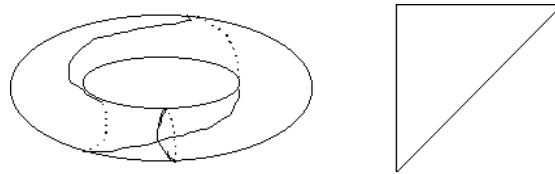


Fig. 2.2: Curva continua que envuelve al toro 1 vez en la dirección de los paralelos y 1 vez en la dirección de los meridianos.

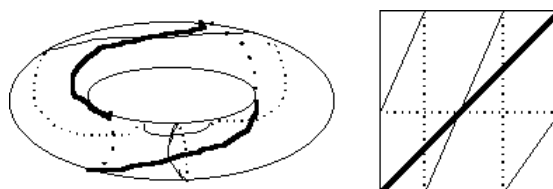


Fig. 2.3: Curva continua que envuelve al toro 1 vez en la dirección de los paralelos y 2 veces en la dirección de los meridianos.

2.1.1. Iteraciones de Funciones de la Circunferencia

La dinámica generada por una función de la circunferencia, pueden ser analizada gráficamente a través de sus iteraciones en el toro plano, mediante el procedimiento siguiente (Fig. 2.4):

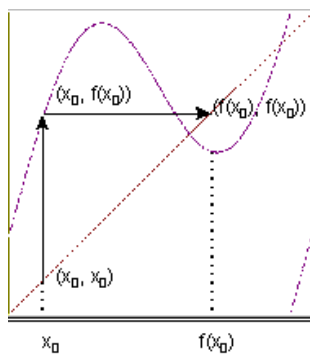


Fig. 2.4: Iteración

Dado que cada punto $x \in [0; 1]$ puede identificarse con el punto $(x; x)$ de la diagonal del toro plano, la evolución de las trayectorias estará descrita así:

- I. A partir de un punto inicial $(x_0; x_0)$, trazamos una recta vertical hasta intersectar la gráfica de f , dicha intersección tendrá coordenadas $(x_0; f(x_0))$, y
- II. a partir de ahí, trazamos una recta horizontal hasta intersectar nuevamente la diagonal, obteniendo como punto de intersección $(f(x_0); f(x_0))$. El cual representa la imagen bajo f del punto inicial elegido.

Podemos seguir iterando de ésta manera y obtener una sucesión de puntos en la diagonal, que se proyectan sobre una órbita en $[0; 1]$.

Los puntos fijos de la función son evidentemente las intersecciones de la gráfica con la diagonal. Del mismo modo, los puntos periódicos de periodo q , serán los puntos de intersección de la gráfica de la q -ésima iterada de la función con la diagonal.

2.2. Levantamientos

Para estudiar funciones de la circunferencia, conviene asociarles una función real de variable real, que refleje propiedades que posee la función original.

2.2.1. Proyección Canónica

Definición 2.1: El conjunto $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ puede ser parametrizado mediante la función $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, definida por $\pi(t) = e^{i2\pi t}$, la cual es llamada proyección canónica. (Fig. 2.5)

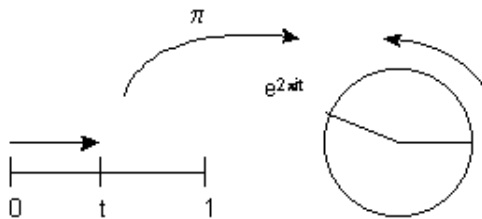


Fig. 2.5: Proyección Canónica

Proposición 2.1: $\pi(t)$ es continua.

Demostración:

Identificando al plano complejo con \mathbb{R}^2 , π puede ser definida a través de la correspondencia siguiente:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (\cos(2\pi t); \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Entonces $\frac{d\pi}{dt} = (\pi \sin(2\pi t); \cos(2\pi t))$ existe para toda $t \in \mathbb{R}$, por lo que π es diferenciable en \mathbb{R} , y por lo tanto es continua en \mathbb{R} . }

Proposición 2.2: $\forall t, s \in \mathbb{R}$, se tendrá que $\pi(t) = \pi(s)$, $t \equiv s \pmod{1}$, es decir, $\pi(t) = \pi(s)$, $t = s + k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(t) &= \mathcal{U}(s) \\
e^{2\mathcal{U}it} &= e^{2\mathcal{U}is} \\
e^{2\mathcal{U}i(t-s)} &= 1 \\
t &= s + k, \text{ para alg\u00fan } k \in \mathbb{Z} \\
t &= s \pmod{1} \text{ para alg\u00fan } k \in \mathbb{Z}. \}
\end{aligned}$$

Proposici\u00f3n 2.3: $\mathcal{U}(t_1 + t_2) = \mathcal{U}(t_1) \mathcal{U}(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Demostraci\u00f3n:

$$\mathcal{U}(t_1 + t_2) = e^{2\mathcal{U}i(t_1+t_2)} = e^{2\mathcal{U}it_1} e^{2\mathcal{U}it_2} = \mathcal{U}(t_1) \mathcal{U}(t_2). \quad \square$$

2.2.2. Definici\u00f3n y Propiedades del Levantamiento

Definici\u00f3n 2.2: Sea f un endomorfismo. Una funci\u00f3n continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $\mathcal{U} \pm F = f \pm \mathcal{U}$, es llamada una representaci\u00f3n o un levantamiento de f .

Es decir, F hace posible que el siguiente diagrama (Fig. 2.6) sea conmutativo:

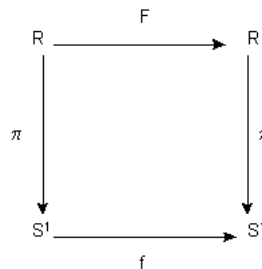


Fig. 2.6: Diagrama Conmutativo

Proposici\u00f3n 2.4: Una funci\u00f3n continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es un levantamiento de una funci\u00f3n de la circunferencia si y s\u00f3lo si $\forall t, s \in \mathbb{R}$ tal que $t - s \in \mathbb{Z}$, se cumple que $F(t) - F(s) \in \mathbb{Z}$.

Demostraci\u00f3n:

Si F es un levantamiento de una funci\u00f3n de la circunferencia f , y $t - s \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(s), \text{ de donde, } \mathcal{U}(F(t)) = f(\mathcal{U}(t)) = f(\mathcal{U}(s)) = \mathcal{U}(F(s))$$

$$F(t) - F(s) \in \mathbb{Z}.$$

Reciprocamente, consideremos una rama cualquiera de \mathcal{U}^{-1} , y $f(x) = \mathcal{U}(\mathcal{U}^{-1}(x))$.

Ahora, dado $t \in \mathbb{R}$, sea $s = \mathcal{U}^{-1}(\mathcal{U}(t))$, entonces $t - s \in \mathbb{Z}$, pero como $F(t) - F(s) \in \mathbb{Z}$, se concluye que:

$$\mathcal{I}(F(t)) = \mathcal{I}(F(s)) = \mathcal{I}(F(\mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(t)))) = f(\mathcal{I}(t)). \quad \}$$

Definición 2.3: Decimos que una función continua real de variable real $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tiene grado k , con $k \in \mathbb{Z}$, si $\forall t \in \mathbb{R}$ se cumple que $F(t + 1) = F(t) + k$.

Observación:

- Si $k = 0$ entonces F es periódica.
- Denotaremos el Grado de un Levantamiento F como $k(F)$.

Proposición 2.5: Toda función continua real de variable real de grado entero es un levantamiento de algún endomorfismo de la circunferencia.

Demostración:

Sea F una función continua real de variable real con $k(F) \in \mathbb{Z}$, y $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $s - t \in \mathbb{Z}$, es decir, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $s = t + m$.

Entonces $F(s) = F(t + m) = F(t) + mk(F)$, por lo que $F(s) - F(t) = mk(F) \in \mathbb{Z}$.

Entonces por la proposición 2.4, F es un levantamiento de una función de la circunferencia. }

Veamos algunos ejemplos de levantamientos con grados distintos (Figs. 2.7, 2.8 y 2.9):

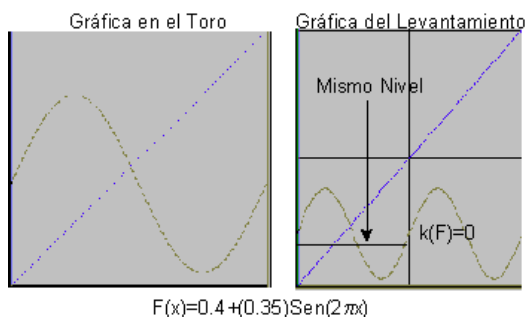


Fig. 2.7: Levantamiento de Grado Cero

Proposición 2.6: Sea f un endomorfismo de la circunferencia y F un levantamiento continuo de f . F^n será otro levantamiento continuo de f si y sólo si existe $c_{F^n, F} \in \mathbb{Z}$ tal que $F^n(t) = F(t) + c_{F^n, F}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

))

Supongamos que F y F^n son distintos levantamientos de f , entonces:

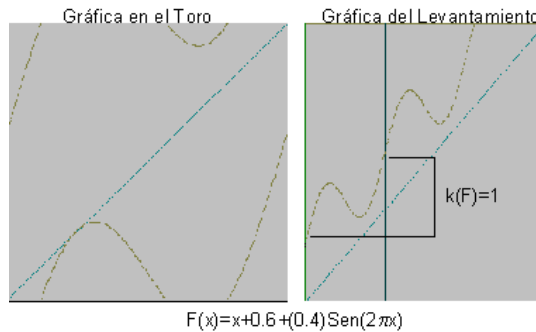


Fig. 2.8: Levantamiento de Grado Uno

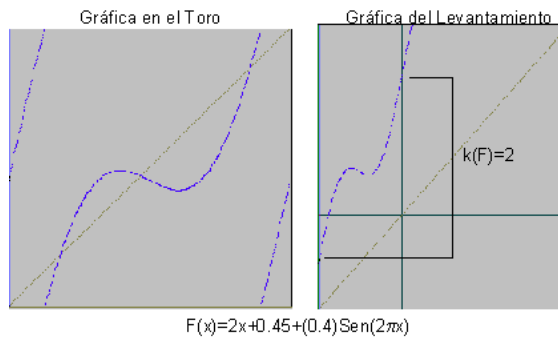


Fig. 2.9: Levantamiento de Grado Dos

$$\frac{1}{4}(F^n(t)) = f\left(\frac{1}{4}(t)\right) = \frac{1}{4}(F(t)), \quad 8t \in 2\mathbb{R}$$

-) $F^n(t) \in F(t) \in 2\mathbb{Z}, \quad 8t \in 2\mathbb{R}$
-) $F^n(t) = F(t) + c_{F^n, F}(t)$, siendo $c_{F^n, F}$ una función que toma valores enteros $8t \in 2\mathbb{R}$.

La continuidad de F^n y F implican continuidad de la función $c_{F^n, F}$ y como ésta sólo toma valores enteros, debe ser constante.

()

Supongamos que F^n es tal que existe $c_{F^n, F} \in 2\mathbb{Z}$ satisfaciendo

$$F^n(t) = F(t) + c_{F^n, F}, \quad 8t \in 2\mathbb{R}$$

-) $\frac{1}{4}(F^n(t)) = \frac{1}{4}(F(t) + m) = \frac{1}{4}(F(t)) = f\left(\frac{1}{4}(t)\right)$) $\frac{1}{4}(F^n(t) + m) = f\left(\frac{1}{4}(t)\right)$
- en consecuencia F^n es también levantamiento de f . }

$$F(t + m) = F_1(t) + mk$$

es continua y de grado k .

Además F es levantamiento de f , ya que dado cualquier $\frac{3}{4} = t + m$ con $t \in I$ y $m \in [\frac{3}{4}]$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(F(\frac{3}{4})) &= \frac{1}{4}(F(t + m)) = \frac{1}{4}(F_1(t) + mk) = \frac{1}{4}(F_1(t)) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{4}^{-1}(f(\frac{1}{4}(t)))) = f(\frac{1}{4}(t)) = f(\frac{1}{4}(\frac{3}{4})). \end{aligned}$$

Mostrar que dos levantamientos F y G continuos de un endomor...smo f di...eren necesariamente por una constante entera, es consecuencia de la proposición 2.6. }
}

Proposición 2.10: Si F es un levantamiento de un endomor...smo f de grado k , entonces F^n es un levantamiento de f^n y tiene grado k^n .

Demostración: (Inducción sobre n)

Para $n = 1$ es valido, pues como F es levantamiento de f , se tiene que:

$$\frac{1}{4} \pm F = f \pm \frac{1}{4},$$

Supongamos que la proposición es valida para n , es decir

$$\frac{1}{4} \pm F^n = f^n \pm \frac{1}{4},$$

demostraremos que es valido para $n + 1$,

$$\frac{1}{4} \pm F^{n+1} = \frac{1}{4} \pm F^n \pm F = f^n \pm \frac{1}{4} \pm F = f^n \pm f \pm \frac{1}{4} = f^{n+1} \pm \frac{1}{4}.$$

Además como f es continua y claramente $F^n(t + 1) = F^n(t) + k(f)$, entonces F^n es un levantamiento de f^n .

Resta probar que f^n tiene grado k^n , para ello procedamos por inducción sobre n .

Para $n = 1$, es valido pues dado que f es de grado k , entonces $F(t + 1) = F(t) + k$

Para $n = 2$, entonces $F^2(t + 1) = F(F(t + 1)) = F(F(t) + k) = F^2(t) + k^2$.

Supongamos que la proposición es valida para n , es decir

$$F^n(t + 1) = F^n(t) + k^n,$$

demostraremos que es valido para $n + 1$,
 $F^{n+1}(t+1) = F(F^n(t+1)) = F(F^n(t) + k^n) = F(F^n(t)) + k^n = F^{n+1}(t) + k^{n+1}$
 .}

Observación: Sean F y G levantamientos de un endomor...smo de grado k , entonces $F \pm G$ y $G \pm F$ son levantamientos de f^2 con grado k^2 .

La proposición 2.10 relaciona los puntos periódicos de una función de la circunferencia y sus levantamientos. Grá...camente, la proposición indica que la grá...ca del levantamiento F^n interseca a la recta $s = t + k$, siendo k el grado de la función (Fig. 2.10).

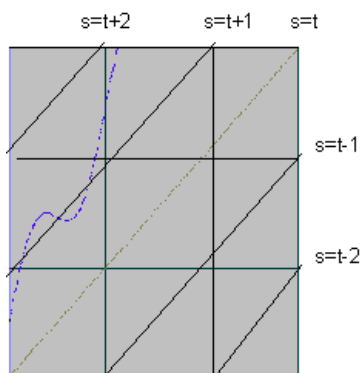


Fig. 2.10: Gra...ca de F^n

Para conocer la grá...ca de un levantamiento en toda la recta, bastará conocerla en un intervalo de longitud uno, pensemos en $[0; 1]$.

Si el grado de la función es k , entonces el punto ...nal en 1 está k unidades arriba que el punto en 0. Ahora, a partir del punto $(1; F(1))$ repetimos el mismo razonamiento, obteniendo que $F(2) - F(1) = k$. Por lo tanto repitiendo éste proceso, a izquierda y derecha del trozo de la grá...ca conocido, se obtiene la grá...ca del levantamiento.

De...nición 2.5: Llamaremos al intervalo de la grá...ca de un levantamiento que asume valores en $[0; 1]$, un intervalo fundamental. (Fig. 2.11)

Apartir del intervalo fundamental, la grá...ca de una función en la circunferencia puede obtenerse considerando cualquiera de sus levantamientos continuos en

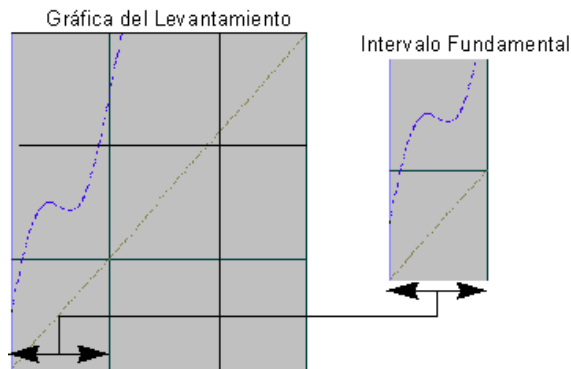


Fig. 2.11: Intervalo Fundamental

dicho intervalo. Dicha gráfica cruzará verticalmente un número entero de cuadrados de lado uno; estos nos determinan un rectángulo de base uno y altura igual a un entero, digamos k , que resultará ser el grado de la función de la circunferencia. Cortemos ahora este rectángulo en k cuadrados unitarios y superponiéndolos obtenemos la gráfica de f .

Proposición 2.11: Sea f un endomorfismo de la circunferencia. Entonces f tiene una órbita periódica de periodo q si y sólo si para todo levantamiento F de f , existen $t \in \mathbb{R}$ y $p_{F,t} \in \mathbb{Z}$ que cumplen:

$$F^q(t) = t + p_{F,t}$$

Demostración:

))

Dado que f tiene una órbita periódica de periodo q , existen $x \in S^1$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{q}(t) = x \text{ y } f^q(x) = x \implies f^q(\frac{1}{q}(t)) = \frac{1}{q}(t)$$

Si F es un levantamiento de f entonces

$$f(\frac{1}{q}(t)) = \frac{1}{q}(F(t)) \implies f^q(\frac{1}{q}(t)) = \frac{1}{q}(F^q(t)),$$

y como:

$$f^q(\frac{1}{q}(t)) = \frac{1}{q}(t) \implies \frac{1}{q}(F^q(t)) = \frac{1}{q}(t),$$

entonces existe $p_{F;t}$ tal que:

$$F^q(t) = t + p_{F;t}$$

()

Si existen $t \in \mathbb{R}$ y $p_{F;t} \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(t) = x \text{ y } F^q(t) = t + p_{F;t} \\ \text{) } f^q(x) = f^q(\frac{1}{4}(t)) = f^{q_i-1}(f(\frac{1}{4}(t))) = f^{q_i-1}(\frac{1}{4}(F(t))) \\ = \dots = \frac{1}{4}(F^q(t)) = \frac{1}{4}(t + p_{F;t}) = \frac{1}{4}(t) = x, \\ \text{) } f^q(x) = x. \} \end{aligned}$$

Proposición 2.12: Sean \bar{F} y F levantamientos de un endomor...simo f , tal que $8t \in \mathbb{R}$, $\bar{F}(t) = F(t) + c_{F;\bar{F}}$, con $c_{F;\bar{F}} \in \mathbb{Z}$. Suponiendo que $k(f) = k$, entonces:

$$\bar{F}^n(t) = F^n(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{n-1} k^i$$

Demostración: (Inducción sobre n)

Para $n = 1$ es obvio, pues por definición: $\bar{F}(t) = F(t) + c_{F;\bar{F}}$

Para $n = 2$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \bar{F}^2(t) = \bar{F}(\bar{F}(t)) = \bar{F}(F(t) + c_{F;\bar{F}}) = F(F(t) + c_{F;\bar{F}}) + c_{F;\bar{F}} = \\ F(F(t)) + c_{F;\bar{F}}k + c_{F;\bar{F}} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\bar{F}^2(t) = F^2(t) + c_{F;\bar{F}}k + c_{F;\bar{F}}$

Supongamos que la proposición es válida para $m < n$

Demostremos que la proposición también es válida para n :

$$\begin{aligned} \bar{F}^n(t) = \bar{F}(\bar{F}^{n-1}(t)) = F(\bar{F}^{n-1}(t)) + c_{F;\bar{F}} = \\ F(F^{n-1}(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{n-2} k^i) + c_{F;\bar{F}} = F(F^{n-1}(t)) + (c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{n-2} k^i)k + c_{F;\bar{F}} = \\ F^n(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=1}^{n-1} k^i + c_{F;\bar{F}} = F^n(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{n-1} k^i \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\bar{F}^n(t) = F^n(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{n-1} k^i \}$$

Corolario 3.5.1: Cuando $k(f) = 1$) $\bar{F}^n(t) = F^n(t) + c_{F;\bar{F}}n$.

Demostración Pues $n = \sum_{i=0}^{n-1} 1^i$.

Corolario 3.5.2: Particularmente cuando f tiene un punto periódico, de periodo q , entonces para todo levantamiento F y toda t , existe $p_{F;t}$ y $c_{F;\bar{F}}$ tales que:

$$\bar{F}^q(t) = \begin{cases} f^{t + p_{F;t} + c_{F;\bar{F}} \frac{1-k^q}{1-k}} & \text{cuando } k \neq 1 \\ t + p_{F;t} + c_{F;\bar{F}}q & \text{cuando } k = 1 \end{cases}$$

Demostración

Dado que f tiene un punto q -periódico, existe $p_{F;t}$, tal que: $F^q(t) = t + p_{F;t}$, entonces:

Caso I) Si $k \neq 1$ se tendrá:

$$\bar{F}^q(t) = F^q(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{q-1} k^i = t + p_{F;t} + c_{F;\bar{F}} \frac{1-k^q}{1-k}, \text{ y}$$

Caso II) Si $k = 1$ se tendrá:

$$\bar{F}^q(t) = F^q(t) + c_{F;\bar{F}} \sum_{i=0}^{q-1} 1^i = t + p_{F;t} + c_{F;\bar{F}}q \} .$$

2.3. Homeomorfismos de la Circunferencia

Definición 3.1: Sea f un homeomorfismo de la circunferencia y F un levantamiento continuo de f . Diremos que: f es monótono creciente o decreciente si F lo es.

Proposición 3.1: Si f es un homeomorfismo de la circunferencia y F es un levantamiento de f , entonces F es un homeomorfismo y además F^{-1} es un levantamiento de f^{-1} . [Ref. 2]

Proposición 3.2: Sean f, g funciones continuas de la circunferencia y F, G sus levantamientos respectivos. Si f y g son topológicamente conjugadas entonces F y G son topológicamente conjugadas.

Definición 3.2: Decimos que S^1 esta orientada positivamente (Fig. 2.12), si la recta tangente en el punto de referencia es el vector unitario $(j \sin(0), \cos(0)) = (0; 1)$

Intuitivamente ésta orientación es simplemente recorrer la circunferencia en el sentido contrario a las manecillas del reloj. De aquí en adelante supondremos que la circunferencia esta orientada positivamente.

Definición 3.3: Dados $x, y \in S^1$, con $x = e^{2\pi i t_x}$ e $y = e^{2\pi i t_y}$, decimos que $x < y$, $\forall t_x, t_y \in \mathbb{R}$ tal que $t_y = t_x + \theta$.

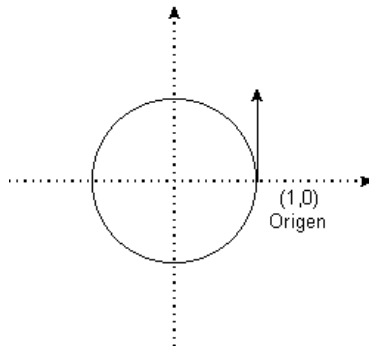


Fig. 2.12: Orientación Positiva

Definición 3.4: Decimos que una función continua de la circunferencia preserva orientación si para cualquier $x, y \in S^1$, se satisface la definición 3.3

Definición 3.5: El arco que va de x a y , con $x, y \in S^1$ es:

$$\text{arc}(x; y) = \{z \in S^1 : x \cdot z \cdot y\}.$$

Abreviaremos "homeomorfismo que preserva orientación" por HPO.

Proposición 3.3: Cualquier levantamiento de un HPO es estrictamente creciente.

Demostración: Consecuencia de la definición 3.4 }

Proposición 3.4: Sea f un HPO, entonces $k(f) = 1$.

Demostración:

Pues, como los levantamientos de f son estrictamente crecientes, su grado es mayor o igual a 1. Si fuese mayor que uno, entonces, por el teorema de valor medio para funciones continuas, entre t y $t + 1$, existiría s tal que $F(s) = F(t) + 1$, siendo F un levantamiento cualquiera; entonces $f(\frac{1}{4}(s)) = \frac{1}{4}(F(s)) = \frac{1}{4}(F(t) + 1) = \frac{1}{4}(F(t)) = f(\frac{1}{4}(t))$, y por lo tanto f no sería inyectiva.

En consecuencia $k(f) = 1$. }

Proposición 3.5: Sea f es un homeomorfismo que invierte orientación. Si F es un levantamiento de f , éste resulta ser decreciente y $F(t + 1) = F(t) - 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.6: Dada una función continua f sobre de la circunferencia, de grado 1 ó -1 , cuyos levantamientos son estrictamente monotonos, es un homeomorfismo.

Un resultado que permite caracterizar a los HPO's es el siguiente:

Proposición 3.7: f es una función continua de la circunferencia, inyectiva y de grado 1 si y sólo si f es un HPO.

2.3.1. Funciones Diferenciables

De...nición 3.6: Decimos que f es diferenciable si cualquier levantamiento F de f lo es.

Proposición 3.8: Si f es diferenciable, entonces las derivadas de todos sus levantamientos son iguales.

Demostración: Consecuencia de que, distintos levantamientos difieren en constantes. }

Proposición 3.9: Sea x un punto periódico de período q , y $t \in \mathbb{R}$ tal que $f^q(t) = x$, entonces:

I. Si $|j(f^q)^0(x)| < 1$ entonces la órbita de x es estable.

II. Si $|j(f^q)^0(x)| > 1$ entonces la órbita de x es inestable.

De...nición 3.7: Sea x un punto periódico de periodo q , es llamado hiperbólico si $|j(f^q)^0(x)| \neq 1$.

De...nición 3.8: Si x es hiperbólico, su órbita es llamada hiperbólica.

De...nición 3.9: El número $(f^q)^0(x)$ es llamado el multiplicador del punto periódico.

Proposición 3.10: Si x es un punto periódico hiperbólico de periodo q y $|j(f^q)^0(x)| < 1$, entonces la órbita $\{x^n\}$ es asintóticamente estable. En éste caso, $\{x^n\}$ se llama atractor periódico exponencial.

De...nición 3.10: Sea x un punto periódico de periodo q . Si $(f^q)^0(x) = 0$, entonces es llamado super-estable.

Proposición 3.11: Si x^n es un punto periódico hiperbólico de periodo q y $|j(f^q)^0(x)| > 1$, entonces existirá una vecindad V de x tal que si $x^0 \in V$, $x^n \notin V$ entonces existe k tal que $f^n(x^0) \notin V$ para todo $n \geq k$. En tal caso, x es llamado repulsor periódico exponencial.

De...nición 3.11: Si en un homeomorfismo, tanto f como f^{-1} son diferenciables, diremos que es un difeomorfismo.

2.4. Número y Conjunto de Rotación

Trataremos de encontrar un invariante que nos determine a que rotación está relacionado un homeomorfismo dado, con la posibilidad de que pueda darse para el caso en que el homeomorfismo no tenga órbitas periódicas.

Cuando tenemos una órbita con rotación de ángulo $\frac{m}{n} 2\pi$, n determina el período de sus órbitas y m determina el número de vueltas que la órbita da a la circunferencia antes de regresar al punto de partida. Este tipo de órbitas, le imponen un orden determinado a todas las restantes órbitas.

A cada homeomor...smo le asociaremos un número, que llamaremos número de rotación, que determina a que rotación está asociado dicho homeomor...smo.

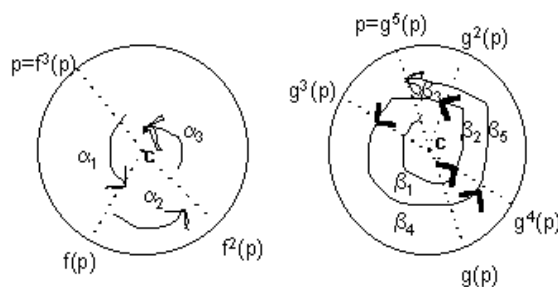


Fig. 2.13: Órbitas Periódicas con distinto Número de Rotación.

Haciendo referencia a la parte izquierda de la Fig. 2.13, sea α_i el ángulo formado por $f^{i-1}(p)$, c , $f^i(p)$ donde c es el centro del círculo. Análogamente en la parte derecha de la Fig. 2.13 sean β_i los ángulos correspondientes para la función g .

El promedio de las α_i es $\frac{1}{3} \sum \alpha_i = \frac{1}{3} 2\pi$ y el de las β_i es $\frac{1}{5} \sum \beta_i = \frac{2}{5} 2\pi$.

Si g tuviera otra órbita periódica, ésta sería de periodo 5 y el promedio de los ángulos de rotación también sería $\frac{2}{5} 2\pi$, ya que al recorrerse en el mismo orden implica que la suma de los ángulos es 4π y por tanto el promedio es $\frac{2}{5} (2\pi)$.

El promedio mencionado es un buen candidato para ser el número de rotación, pues es de esperarse que a través de él podamos asociar a un homeomor...smo la rotación correspondiente, sin recurrir a la geometría de ninguna órbita.

Veamos como podemos calcularlo, para ello haremos uso de la información que nos proporcionan los levantamientos. (Fig. 2.14)

Sea F algún levantamiento de un HPO f , y sea $\gamma(t) = x$, entonces el ángulo determinado por $f^{k-1}(x)$, $f^k(x)$ con respecto al centro del círculo mide $2\pi \frac{1}{n} (F^k(t) - F^{k-1}(t))$, siendo el promedio de los ángulos en las n primeras iteradas el siguiente:

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n (F^k(t) - F^{k-1}(t)) = \frac{2\pi}{n} (F^n(t) - t)$$

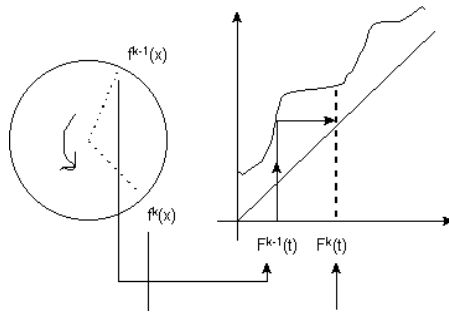


Fig. 2.14: Representación de una iteración en la circunferencia a través de f y en el plano cartesiano a través de F .

en consecuencia el promedio de todos los ángulos de rotación será:

$$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F^n(t) - F^{i-1}(t)}{n} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{F^n(t)}{n} - \frac{F^{i-1}(t)}{n} \right) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}.$$

Definición 4.1: Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ un HPO y F cualquier levantamiento continuo de f . Entonces definimos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F^n(t)}{n}.$$

Lema 4.1: El límite anterior existe y no depende del valor de t elegido.

Demostración: [Ref. 2]

Lema 4.2: Sea f un HPO. Para distintos levantamientos F_1 y F_2 de f se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_1(t) dt + c, \text{ con } c \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:

Si F_1 y F_2 son distintos levantamientos de f , entonces: $F_2(t) = F_1(t) + c_{F_1;F_2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Entonces $F_2^n(t) = F_1^n(t) + c_{F_1;F_2} \sum_{i=0}^{n-1} k^i$, como f es HPO, entonces su grado es 1, en consecuencia $F_2^n(t) = F_1^n(t) + c_{F_1;F_2} n$, entonces $\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F_2^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F_1^n(t) + c_{F_1;F_2} n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_1^n(t)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{F_1;F_2} n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_1(t) dt + c_{F_1;F_2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Como lo anterior es válido, independiente de la t elegida, podemos escribir sólo: $\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_1(t) dt + c_{F_1;F_2}$.

Observación: La constante por la que difieren los levantamientos F_1 y F_2 , es la misma por la que difieren $\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_1(t) dt$ y $\frac{1}{2\pi} \int_0^1 F_2(t) dt$.

Con ayuda de los lemas 4.1 y 4.2, podemos definir el número de rotación.

Definición 4.2: El número de rotación de un HPO f , denotado por $\frac{1}{2}(f)$, es la parte fraccionaria de $\frac{1}{2^n}(F)$ siendo F algún levantamiento elegido de f . Es decir:

$$\frac{1}{2}(f) = \frac{1}{2^n}(F) \bmod(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{F^n(t)}}{n} \bmod(1).$$

Proposición 4.1: El concepto anterior está bien definido, pues no depende del levantamiento elegido.

Demostración:

Sean F_1 y F_2 distintos levantamientos de f , entonces $\frac{1}{2^n}(F_2) = \frac{1}{2^n}(F_1) + c_{F_1, F_2}$, entonces $\frac{1}{2}(f) = \frac{1}{2^n}(F_2) \bmod(1) = \frac{1}{2^n}(F_1) \bmod(1)$. }

Por ejemplo, el número de rotación de una rotación con ángulo $2\pi\mu$, siendo $0 < \mu < 1$, es precisamente μ .

Definición 4.3: Sean f, g y h HPO's, siendo h el conjugado topológico entre f y g . Decimos que h es una conjugación que preserva orden si $\frac{1}{2}(g) = \frac{1}{2}(f)$.

Proposición 4.2: El número de rotación es invariante bajo conjugaciones que preserven orden.

Demostración: Ver referencia [2].

Proposición 4.3: Si f tiene puntos fijos, entonces $\frac{1}{2}(f) = 0$.

Demostración:

Si t es el punto fijo, entonces:

$$\frac{1}{2}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{F^n(t)}}{n} \bmod(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_t}{n} \bmod(1) = 0. }$$

2.4.1. Comportamiento del Número de Rotación

El número de rotación determina, en gran medida, la dinámica generada por los homeomorfismos, como lo muestran los resultados siguientes. Para los resultados no demostrados en esta sección consultar las referencias [2] y [3].

Proposición 4.4: Un HPO f tiene puntos periódicos si y sólo si $\frac{1}{2}(f)$ es racional.

De esta proposición se sabe que:

a) Si $\frac{1}{2}(f) = \frac{p}{q}$, con p y q primos relativos, entonces todas sus órbitas periódicas tienen igual periodo y éste es múltiplo de q .

b) El límite de cualquier órbita será una órbita periódica.

c) El conjunto de puntos recurrentes y de puntos no-errantes, coinciden con el conjunto de puntos periódicos de la función f . Es decir $R(f) = \Omega(f) = \omega(f)$. [Ref. 3]

Proposición 4.5: Si el número de rotación de un HPO es irracional, entonces todos los Ω -límites son el mismo, y éste puede ser todo S^1 o un conjunto de cantor.

Acerca de esta proposición se sabe que:

a) Si $\Omega(x) = S^1$, entonces el sistema es llamado transitivo.

Todos los puntos de la circunferencia son recurrentes, y se cumple que $R(f) = \Omega(f) = \omega(f)$, ésto entre otras cosas implica que todas sus órbitas son densas en S^1 .

b) Si $\Omega(x)$ es un conjunto de cantor se llama intransitivo.

Estos conjuntos coinciden entre sí, y con el ternario de cantor, si además se cumple que el HPO $f \in C^2$, entonces se tendrá que f es topológicamente conjugada a una rotación de ángulo $2\pi\alpha(f)$.

De las proposiciones 4.4 y 4.5 podemos decir que, el número de rotación determina el comportamiento del sistema a largo plazo, es decir determina la estructura de los Ω -límites.

Es interesante notar como para HPO con número de rotación irracional, los Ω -límites no dependen de las órbitas; bajo ciertas condiciones la situación es todavía más interesante, pues se encuentran estructuras complejas, como conjuntos de cantor.

Recíprocamente ¿Dado un conjunto de cantor, puede uno encontrar una función de la circunferencia cuyo conjunto Ω -límite sea precisamente ese conjunto?. La proposición siguiente responde a tal cuestión:

Proposición 4.6: Sea K un conjunto de cantor en la circunferencia, y sea $\alpha \in \mathbb{Q}$. Entonces existe un HPO f , tal que $\alpha(f) = \alpha$ y $\Omega(f) = K$.

Veremos ahora como se podrá determinar el número de rotación en el caso de no homeomorfismos.

2.4.2. Conjunto de Rotación

Definición 4.4: Sea f un endomorfismo de la circunferencia, de grado 1 y F un levantamiento de f , entonces el número de rotación de F en el punto t es:

$$\alpha(F; t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n}$$

Observaciones: Sean f, g endomorfismos de la circunferencia de grado uno, F y G sus respectivos levantamientos, entonces:

- 1) $\frac{1}{2}(F; \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es de grado cero y en general no constante.
- 2) $\frac{1}{2}(R_{\theta} \pm F; t) = \frac{1}{2}(F; t) + \theta$, si $\theta \in \mathbb{Z}$
- 3) $\frac{1}{2}(R_{\theta}; t) = \theta$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- 4) Si $h \pm g = f \pm h$, con h homeomor...simo de la circunferencia, entonces $\frac{1}{2}(G; t) = \frac{1}{2}(F; H(t))$. En particular si $F = R_{\theta}$, se tiene $\frac{1}{2}(G; t) = \theta \in \mathbb{Z}$.

Demostración: [Ref. 2].

De...nición 4.5: Sea f un endomor...simo de la circunferencia, de grado uno y F un levantamiento de f entonces el conjunto de rotación determinado por el levantamiento F está dado por:

$$C(F) = \{ \frac{1}{k}(F; t) : t \in \mathbb{R} \}$$

De...nición 4.6: Sea f un endomor...simo de la circunferencia, de grado uno y F un levantamiento de f . El conjunto de rotación de f es $C(f) = C(F) \bmod 1$

Proposición 4.7: (Newhouse, Palis, Takens e Ito) $C(f)$ es un intervalo cerrado.

Cuando f es un endomor...simo de la circunferencia, monótono, de grado uno, $C(f)$ se reduce a un punto, conocido como el número de rotación de f . En este caso $C(f) = \{ \frac{1}{k}(f) \}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2.5. Sincronización

En la presente sección, cuando hablemos de una función f , entenderemos que se trata de un endomor...simo que tiene un punto periódico de periodo q , x . Entonces para cualquier levantamiento F de f , existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{k}(t) = x$ y un entero $p_{F;t}$ que cumple

$$F^q(t) = t + p_{F;t}$$

Lema 5.1: Sean F y G levantamientos de f cuyo grado es $k = k(f)$. Entonces:

$$p_{G;t} \equiv p_{F;t} \pmod{\frac{1}{k} \frac{q}{k}}, \text{ si } k(f) \neq 1$$

$$p_{G;t} \equiv p_{F;t} \pmod{q}, \text{ si } k(f) = 1$$

Demostración:

Dado que F y G son levantamientos de f , entonces existe $c_{F,G} \in \mathbb{Z}$, tal que $G = F + c_{F,G}$.

Por el corolario 3.5.2 se tendrá:

I. Cuando $k(f) = 1$:

$$G^q(t) = F^q(t) + c_{F;G}q = t + p_{F;t} + c_{F;G}q.$$

Por otro lado, $G^q(t) = t + p_{G;t}$, por lo tanto $p_{G;t} \equiv p_{F;t} + qc_{F;G}$.

II. Cuando $k(f) \neq 1$:

$$G^q(t) = F^q(t) + c_{F;G} \frac{i_{1_i k^q}}{1_i k} = t + p_{F;t} + c_{F;G} \frac{i_{1_i k^q}}{1_i k}.$$

Por otro lado, $G^q(t) = t + p_{G;t}$, por lo tanto $p_{G;t} \equiv p_{F;t} + c_{F;G} \frac{i_{1_i k^q}}{1_i k}$.

Observación: La constante utilizada para la demostración del lema 5.1, es la misma constante por la que difieren los levantamientos G y F . A saber $c_{F;G}$.

Definición 5.2: Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ una función de la circunferencia con grado $k = k(f)$, y sean q y p enteros, satisfaciendo:

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{i_{1_i k^q}}{1_i k}, & \text{si } k \neq 1 \\ 0 < p < q, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Decimos que f tiene sincronización $q : p$ si existe una órbita periódica asintóticamente estable de periodo q , tal que, si F es un levantamiento de f , y x es cualquier punto de la órbita, entonces:

$$\begin{cases} p \equiv p_{F;t} \pmod{\frac{i_{1_i k^q}}{1_i k}} & \text{si } k \neq 1 \\ p \equiv p_{F;t} \pmod{q} & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Definición 5.3: Al número entero p determinado en la definición anterior, lo llamaremos la envolvencia de la órbita.

Intuitivamente este número, cuenta la cantidad de vueltas que la órbita periódica da a la circunferencia, a partir de algún punto de la órbita, hasta finalmente retornar al mismo punto.

La proposición siguiente, afirma que existe un único levantamiento F , para el cual $p_{F;t} = p$.

Proposición 5.1: Sea un f endomorfismo de la circunferencia con $k(f) = k$. f tiene una órbita periódica de período q , si y sólo si existe un único levantamiento F de f , tal que:

$$F^q(t) = t + p_{F;t} = t + p, \text{ pues } p = p_{F;t}$$

donde $\begin{cases} 0 < p < \frac{i_{1_i k^q}}{1_i k}, & \text{si } k \neq 1 \\ 0 < p < q, & \text{si } k = 1 \end{cases}$.

Demostración.

()

Es el regreso de la proposición 3.4

))

Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{4}(t) = x$, entonces:

$$f^q(\frac{1}{4}(t)) = \frac{1}{4}(t),$$

así para cualquier levantamiento F de f , se tendrá:

$$f^q(\frac{1}{4}(t)) = \frac{1}{4}(F^q(t)) = \frac{1}{4}(t),$$

Entonces: $F^q(t) = t + m_F$, así m_F lo podemos descomponer como:

$$m_F = p + c_F \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k}, \text{ con } 0 \cdot p < \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k}, \text{ si } k \neq 1$$

$$m_F = p + c_F q, \text{ con } 0 \cdot p < q, \text{ si } k = 1$$

de donde:

$$F^q(t) = t + m_F = t + p + c_F \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k}, \text{ con } 0 \cdot p < \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k}, \text{ si } k \neq 1$$

$$F^q(t) = t + m_F = t + p + c_F q, \text{ con } 0 \cdot p < q, \text{ si } k = 1$$

Consideremos otro levantamiento F_1 para f , entonces existe $c_{F_1} \in \mathbb{Z}$ tal que la podemos elegir como la c_F anterior, tal que:

$F_1 = F + c_{F_1}$, entonces:

$$(F_1)^q(t) = F^q(t) + c_{F_1} \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k} = t + p_F + c_{F_1} \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k} + c_{F_1} \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k} = t + p_F, \text{ si } k \neq 1$$

$$(F_1)^q(t) = F^q(t) + c_{F_1} q = t + p_F + c_{F_1} q + c_{F_1} q = t + p_F, \text{ si } k = 1$$

De modo que en cualquier caso $(F_1)^q(t) = t + p_F$, independientemente del grado de la función, por lo tanto F_1 satisface la condición buscada.

Sólo resta demostrar la unicidad de F_1

Supongamos que existe otro levantamiento F^2 , distinto de F_1 que cumple con la condición:

$$(F^2)^q(t) = t + p_F, \text{ con } 0 \cdot p_F < \frac{\mu_{1_i} k^q}{1_i k}, \text{ si } k \neq 1$$

$$(F^2)^q(t) = t + p_F, \text{ con } 0 \cdot p_F < q, \text{ si } k = 1$$

como $F^q = F^q + c_{F^q; F^q}$ con $c_{F^q; F^q} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (pues los levantamientos son distintos), entonces:

$$(F^q)^q(t) = F^q(t) + c_{F^q; F^q} \frac{1}{k} = t + p_{F^q} + c_{F^q; F^q} \frac{1}{k}, \text{ si } k \neq 1$$

$$(F^q)^q(t) = F^q(t) + c_{F^q; F^q} = t + p_{F^q} + c_{F^q; F^q}, \text{ si } k = 1$$

pero como $(F^q)^q(t) = t + p_{F^q}$, con $0 < p_{F^q} < q$, entonces:

$$t + p_{F^q} + c_{F^q; F^q} \frac{1}{k} = t + p_{F^q}, \text{ si } k \neq 1$$

$$t + p_{F^q} + c_{F^q; F^q} = t + p_{F^q}, \text{ si } k = 1$$

Implicando:

$$p_{F^q} + c_{F^q; F^q} \frac{1}{k} = p_{F^q}, \text{ cuando } k \neq 1$$

$$p_{F^q} + c_{F^q; F^q} = p_{F^q}, \text{ cuando } k = 1$$

Dado que $c_{F^q; F^q} \neq 0$, tendríamos que p_{F^q} no cumpliría la condición deseada.

Po lo tanto el levantamiento es único. }

Definición 5.4: Al levantamiento F que hace posible la proposición 5.1 lo llamaremos levantamiento mínimo.

Dados dos levantamientos, el resultado siguiente exhibe la relación existente entre la constante por la que difieren ellos y la cantidad de vueltas que recorre la órbita cuando se le asocia a cada uno de estos.

Proposición 5.2: Sean F y G levantamientos de f cuyo grado es $k = k(f)$. Si f es un punto periódico de periodo q , $x = \frac{1}{k}(t)$, tal que:

$$G^q(t) = t + p_{G;t}$$

$$F^q(t) = t + p_{F;t}$$

y

$$G^q(t) = F^q(t) + c_{G;F} \frac{1}{k}, \text{ si } k(f) \neq 1 \text{ ó}$$

$$G^q(t) = F^q(t) + c_{G;F} q, \text{ si } k(f) = 1$$

entonces:

$$C_{G;F} = \frac{i \cdot p_{G;t} \cdot p_{F;t}}{\left(\frac{1+i}{1+k}\right)^q}, \text{ cuando } k(f) \neq 1$$

$$C_{G;F} = \frac{i \cdot p_{G;t} \cdot p_{F;t}}{q}, \text{ cuando } k(f) = 1$$

Demostración:

A partir de las hipótesis, se tendrá:

$$\text{Para } k(f) \neq 1, G^q(t) = F^q(t) + C_{G;F} \cdot \frac{i \cdot 1_i \cdot k^q}{1_i \cdot k} \cdot t + p_{G;t} = t + p_{F;t} + C_{G;F} \cdot \frac{i \cdot 1_i \cdot k^q}{1_i \cdot k}$$

$$\text{Para } k(f) = 1, G^q(t) = F^q(t) + C_{G;F} \cdot q \cdot t + p_{G;t} = t + p_{F;t} + C_{G;F} \cdot q$$

de donde

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } k(f) \neq 1, p_{G;t} = p_{F;t} + C_{G;F} \cdot \frac{i \cdot 1_i \cdot k^q}{1_i \cdot k} \\ \text{Para } k(f) = 1, p_{G;t} = p_{F;t} + C_{G;F} \cdot q \end{array} \right\} C_{G;F} = \frac{i \cdot p_{G;t} \cdot p_{F;t}}{\left(\frac{1+i}{1+k}\right)^q}$$

$$C_{G;F} = \frac{i \cdot p_{G;t} \cdot p_{F;t}}{q}$$

Dado algún levantamiento G (y sus respectivos $p_{G;t}$), nos preguntamos si es posible encontrar el levantamiento mínimo. El siguiente corolario nos dice como se comportará la constante por la que difieren el levantamiento mínimo y el levantamiento dado G.

Corolario 5.2.1: Si en la proposición 5.2 F es el levantamiento mínimo, entonces:

$$\text{Para } k(f) \neq 1, \frac{i \cdot p_{G;t}}{\left(\frac{1+i}{1+k}\right)^q} \leq 1 \cdot C_{G;F} \cdot \frac{i \cdot p_{G;t}}{\left(\frac{1+i}{1+k}\right)^q}$$

$$\text{Para } k(f) = 1, \frac{i \cdot p_{G;t}}{q} \leq 1 \cdot C_{G;F} \cdot \frac{i \cdot p_{G;t}}{q}$$

Demostración:

Dado que F es el levantamiento mínimo se tiene: $F^q(t) = t + p_{F;t}$, donde:

$$0 \leq p_{F;t} \cdot \frac{i \cdot 1_i \cdot k^q}{1_i \cdot k}, \text{ si } k(f) \neq 1$$

$$0 \leq p_{F;t} \cdot q, \text{ si } k(f) = 1$$

entonces:

$$0 \leq \frac{i \cdot p_{F;t}}{\left(\frac{1+i}{1+k}\right)^q} \leq 1, \text{ si } k(f) \neq 1$$

$$0 \leq \frac{i \cdot p_{F;t}}{q} \leq 1, \text{ si } k(f) = 1$$

)

$$0 \leq i \leq \frac{p_{F;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) \neq 1$$

$$0 \leq i \leq \frac{p_{F;t}}{q} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) = 1$$

)

$$\frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq \frac{i \frac{p_{F;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) \neq 1$$

$$0 \leq i \leq \frac{p_{G;t}}{q} \leq i \leq \frac{p_{F;t}}{q} \leq i \leq \frac{p_{G;t}}{q} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) = 1$$

)

$$\frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq \frac{i \frac{p_{F;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) \neq 1$$

$$0 \leq i \leq \frac{p_{G;t}}{q} \leq i \leq \frac{p_{F;t}}{q} \leq i \leq \frac{p_{G;t}}{q} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) = 1$$

)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq C_{G;F} \leq \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) \neq 1 \\ \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq C_{G;F} \leq \frac{i \frac{p_{G;t}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}}}{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \leq i \leq 1, \text{ si } k(f) = 1 \end{array} \right\}.$$

La siguiente proposición nos provee de un algoritmo para calcular sincronizaciones, que será explicado en el primer capítulo de la segunda parte de la tesis. Tal algoritmo es utilizado en el software DIENTE DE SIERRA.

Proposición 5.3: Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ una función de la circunferencia y F un levantamiento de f , con $k(f) = k$. Entonces f tiene sincronización $q : p$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$F^m(t) \leq F^n(t) = p^0$$

$$m \leq n = q$$

con:

$$p \leq p \pmod{\frac{1_i k^q}{1_i k}} \text{ cuando } k \neq 1$$

$$p \leq p \pmod{q} \text{ cuando } k = 1$$

Demostración:

Para el caso cuando la función es de grado 1, ver Ref [2].

En el caso de que la función sea de grado distinto de 1, se conjetura por las proposiciones que se han venido mostrando en ésta sección que debería ser cierta.

3. Osciladores de Integración y Disparo

En varios campos de la ciencia, se estudian fenómenos los cuales exhiben comportamientos periódicos, pues después de cierta evolución retornan a sus condiciones iniciales. A tales comportamientos se les conoce como osciladores.

En algunos de ellos, es característico la existencia de algún proceso de acumulación, que lo lleva hasta alcanzar un umbral, inmediatamente después libera toda la energía acumulada, pero en un lapso de tiempo mucho menor que el tiempo requerido en el proceso de acumulación, repitiéndose este comportamiento una y otra vez de la misma forma.

A éste tipo de procesos se les conoce como osciladores de integración y disparo. Los cuales constituyen parte de una amplia gamma de otros, conocidos con el nombre de osciladores de relajación.

Existen fenómenos periódicos que pueden ser modelados con éste tipo de osciladores, los encontramos en dispositivos mecánicos, circuitos eléctricos no lineales y en economía entre muchos otros. En Geofísica, los geysers y los terremotos, son claro ejemplo de éste tipo de fenómenos, pues en ambos casos cierta cantidad de energía se va acumulando a lo largo de un tiempo característico para posteriormente liberarse, cuando ha alcanzado un cierto umbral, en un lapso de tiempo menor. En Fisiología, el comportamiento de las células nerviosas constituye también un ejemplo de tales fenómenos, como lo veremos posteriormente.

Examinaremos la respuesta a un forzamiento externo de una clase de osciladores de integración y disparo. La dinámica de los sistemas determinados por éste tipo de osciladores se puede conocer mediante las iteraciones de una función de la circunferencia.

3.1. Análisis del Comportamiento de las Células Nerviosas

El cerebro humano tiene unas 10^{11} células nerviosas llamadas neuronas. Aunque no hay dos neuronas idénticas, se categorizan según su forma determinando una morfología típica. Distinguiéndose: el cuerpo de la neurona o soma, las dendritas y el axon. Cuyas características son:

Soma: tiene una forma esférica o piramidal, contiene al núcleo de la célula, en cuyo interior actúan los mecanismos bioquímicos sintetizadores de enzimas y ocurren los demás procesos esenciales para la vida de la célula.

Dendritas: son los delgados brazos que se rami...can, formando una red que

rodea a la célula. Constituyen los canales físicos principales por los cuales la neurona puede recibir señales provenientes de otras células.

Axón: es una fibra cuya longitud puede variar entre milímetros y metros, y cuyo diámetro tiene entre una y veinte micras ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$). Es el camino por el cual viajan las señales que la neurona envía a otras partes del sistema nervioso.

Una neurona puede interactuar con otra en puntos llamados sinapsis. En las sinapsis las neuronas no se tocan físicamente, sino que dejan un pequeño espacio, llamado espacio intersináptico. La información es transmitida a lo largo de los axones en forma de pulsos eléctricos. Cuando la señal llega a una sinapsis se liberan agentes químicos, llamados neurotransmisores, que se difunden a través del espacio intersináptico.

El "disparo" de un impulso nervioso depende de la actividad simultánea de cientos de sinapsis en la neurona receptora. Algunas sinapsis son excitatorias, promueven que se dispare un impulso; otras son inhibitorias, cancelan las señales que de otra manera excitarían a la célula.

3.1.1. Excitabilidad

El impulso nervioso se desarrolla como respuesta a una estimulación eléctrica hasta alcanzar un cierto umbral. También se le conoce como potencial de acción. Suele originarse en el cuerpo celular en respuesta a la actividad de las sinapsis dendríticas. Al iniciarse, el voltaje a través de la membrana del axón aumenta localmente (en la base del axón).

El fundamento físico-químico del impulso nervioso está en las diferencias de concentración de sodio y potasio a ambos lados de la membrana. Esta situación crea una diferencia de potencial de aproximadamente -70 mV (milivolts), negativos con respecto al exterior de la célula, que se conoce como potencial de reposo. El fenómeno se observa midiendo la actividad eléctrica en un punto específico del axón, utilizando un osciloscopio. El paso de un impulso nervioso se manifiesta como un pico de voltaje: de -70 mV hasta aproximadamente $+40 \text{ mV}$, luego decrece hasta unos -90 mV y después recupera más lentamente el nivel original de -70 mV . Esta última etapa en la cual se recupera más lentamente es llamada período refractario y mientras dura no es posible que se registre otro pico de voltaje, sin importar la amplitud de la estimulación eléctrica. Todo el proceso dura de 1 a 2 milisegundos.

El potencial de acción es un mecanismo eficiente en términos de la transmisión de información ya que no permite que la señal se deforme o se amortigüe, pues

viaja con amplitud y forma ...jas. Por otro lado, el tamaño de la señal ($\gg 130$ mv) suprime los efectos del ruido, presente en forma de pequeñas fluctuaciones de los voltajes.

3.1.2. Respuestas Periódicas

Las neuronas son capaces de generar potenciales de acción con frecuencias muy diversas, desde sin disparos hasta varios cientos de disparos por segundo. Esto es muy relevante, pues todos los impulsos tienen la misma amplitud, y por lo tanto la información que transmite una neurona está representada por el número de señales por segundo que produce. Esta codificación por frecuencias implica que, por lo menos en algunos casos, un estímulo de mayor intensidad se traduce en una mayor frecuencia de disparo; ocurriendo espontáneamente (marcapasos neuronales), o en respuesta a una corriente constante aplicada, las células nerviosas pueden responder con un tren de potenciales de acción que se repite periódicamente. Se observa experimentalmente que la frecuencia de la respuesta es una función creciente de la intensidad del estímulo aplicado.

3.1.3. Modelos del Impulso Eléctrico

El Modelo de Hodgkin y Huxley (HH) Este modelo es el resultado de una combinación de experimentación y análisis teórico. Interesados en modelar los cambios de permeabilidad de la membrana, concibieron la existencia de poros o canales iónicos, constituidos a su vez por ciertas partículas hipotéticas. La dinámica de las corrientes iónicas a través de estos canales y del voltaje a través de la membrana es modelada por un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales.

Por este trabajo Hodgkin y Huxley obtuvieron el premio Nobel de fisiología en 1963. Si bien el modelo HH tiene limitaciones, ha contribuido a la modelación matemática en neurociencias.

El Modelo de FitzHugh-Nagumo(FHN) Intentando construir un modelo más simple que reflejara las características básicas del impulso nervioso, Richard FitzHugh (1968) formuló un sistema con sólo dos ecuaciones diferenciales que ha resultado muy útil para comprender los aspectos esenciales del fenómeno de excitabilidad.

Aunque FitzHugh originalmente derivó su modelo a partir del oscilador de Van der Pol, es posible también deducir sus ecuaciones haciendo simplificaciones

y límites biofísicos a partir del modelo de Hodgkin-Huxley. [Ref. 7 y 8]

A partir de este modelo FitzHugh logró interpretar el potencial de acción, el período refractario, el estado de reposo y otras características que son fácilmente identificables en términos de la geometría del espacio de fases (w vs v). El sistema constituye un modelo genérico del fenómeno de la excitabilidad de utilidad en diversos contextos de la ciencia y la ingeniería. Se conoce como el sistema de FitzHugh-Nagumo (FHN) porque este último también construyó y estudió, independientemente, un análogo electrónico de una neurona cuya dinámica obedece el mismo sistema de ecuaciones.

Existen analogías mecánicas de las neuronas biológicas con dispositivos en los que se pueden estudiar comportamientos del tipo "todo o nada".

Uno de los sistemas más simples que exhiben éste comportamiento, es el que describiremos en el presente capítulo, conocido también, en relación con la analogía mencionada, como "neurona mecánica".

3.2. Sistema Mecánico Simple

Supongamos que tenemos un "Sube y baja", en el cual de un lado existe un objeto cuyo peso, denotado por w_0 , es constante, y del otro lado un tanque de agua, cuyo peso, denotado por $w(t)$, es variable.

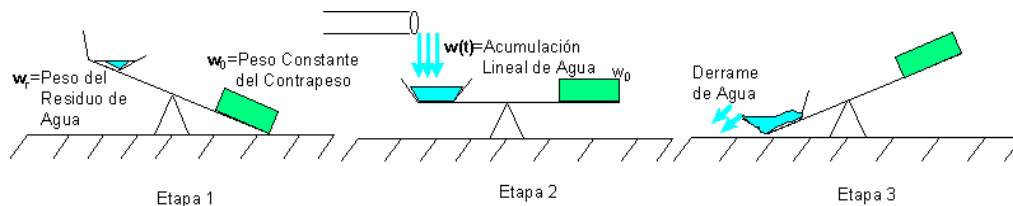


Fig. 3.1: Sistema Mecánico Simple

1) En la etapa inicial (Fig. 3.1 Etapa 1), el tanque posee cierta cantidad de agua, la cual representa el residuo de agua que permanece después de que el tanque se llena, baja y derrama el agua. Tal residuo de agua lo denotaremos por w_r .

2) Gradualmente el tanque se llena (Fig. 3.1 Etapa 2), lo que constituye el proceso de acumulación. Supongamos que dicho proceso ocurre linealmente, es

decir la caída de agua al tanque ocurre a una razón constante de m litros de agua por unidad de tiempo.

Conforme el tanque se llena, aumenta el valor de $w(t)$, hasta alcanzar un valor umbral w_0 , inmediatamente después, el peso del agua desequilibra al sistema, elevando al contrapeso.

3) Posteriormente, el agua del tanque se derrama rápidamente (Fig. 3.1 Etapa 3), hasta quedarse con el residuo de agua inicial.

Entonces, se vuelve a elevar el tanque para recibir más agua y reiniciar el proceso, que se repite periódicamente. En éste ejemplo, se puede apreciar como hay un largo tiempo de acumulación y una transición rápida, que al ...nal devuelve al sistema a su situación original.

El comportamiento de éste sistema mecánico, puede ser modelado matemáticamente de la siguiente manera: Al evolucionar dicho sistema, se mani...esta una sucesión de eventos que se alternan periódicamente:

A. Uno de ellos es, un proceso lento de acumulación, y

B. el otro, un proceso rápido de derrame de agua.

De acuerdo a la analogía de las neuronas biológicas, las variaciones del potencial de membrana de la célula queda simulado por las variaciones de la cantidad de agua en el recipiente del sube y baja; los potenciales de acción quedan representados por las descargas del recipiente.

Así, la dinámica de sistema estará descrita por la sucesión de tiempos $t_0; t_1; t_2; \dots; t_n; \dots$ en los cuales ocurre el derrame de agua del recipiente. Esta sucesión t_n es llamada la sucesión de tiempos de disparo del sistema.

3.2.1. Modelo Geométrico

Podemos dibujar la evolución del sistema en el plano $(t; w(t))$ (Fig. 3.2), de la manera siguiente:

Dado que el peso del contrapeso w_0 es constante, lo representamos mediante la recta horizontal $y = w_0$.

El peso del residuo de agua que permanece en el tanque w_r , también constante, lo representamos por $y = w_r$.

Imaginemos que nos encontramos en el tiempo t_n , y deseamos calcular el siguiente tiempo de disparo t_{n+1} .

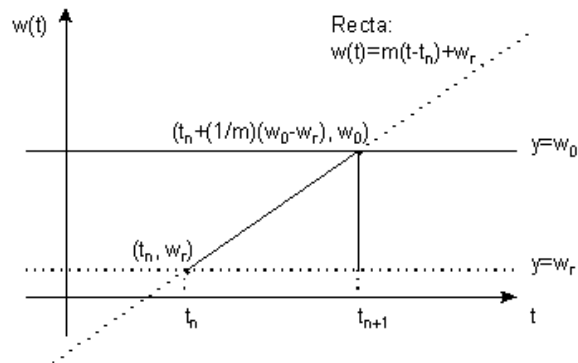


Fig. 3.2: Modelo Geométrico

Iniciando en t_n , el nivel de agua en el tanque tiene peso w_r . Representándolo geoméricamente por el punto $(t_n; w_r)$. Apartir de ahí, como $w(t)$ aumenta linealmente a razón m , lo representamos mediante una recta de pendiente m que pasa por el punto mencionado, dicha recta es:

$$w(t) = m(t - t_n) + w_r$$

Prolongando tal recta, hasta intersectar la recta horizontal w_0 , que representa el valor umbral constante, podemos encontrar el siguiente tiempo de disparo. Dicha intersección se obtiene al resolver la ecuación $w(t) = w_0$.

Para éste caso es posible resolverla. Pues:

$$w(t) = m(t - t_n) + w_r = w_0 \quad t = t_n + \frac{1}{m}(w_0 - w_r)$$

Así, el punto de intersección es: $(t_n + \frac{1}{m}(w_0 - w_r); w_0)$.

En el instante siguiente existe una caída rápida, la cual es dibujada mediante un segmento de recta vertical, que va desde la intersección que se tuvo hasta el punto $(t_n + \frac{1}{m}(w_0 - w_r); w_r)$, que representa la cantidad de residuo de agua que se tenía.

En consecuencia: $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{m}(w_0 - w_r)$, constituyendo el nuevo punto a partir del cual se repetirá el proceso una y otra vez.

La gráfica obtenida de ésta manera, es el modelo geométrico del sistema.

Con lo mencionado anteriormente, dada $t_0 \in \mathbb{R}$, podemos consideremos la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas iteraciones esta determinada por la regla $t_n = F^n(t_0)$, $n \in \mathbb{N}$, es decir la función F está dada por:

$$F(t) = t + \frac{w_0}{m} \cdot \frac{w_r}{m}$$

La función $F(t)$, generadora de la sucesión de disparos, es llamada función de disparos del sistema.

3.3. Sistema Mecánico con Nivel de Reposo Variable

Consideremos el sistema físico descrito anteriormente. Con la adición de un dispositivo mecánico que oscila de manera periódica, colocado bajo el tanque con agua.

De tal manera que cuando el "Sube y baja" oscila, la altura en la cual el tanque derrama su agua, estará determinada por la altura que en ese momento tenga el dispositivo mecánico. Dicha altura la llamaremos Nivel de Reposo.

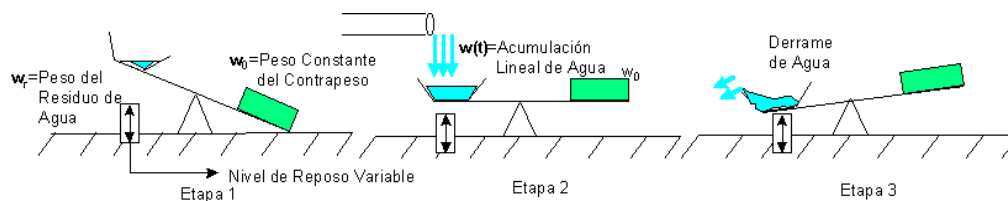


Fig. 3.3: Sistema Mecánico con Nivel de Reposo Variable

1) Conforme el tanque se llena (Fig. 3.3 Etapa 2), se incrementa linealmente el valor $w(t)$, hasta alcanzar un valor umbral w_0 , desequilibrando al sistema.

2) Inmediatamente después $w(t)$ cae hasta el Nivel de Reposo (Fig. 3.3 Etapa 3), momento en que el tanque derrama el agua y vuelve a ascender.

Posteriormente se vuelve a elevar el tanque, y a partir de ahora el proceso se repetirá.

3.3.1. Modelo Geométrico

Nuevamente la evolución del sistema la representamos en el plano $(t; w(t))$ (Fig. 3.4).

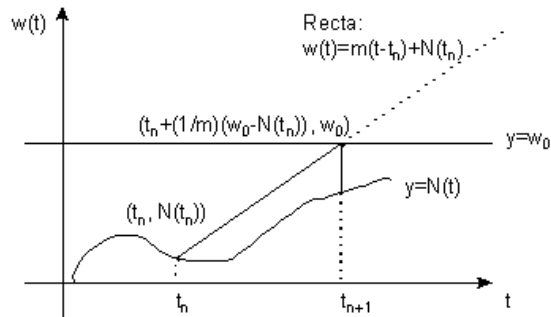


Fig. 3.4: Modelo Geométrico

Situándonos en el tiempo t_n , a partir de ahí trataremos de encontrar el tiempo t_{n+1} . Ahora:

- El peso del contrapeso constante w_0 , lo representaremos mediante la recta $y = w_0$.
- El nivel de reposo es variable $N(t)$, lo representamos mediante una función continua.

Así, en el tiempo t_n , nos encontramos geoméricamente en el punto $(t_n; N(t_n))$. A partir de ahí, como $w(t)$ aumenta linealmente con razón m , dicho incremento lo representamos por la recta de pendiente m que pasa por el punto dado.

Tal recta es: $w(t) = m(t - t_n) + N(t_n)$. Prolongándola hasta intersectar la recta horizontal w_0 , que representa el valor umbral constante, podremos encontrar el siguiente tiempo de disparo.

Dicha intersección se obtiene al resolver la ecuación $w(t) = w_0$. Para éste caso, también es posible resolverla. Pues:

$$w(t) = m(t - t_n) + N(t_n) = w_0 \Rightarrow t = t_n + \frac{1}{m}(w_0 - N(t_n))$$

De modo que el punto de intersección es $(t_n + \frac{1}{m}(w_0 - N(t_n)); w_0)$.

En el instante siguiente existe una caída rápida, la cual es dibujada mediante un segmento de recta vertical, que va desde la intersección que se tuvo hasta el

punto $(t_{n+1} = t_n + \frac{1}{m}(w_0 \text{ i } N(t_n)); N(t_{n+1}))$. Representando $N(t_{n+1})$ el residuo de agua que permanece en el tanque en ese momento.

Dicho punto, constituirá el nuevo punto a partir del cual se repetirá el proceso una y otra vez.

Aquí, la función de disparos es:

$$F(t) = t + \frac{w_0}{m} \text{ i } \frac{N(t)}{m} = t + k_1 + H(t)$$

donde $k_1 = \frac{w_0}{m}$ y $H(t) = \text{i } \frac{N(t)}{m}$.

3.4. Sistema Mecánico con Contrapeso Variable

Supongamos ahora que el peso del contrapeso es variable, denotándolo por $w_0(t)$.

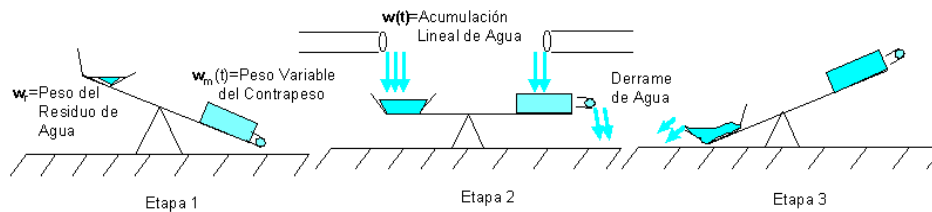


Fig. 3.5: Sistema Mecánico con Contrapeso Variable

Su modelación, la realizaremos de manera similar a las secciones anteriores.

1) Conforme el tanque se llena se incrementa linealmente el valor de $w(t)$ (Fig. 3.5 Etapa 2), hasta alcanzar un valor umbral variable $w_m(t)$, lo que ocasiona elevar al contrapeso variable.

2) Posteriormente $w(t)$ cae (Fig. 3.5 Etapa 3).

Al ...nal se vuelve a elevar el tanque para recibir más agua y reiniciar el proceso. A partir de ahora el proceso se repetirá de la misma manera.

3.4.1. Modelo Geométrico

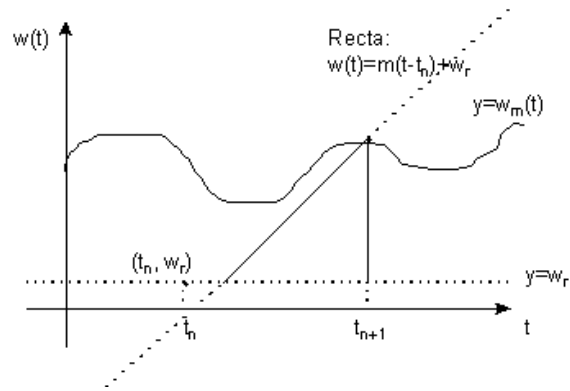


Fig. 3.6: Modelo Geométrico

Situándonos en el tiempo t_n , tratemos de encontrar el siguiente tiempo de disparo t_{n+1} . Ahora:

- $w_0(t)$ que es peso del contrapeso variable, lo representamos mediante una curva continua, y

- w_r que es el peso constante de agua existente de residuo, lo representamos por la recta $y = w_r$.

En el tiempo t_n , nos encontramos geoméricamente en el punto $(t_n; w_r)$. A partir de ahí, como $w(t)$ aumenta linealmente con razón m , ese aumento lo podemos representar mediante una recta de pendiente m . Dicha recta es: $w(t) = m(t - t_n) + w_r$.

Prolongando dicha recta hasta intersectar la gráfica de $w_0(t)$, que representa el valor umbral variable, obtenemos el siguiente tiempo de disparo.

Dicha intersección se obtiene al resolver la ecuación $w(t) = w_0(t)$. Para éste caso no es posible resolverla, pues:

$$w(t) = m(t - t_n) + w_r = w_0(t) \quad t = t_n + \frac{1}{m}(w_0(t) - w_r)$$

En el instante siguiente existe una caída rápida, la cual es dibujada mediante un segmento de recta vertical, que va desde la intersección que se tuvo hasta intersectar la recta w_r .

Tal punto, constituirá el nuevo punto a partir del cual se repetirá el proceso una y otra vez. En éste caso la relación de recurrencia implícita es de la forma:

$$F(t) = t + \frac{w_0(F(t))}{m} - \frac{w_r}{m} = t + k_2 + G(F(t))$$

$$\text{donde } k_2 = i \frac{w_r}{m} \text{ y } G(F(t)) = \frac{w_0(F(t))}{m}.$$

3.5. Sistema Mecánico Combinado

Este es el caso combinado de las secciones 2 y 3.

Supongamos que existe un dispositivo mecánico que oscila de manera periódica, colocado del mismo lado del tanque con agua, de tal manera que cuando el "Sube y baja" oscila, la altura en la cual el tanque con agua derrama su agua estará determinada la altura del Nivel de Reposo y por el peso del contrapeso.

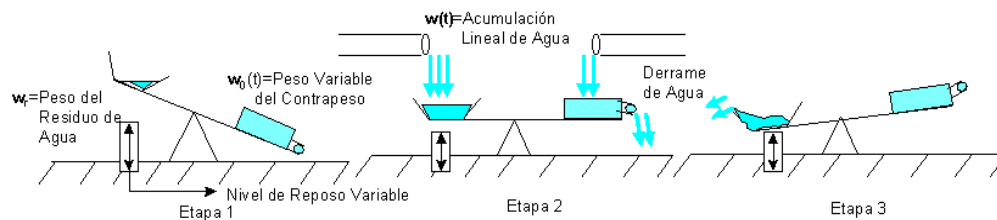


Fig. 3.7: Sistema Mecánico Combinado

1) Conforme el Tanque se llena (Fig. 3.7 Etapa 2), se incrementa el valor de $w(t)$ linealmente hasta alcanzar un valor umbral $w_0(t)$, lo que origina una elevación del contrapeso.

2) Inmediatamente después, $w(t)$ cae hasta el Nivel de Reposo (Fig. 3.7 Etapa 3).

Posteriormente se vuelve a elevar el tanque para recibir más agua, y a partir de ahora el proceso se repetirá de la misma manera.

3.5.1. Modelo Geométrico

Situados en el tiempo t_n , tratemos de encontrar el tiempo de disparo t_{n+1} .

Tanto el peso del contrapeso variable $w_0(t)$, como el nivel de reposo $N(t)$, lo representamos mediante curvas continuas.

En el tiempo t_n , nos encontramos situados en el punto $(t_n; N(t_n))$. A partir de ahí, como $w(t)$ aumenta linealmente con razón m , lo representamos mediante una recta de pendiente m . Dicha recta es: $w(t) = m(t - t_n) + N(t_n)$. Prolongando dicha

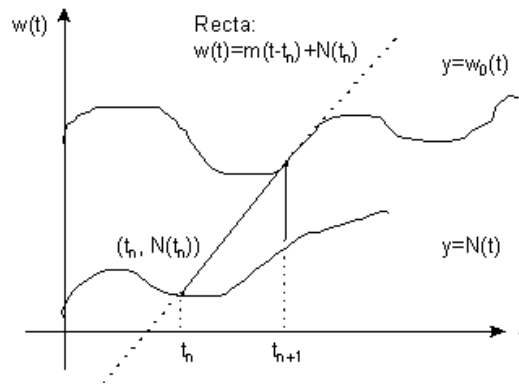


Fig. 3.8: Modelo Geométrico

recta hasta intersectar la gráfica de $w_0(t)$, que representa el valor umbral variable, podemos obtener el valor del siguiente tiempo de disparo. Dicha intersección, se obtiene al resolver la ecuación $w(t) = w_0(t)$. Pues:

$$w(t) = m(t - t_n) + N(t_n) = w_0(t) \quad t = t_n + \frac{1}{m}(w_0(t) - N(t_n))$$

En el instante siguiente existe una caída rápida, la cual es dibujada mediante un segmento de recta vertical, que va desde dicho punto de intersección, hasta intersectar el nivel de reposo del tanque de agua $N(t)$.

Este último punto, constituye el nuevo punto a partir del cual se repetirá el proceso.

La relación de recurrencia también está implícita, pues:

$$F(t) = t + H(t) + G(F(t)),$$

$$\text{donde } H(t) = \frac{N(t)}{m} \text{ y } G(F(t)) = \frac{w_0(F(t))}{m}.$$

3.6. Forzamiento Periódico

La sucesión de disparos codifica la respuesta del sistema al forzamiento.

En el caso de forzamiento periódico de periodo T , una importante simplificación en el análisis resulta al considerar, en lugar de la sucesión de tiempos de disparo t_n , la sucesión de fases de disparo fS_n , donde S_n es la clase residual de t_n módulo T .

A partir de cada condición inicial t_k , se da lugar a una sucesión de fases sucesivas de disparo. Esta no tiene toda la información que contiene la sucesión f_{t_n} , pero nos dice en que fases del ciclo del forzamiento ocurren los disparos del sistema.

Si la sucesión de disparo está definida para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de fases de disparo estará bien definida también para todo $n \in \mathbb{N}$, pero puede resultar finita (Caso periódico).

Se dice que el sistema tiene la propiedad de sincronización o respuesta sincronizada, si existe un abierto de tiempos iniciales t , para los cuales la sucesión de fases de disparo converge a una sucesión periódica. Si no hay sincronización, todas las sucesiones f_{S_n} , serán aperiódicas, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero.

La función de fases de disparo será definida por:

$$f : S^1 \rightarrow S^1 \\ S_n = [t_n]_i \rightarrow [F(t_n)].$$

Analizaremos los casos de las secciones 1 y 2, considerando forzamientos periódicos:

Caso del Sistema Mecánico Simple

Para $F(t) = t + k$, con $k = \text{cte}$, el sistema dispara periódicamente y modela un oscilador autónomo.

Dado que $F(t) = t + k \Rightarrow F(t+1) = t+1+k = t+k+1 = F(t)+1$, por lo que F resulta ser el levantamiento de una función de la circunferencia de grado 1.

Para éste caso, las funciones de la circunferencia estarán determinadas por la función de fases de disparo: $f(t) = t + k \pmod{1}$, que constituyen las rotaciones.

Caso del Sistema Mecánico con Nivel de Reposo variable

Para $F(t) = t + G(t)$, tenemos dos alternativas:

1. Si $G(t)$ es constante tenemos el caso del sistema mecánico simple.
2. Si $G(t)$ no es constante, se interpreta como el forzamiento del oscilador.

Suponiendo que $G(t)$ es periódico de grado 1 (i.e. $G(t+1) = G(t)$), nuestro interés será observar las propiedades de sincronización de los disparos con el periodo del forzamiento.

Dado que: $F(t) = t + G(t)$

$$\Rightarrow F(t+1) = t+1+G(t+1) \Rightarrow t+1+G(t) = t+G(t)+1 = F(t)+1,$$

es decir $F(t + 1) = F(t) + 1$.

De modo que F es el levantamiento de una función de la circunferencia de grado 1.

Veamos ahora un tipo de osciladores de integración y disparo que tiene como función de fase a la familia clásica de funciones de la circunferencia.

3.6.1. Oscilador Geométrico Asociado a la Familia de Arnold

Ya hemos descrito la relación recurrente para éste tipo de osciladores (Sistema Mecánico con Nivel de Reposos Variable):

Si $w_0 = \text{Cte}$ y $w_T(t) = j A \sin(2\omega t)$, entonces:

$$t_{k+1} = t_k + \frac{j w_0}{m} + \frac{j A}{m} \sin(2\omega t_k)$$

Si hacemos $a = \frac{j w_0}{m}$ y $b = \frac{j A}{m}$, tenemos que:

$$t_{k+1} = t_k + a + b \sin(2\omega t_k)$$

conocida como función de Arnold.

Los casos de los otros sistemas son complicados, pues sus expresiones son implícitas.

Nota:

La analogía de la neurona mecánica ha sido de gran importancia científ...ca. Gracias a los resultados que se han obtenido estudiando este modelo se han podido comprender distintas respuestas que la células pueden tener ante la aplicación de un estímulo periódico, así como las condiciones que dan lugar a cada una de ellas.

Teniendo en cuenta que el modelo de la neurona mecánica es el más sencillo que ha podido ser concebido, la investigación actual persigue el diseño y análisis de modelos más ricos y apegados a la realidad biofísica de la neurona pero que todavía sean tratables matemáticamente. En este sentido el modelo KHR [Ref. 6], en donde el potencial de la neurona crece de acuerdo a una ecuación diferencial (no necesariamente lineal) y no linealmente siguiendo un procedimiento geométrico como ocurre en la neurona mecánica.

4. Descripción del Software Diente de Sierra

No cabe duda que la computadora ha incursionado en casi todas las áreas del quehacer humano, en algunos casos sirve simplemente como un medio de transporte de la información, en otros tantos, como una herramienta imprescindible para acelerar y mejorar el avance en algún área; particularmente en Matemáticas la computadora tiene dos perspectivas de trabajo:

- a) la más común, es verla como un instrumento para apoyar alguna investigación (tanto en docencia como en algún problema teórico en particular), y
- b) la otra es considerar a la computadora como objeto de estudio.

Existen tres grupos de personas a las cuales les interesa conocer la documentación del programa, pues las necesidades de cada uno de ellos es distinta:

1. Usuarios: utilidad del programa,
2. Operadores: Datos de entrada y de salida, y
3. Programadores: Manual de mantenimiento del programa.

Para los objetivos de la tesis, sólo describiremos el programa para los Usuarios y Operadores.

4.1. Descripción del Programa Desde el Punto de Vista del Usuario

DIENTE DE SIERRA fue desarrollado pensando en apoyar la investigación de los sistemas dinámicos discretos en la circunferencia. Pues desde un ambiente gráfico sencillo de operar, permite analizar éste tipo de sistemas, usando diferentes formas de cálculo y visualización asociados a ellos. Cada uno de los cuales presenta una forma diferente de analizar al sistema, pero que tienen interrelación entre sí.

Con éste programa se puede estudiar la dinámica de una familia clásica de funciones de la circunferencia, conocida como la familia de Arnold:

$$f_{a;b}(x) = x + a + b \sin(2\pi x) \text{ mod } 1$$

Donde a y b son parámetros reales.

Esta familia codifica la dinámica de las fases de un tipo de osciladores de integración y disparo, como observamos en el capítulo 3.

Realizaremos la descripción, mencionando diferentes tópicos para el estudio de los sistemas dinámicos en la circunferencia.

4.1.1. Dinámica del Oscilador

Permite visualizar el comportamiento de los Osciladores de Integración (Acumulación) y Disparo, los cuales dan origen a funciones de la circunferencia. De modo tal que para conocer el comportamiento, ya sea del oscilador o del sistema dinámico generado por la función de la circunferencia, bastará con conocer el comportamiento de alguno de los dos, para poder inferir comportamiento del otro.

Con el objeto de observar el comportamiento de osciladores distintos, puede variarse el umbral y la amplitud del forzamiento.

Apartir de una posición inicial elegida, permite llevar a cabo disparos hacia adelante o hacia atrás, asociados al comportamiento futuro o pasado del oscilador.

4.1.2. Dinámica en la Circunferencia

Mediante las iteraciones de la función que gobiernan al sistema, podemos conocer las órbitas, ya sean positivas, mediante el uso de la función directa ó negativas utilizando la función inversa.

Através de dichas iteraciones, para cada punto, podemos conocer el destino futuro de las órbitas u omega límite. De modo similar su origen o alfa límite.

En caso de no tener forma explícita de calcular la inversa, se recurre al uso de algoritmos numéricos para aproximarla.

4.1.3. Dinámica en el Toro Plano

La ...nalidad de dibujar la grá...ca de la función aquí, es apreciar de forma clara y sencilla el comportamiento de las órbitas, que al intentar observarlas en la super...cie del toro en \mathbb{R}^3 .

Permite analizar comportamientos del sistema, a partir de:

- 1) Diferentes condiciones iniciales, y
- 2) Distintos valores de los parámetros.

Con dicho análisis se puede:

a) Observar comportamientos futuros y pasado. En éste último caso se utilizan métodos numéricos.

b) Apreciar las distintas formas geométricas que pueden adoptar las órbitas. Donde posiblemente. Dichas formas posiblemente sea un camino para establecer un orden en éste tipo de sistemas.

4.1.4. Levantamientos

Su finalidad es observar el comportamiento de la función de la circunferencia, a través de una función real de variable real.

Al igual que en el Toro Plano, permite analizar comportamientos del sistema, con:

- 1) Diferentes condiciones iniciales, y
- 2) Distintos valores de los parámetros.

Pero ahora con la función real de variable real.

4.1.5. Bifurcaciones

Este tipo de diagramas, permite visualizar el comportamiento del sistema, cuando nos movemos en la dirección de uno de los parámetros, dejando fijos los demás. Observándose regiones caóticas y de estabilidad.

Para el análisis cualitativo de cualquier sistema, bastará con observar éste tipo de diagramas para inferir la complejidad del mismo.

4.1.6. Lenguas del Sistema Paramétrico

Este tipo de bifurcaciones son propios de sistemas en la circunferencia, pues involucran conceptos sólo de dichos sistemas, tal como el concepto de: Envolvencia.

Permiten visualizar la solución de la cuestión siguiente:

¿Para que valores en el espacio de parámetros del sistema, se tienen órbitas de periodo q y envolvencia p ?

De manera natural, el usuario de DIENTE DE SIERRA encuentra dos opciones de trabajo:

I) Desarrollar tutoriales como apoyo para la docencia en sistemas dinámicos discretos en la circunferencia, y

II) Concentrar su atención en las características de la dinámica de este tipo de sistemas. Pues se han podido encontrar algunas ideas que relacionan Sistemas Dinámicos, Teoría de Números y Geometría.

4.1.7. Requerimientos de Hardware

Para el buen funcionamiento de DIENTE DE SIERRA, se recomienda como mínimo:

1. Una computadora 386, pero que tenga un coprocesador matemático.
2. De preferencia contar con 4 Mgs de RAM en memoria.

3. Contar como mínimo con una velocidad de 40 MHz. La velocidad es importante pues algunos diagramas requieren enorme cantidad de cálculo para su gra...cación.

4. Se debe de tener en cuenta que, al proporcionar una presentación que abarque toda la pantalla de la máquina, de cualquier tópico, se requiere almacenar las imagenes anteriores. Para ello se crea un archivo con extensión tmp. Razón por la cual es necesario tener disponible en disco 162720 bytes.

5. Es recomendable tener un monitor a color, de preferencia VGA, para visualizar correctamente cada uno de los diagramas elaborados.

6. Se debe tener un mouse, pues el funcionamiento del programa lo requiere.

4.2. Descripción de los Algoritmos Utilizados en el Programa

Una de las cosas que más interesa conocer al observar diversos fenomenos, generalmente son magnitudes cuantitativas, es decir, resultados numéricos. Todos los cálculos se realizan con números, por eso los resultados siempre tienen, en principio, un caracter aproximado. No es posible evitarlo, y lo que importa, es lograr que los errores queden en los límites de la exactitud necesaria.

Así pues, vemos que para resolver un problema matemático es importante indicar un sistema de reglas, que de una sucesión estricta de operaciones matemáticas que lleven al resultado buscado. Tal sistema de reglas se denomina algoritmo.

Existen algoritmos cuyo resultado no es posible obtenerlo apartir de una relación explícita. Para tales algoritmos se procede de la manera siguiente:

1. Se contruye un proceso in...nito que converge con la solución buscada.

2. El proceso se interrumpe en un paso (los cálculos no pueden continuarse in...nitamente), y el valor obtenido, se considera aproximadamente como la solución del problema considerado. La convergencia del proceso garantiza que, para cualquier exactitud dada, se encontrará un cierto número de pasos N , tal que el error en la determinación del problema no sea mayor que la exactitud dada en este paso.

Las palabras "solución aproximada" no deben interpretarse como "solución de segunda calidad". Debe tenerse presente que en las investigaciones, la solución exacta de un problema matemático da, sin embargo, resultados aproximados para un objeto de estudio. Pues el modelo matemáticos es una simpli...cación del mundo real.

El problema al aplicar algoritmos que utilizan el proceso convergente in...nito, no consiste en el carácter aproximado del resultado, sino en los voluminosos cál-

culos que se necesitan.

No es casual que tales algoritmos se llamen habitualmente algoritmos de cálculo y los métodos de resolución de los problemas matemáticos que se basan en ellos, métodos numéricos.

La amplia aplicación de los algoritmos de cálculo, se hizo posible sólo gracias a las computadoras. Antes de su aparición, los métodos numéricos se utilizaban rara vez, y solamente en los casos relativamente simples, pues el cálculo manual es extraordinariamente tedioso.

Por razones ya mencionadas, hemos utilizado algoritmos y métodos de cálculo en la construcción de DIENTE DE SIERRA.

Los algoritmos utilizados se escribieron en el lenguaje C++ con aritmética de doble precisión. Cada uno ellos, está diseñado para funcionar con cualquier función que se pueda definir en la circunferencia.

Los métodos numéricos utilizados, sirvieron como punto de partida para entender los problemas a que uno se enfrenta al analizar sistemas dinámicos generados por funciones de la circunferencia.

Los problemas encontrados, dan una confirmación de la complejidad: Sistemas simples pueden mostrar un comportamiento complejo, e inversamente, sistemas no lineales en apariencia complejos, pueden mostrar un comportamiento regular.

4.2.1. Métodos para Calcular Funciones Inversas

Contamos con 3 métodos para calcular la inversa de la función de la circunferencia:

1. Método de Punto Fijo

El objetivo de éste método, es determinar la solución de una ecuación que se expresa, para alguna función g , en la forma:

$$g(x) = x.$$

Y donde la solución, es llamado punto fijo de la función g .

Si para cualquier g , se puede encontrar un punto fijo, entonces cada problema de búsqueda de raíces podrá también ser resuelto.

Por ejemplo el problema de búsqueda de raíces de $f(x) = 0$, tiene soluciones que corresponden a los puntos fijos de $g(x) = x - f(x)$.

Para poder garantizar el buen funcionamiento del método, la función g necesita satisfacer algunas condiciones, tales como:

- Si $g \in C[a; b]$ (Clase de funciones continuas en $[a; b]$), y $g(x) \in [a; b] \forall x \in [a; b]$, entonces g tiene un punto fijo en $[a; b]$.

- Si además, $g'(x)$ existe en $(a; b)$, entonces g tiene un punto fijo único en $[a; b]$.
 Para aproximarse al punto fijo de la función g , se procede de la manera siguiente:

- i. Elegimos una aproximación inicial, x_0 .
- ii. Generamos la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, considerando $x_n = g(x_{n-1})$ para cada $n \geq 1$: Si la sucesión converge a x y g es continua, entonces:
 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = g(x)$, por lo que $x = g(x)$.

2. Método de Newton-Raphson

Es uno de los métodos más poderosos para la resolución del problema de búsqueda de raíces.

Para garantizar el buen funcionamiento del método, es necesario que la función $f \in C^2[a; b]$ (es la clase de funciones continuamente diferenciables 2 veces en $[a; b]$).

Para aproximarse a la raíz de f , se procede así:

- i. Elegimos una condición inicial, x_0 .
- ii. Generar la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, con $n \geq 1$.
- iii. Verificar que $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$.

Si es así, el método se completa en ese momento; en caso contrario seguir con la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, hasta agotar la cantidad de iteraciones realizadas, en cuyo caso el método no cumple con su objetivo.

3. Método de Steffensen

Es un método de convergencia acelerada, para la solución de $g(x) = x$.

Supongase que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es cualquier sucesión que converge linealmente a un límite x .

Sea $x_n^s = x_n - x \in \mathbb{R}$; $\delta_n \geq 0$, entonces la sucesión $\{x_n^s\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x más rápidamente que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, en el sentido que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^s - x}{x_n - x} = 0$.

Para encontrar tal aproximación, seguiremos los pasos siguientes:

- i. Elegimos una condición inicial x_0^s .
- ii. Considerando $x_1^s = g(x_0^s)$ y $x_2^s = g(x_1^s)$ podemos generar la sucesión $\{x_n^s\}_{n=0}^{\infty}$ dada por:

$$x_n^s = x_0^s - \frac{(x_1^s - x_0^s)^2}{x_2^s - 2x_1^s + x_0^s}.$$

- iii. Si $|x_n^s - x_{n-1}^s| < \epsilon$, termina; en caso contrario se hace $x_0^s = x_{n-1}^s$, y el proceso se repite, hasta agotar una cantidad determinada de iteraciones.

Describiremos ahora el método utilizado para calcular el número de rotación y la sincronización del sistema.

4.2.2. Algoritmo de Cálculo para el Número de Rotación

Las etapas consideradas fueron:

1. Información de Entrada:

Condición inicial, x_0 .

Cantidad de iteraciones a realizar.

2. Se evalúa la condición inicial en la función iterativamente.

3. El valor de la última evaluación realizada se divide entre la cantidad de iteraciones:

$$\frac{F^n(x_0)}{n}$$

4. Del valor obtenido en 3, se considera sólo su parte fraccionaria:

$$\frac{F^n(x_0)}{n} \bmod(1)$$

5. Logicamente se tendrá una mejor aproximación en el número de rotación, si la cantidad de iteraciones es mayor, pues se acercaría a la definición de dicho número:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_0)}{n} \bmod(1)$$

4.2.3. Algoritmo para Calcular Bifurcaciones

El objetivo es poder detectar zonas de estabilidad del sistema.

Bifurcación generada por la Función Directa Los etapas consideradas fueron:

1. Elegir el parámetro que varia.

2. Establecer los límites y la longitud de paso de dicho parámetro.

3. Establecer la cantidad de iteraciones a realizar, y establecer cuantas de esas iteraciones se deben pintar, de preferencia las últimas.

4. Establecer el orden de iterada de la función.

5. Llevar a cabo las iteraciones de la función, considerando sólo las partes fraccionarias positivas de tales iteraciones.

6. Almacenando en un arreglo sólo las últimas y pintarlas.

Bifurcación generada por la Inversa de la Función Las etapas consideradas fueron:

1. Elegir el parámetro que varia.
2. Establecer los límites y la longitud de paso de dicho parámetro.
3. Establecer la cantidad de iteraciones a realizar, y establecer cuantas de esas iteraciones se deben pintar, de preferencia las últimas.
4. Establecer el orden de iterada de la función.
5. Elegir algún método numérico adecuado.
6. Llevar a cabo las iteraciones de la inversa, considerando sólo las partes fraccionarias positivas.
7. Almacenando en un arreglo sólo las últimas y pintarlas.

4.2.4. Cálculo del Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^i}{dx} \right|$$

es una medida importante para detectar la zonas de sensibilidad del sistema, en la dirección de algún parámetro elegido.

Exponente de Lyapunov de la Función Directa Las etapas consideradas fueron las siguientes:

1. Elegir el parámetro que varia.
2. Establecer los límites y la longitud de paso de dicho parámetro.
3. Establecer la cantidad de iteraciones a realizar y el orden de iterada.
4. Llevar a cabo las iteraciones de la función, quedandonos sólo con la parte fraccionaria positiva de tales iteraciones.
5. Evaluar dichas partes fraccionarias positivas en la derivada de la correspondiente iterada de la función, esto cumpliría con la parte de:

$$\left| \frac{df^i}{dx} \right|$$

6. Verificar si alguna de éstas evaluaciones negativa; Si lo es, entonces, cambiar el signo. Inmediatamente después, examinar si el valor positivo es diferente de cero:

Si lo es, calcular el logaritmo de ese resultado, esto cumpliría con la parte:

$$\ln \frac{df^i}{dx}$$

En caso contrario, evaluar otra parte fraccionaria.

7. Se suman las evaluaciones de los logaritmos, para cumplir con:

$$\prod_{i=0}^{n_i-1} \ln \frac{df^i}{dx}$$

8. Por último, el resultado obtenido en 7, se divide entre la cantidad de iteraciones, con lo que se cumpliría:

$$\frac{1}{n} \prod_{i=0}^{n_i-1} \ln \frac{df^i}{dx}$$

logicamente se tendrá mayor con...abilidad en la determinación de éste número, si la cantidad de iteraciones realizadas es mayor. Pues se aproximaría cada vez más a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{i=0}^{n_i-1} \ln \frac{df^i}{dx}$$

Exponente de Lyapunov de la Inversa de la Función Las consideraciones fueron las siguientes:

1. Elegir el parámetro que varía.
2. Establecer los límites y la longitud de paso del parámetro que varia.
3. Establecer la cantidad de iteraciones a realizar y el orden de iterada.
4. Elegir algún método numérico adecuado, para calcular las imagenes inversas.
5. Realizar las iteraciones de la inversa de la función, a través del método numérico elegido en el paso anterior, quedandose sólo con la parte fraccionaria positiva de tales iteraciones.
6. Evaluar tales partes fraccionarias positivas en las derivadas de la función directa, de la manera siguiente:

Dado que $f^{i-1}(f(x)) = x$, calculando su derivada se tiene:

$$(f^{i-1})'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{i-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Si hacemos $y_k = f(x)$) $x = f^{-1}(y_k)$; al cual llamaremos y_{k+1} , es decir $y_{k+1} = f^{-1}(y_k)$, por lo tanto: $y_{k+1} = x$. Entonces:

$$(f^{-1})^0(y_k) = \frac{1}{f^0(y_{k+1})}$$

A partir de esta última expresión, realizamos las evaluaciones.

7. Posteriormente, seguimos los mismos pasos que en el caso anterior. Solo que ahora con la inversa de la función.

4.2.5. Cálculo de Bifurcaciones en Sistemas Biparamétricos (Lenguas de Arnold)

El objetivo es calcular sincronizaciones $q : p$, aún cuando los parámetros determinen que la función no es homeomor...smo.

La Información de Entrada requerida es:

1. Proporcionar las sincronizaciones $q : p$, para observar en que valores de los parámetros (establecidos en el eje X, y en Y), digamos a y b, el sistema posee esa sincronización.

2. Elegir el par de parámetros que variarán.

3. Definir los límites de dichos parámetros asociados a los eje X e Y, así como, determinar la longitud de paso en cada una de las direcciones.

4. Cantidad de iteraciones a realizar.

5. El orden de iterada de las funciones.

6. Tolerancia para la exactitud deseada.

7. Determinar el incremento de la variable, para realizar un barrido de condiciones iniciales, iniciando desde el valor mínimo en la dirección del eje X, hasta el máximo en dicha dirección.

Con tal información de entrada, describiremos el proceso para calcular las sincronizaciones.

Tal descripción que haremos de cada una de las etapas consideradas, se encuentra anidada, es decir la primer etapa abarca a todos los demás, la siguiente a los restantes, y así sucesivamente, hasta llegar a la última etapa, la cual se encuentra contenida en todas las etapas anteriores.

Etapas 1: Hacer variar el parámetro asociado al eje X, iniciando en el límite inferior establecido, hasta su límite superior, con la longitud de paso establecida.

Etapas 2: Hacer variar el parámetro asociado al eje Y, iniciando en el límite inferior establecido, hasta su límite superior, con la longitud de paso establecida.

Etapa 3: Realizar un barrido de condiciones iniciales, dentro de los límites establecidos en la dirección del eje X, con el incremento de la longitud de paso establecida especialmente para esta etapa.

Etapa 4: Realizar las iteraciones de la función, e ir las almacenando en un arreglo.

Etapa 5: Revisar el cumplimiento del algoritmo que calcula las sincronizaciones, a saber:

$$\begin{aligned} m \neq n &= q \\ f^m \neq f^n &= p \end{aligned}$$

El cumplimiento del algoritmo se realizó así:

- Iniciando con $m = 1$, hasta la cantidad de iteraciones indicadas, m es incrementada en una unidad, cada vez que se pasa por este punto.

- Recorrer cada una de las sincronizaciones establecidas. Si m es menor que el valor de q de la correspondiente sincronización $q : p$ continuar en la siguiente sincronización. Si no, entonces hacer $n = m + q$ para la correspondiente q establecida.

- Verificar si $f^m \neq (f^n + p) \cdot TOL$, para alguna p establecida por la sincronización.

Si la respuesta es afirmativa, entonces verificar el cumplimiento de la condición $[f^m] \neq [f^n] = p$, en caso de cumplirse, entonces se ha cumplido las condiciones del algoritmo, por lo que se procede a pintar el punto.

Capítulo 5: Manual del Usuario

5.1. Introducción

Un problema fundamental para el estudio de osciladores acoplados, es el de estudiar las diferentes formas de respuesta que tiene un sistema oscilante cuando actúa, unilateralmente, sobre él un forzamiento periódico. El escenario más simple donde se puede estudiar este fenómeno es el de los osciladores geométricos de integración y disparo, también llamados osciladores de “**Diente de Sierra**”.

DIENTE DE SIERRA ha sido desarrollado para apoyar el estudio de la respuesta sincrónica y caótica de una clase de osciladores geométricos de diente de sierra, cuya dinámica esta codificada por la Familia Clásica de Sistemas Dinámicos en la Circunferencia, también llamada la “Familia de Arnold”.

Se trata de una herramienta visual-interactiva que soporta distintas formas de análisis matemático de tales osciladores forzados. Dicho análisis se basa en la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Con *DIENTE DE SIERRA* el usuario puede realizar diferentes tipos de cálculos numéricos, así como representaciones gráficas, que son útiles para estos estudios.

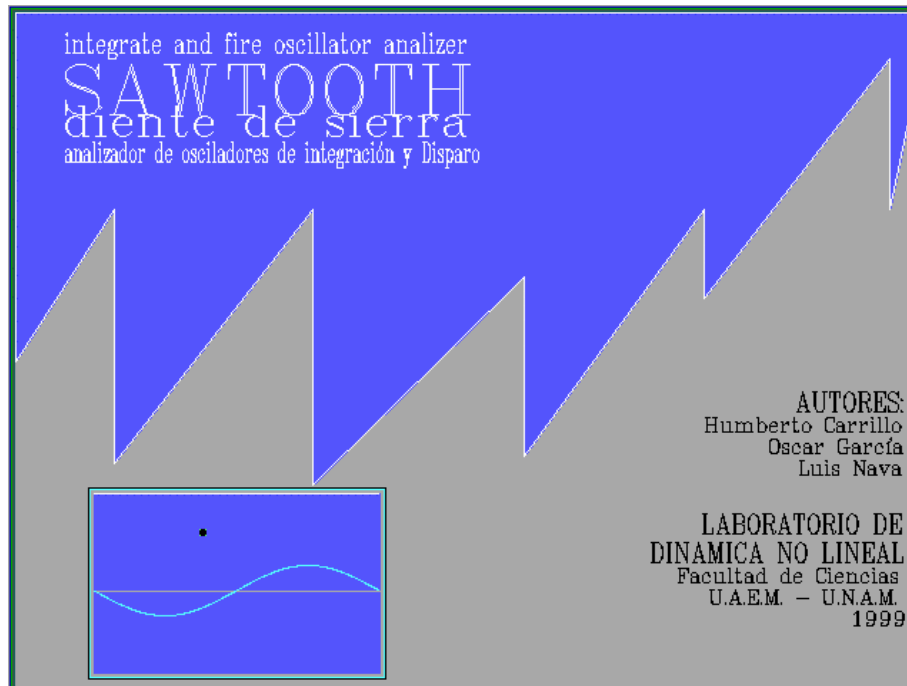
DIENTE DE SIERRA permite, por ejemplo:

- El cálculo de: tiempos y fases de disparos, el número de rotación, el exponente de Lyapunov y sincronizaciones.
- El cálculo y visualización de iteraciones en la circunferencia, en el plano, en el toro, así como de varios tipos de diagramas de bifurcación.

5.2. Descripción Panorámica de *DIENTE DE SIERRA*

5.2.1. Pantalla de Presentación

Al iniciar el programa aparece la pantalla de presentación.



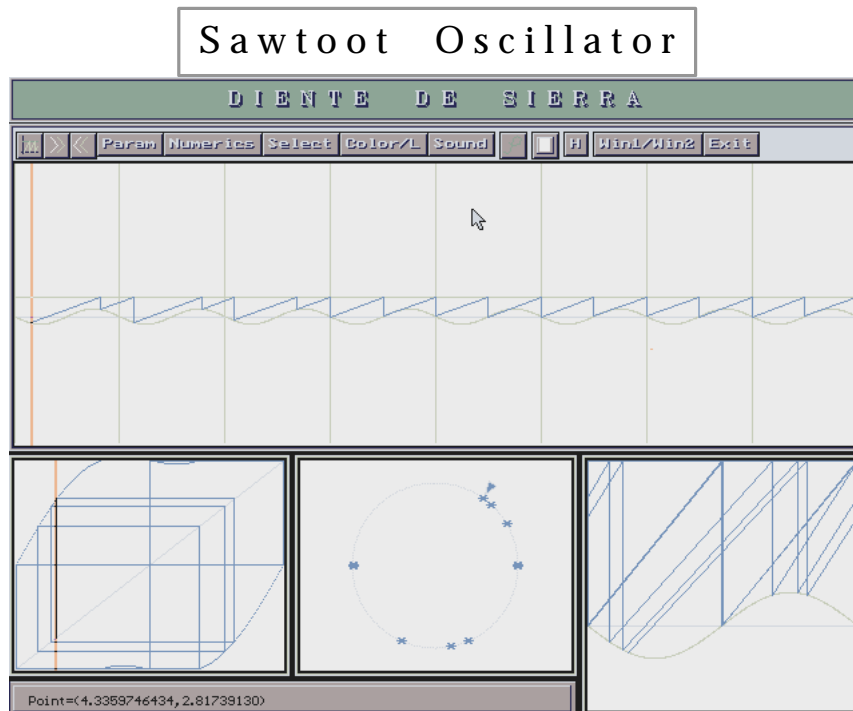
Pantalla de Presentación

5.2.2. Formatos de Pantalla y Escenarios Gráficos

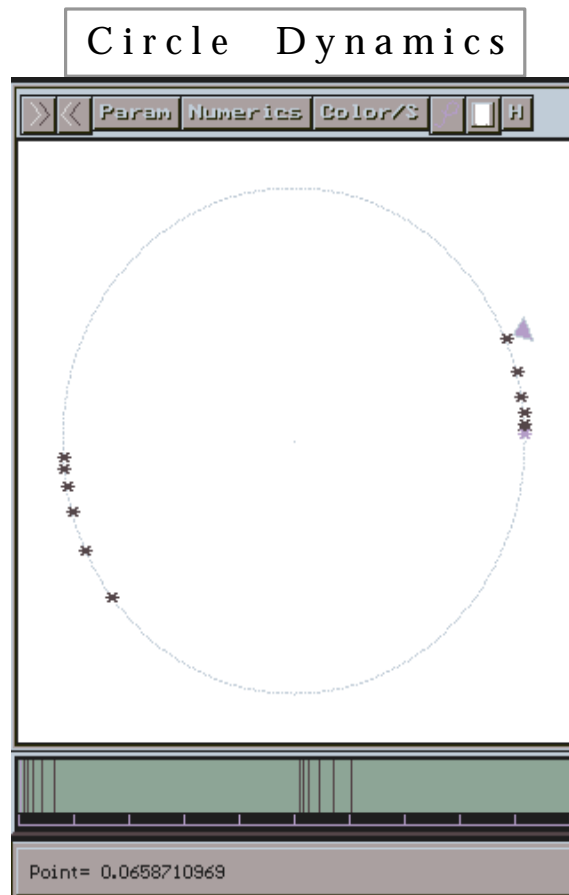
DIENTE DE SIERRA nos ofrece la opción de trabajar en 7 distintos escenarios gráficos de trabajo, a los cuales les hemos dado los siguientes nombres:

- **Sawtooth Oscillator**
- **Cilinder**
- **Circle Dynamics**
- **Torus Dynamics**
- **Lifts**
- **Bifurcations**
- **Tongues**

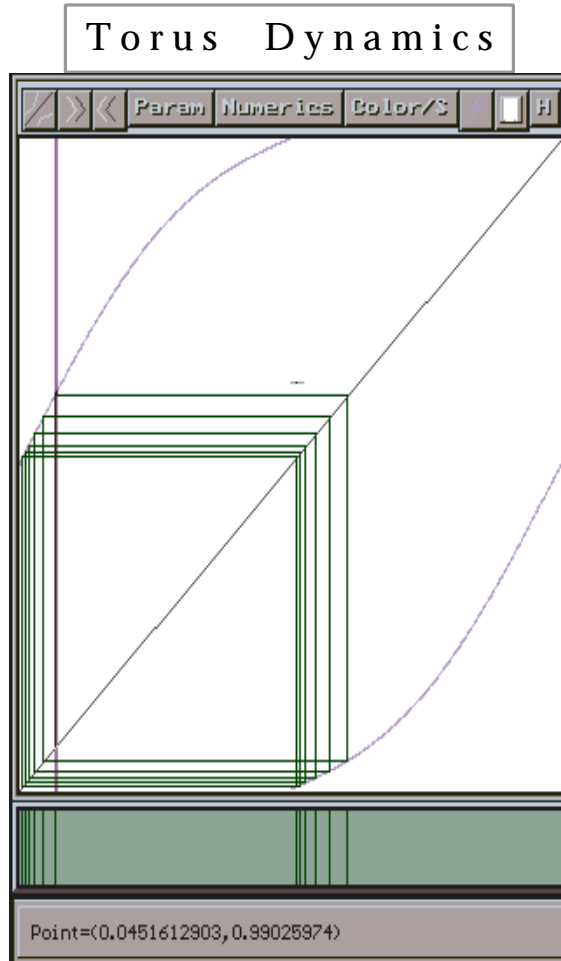
A continuación mostraremos una imagen de cada uno de estos escenarios:



Pantalla mostrando el Oscilador de Diente de Sierra simultáneamente en varios escenarios

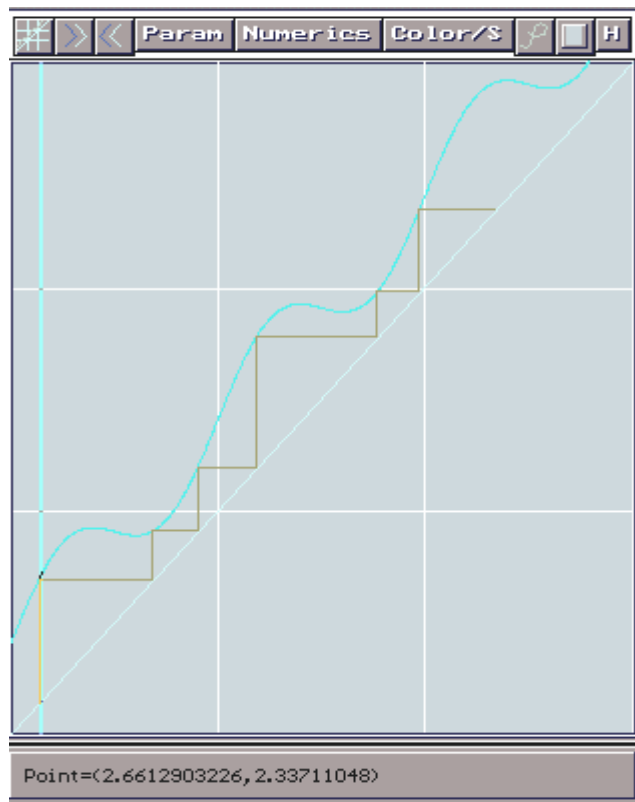


Muestra las iteraciones de la función de la circunferencia asociada al oscilador de diente de sierra



Muestra las gráficas de las funciones de la Circunferencia en el espacio llamado Toro Plano. Estas funciones determinan las fases de disparo del oscilador

Lifts



Se visualiza la dinámica de los levantamientos mediante las iteraciones de la función de disparo (función real de variable real), asociada a la función de la Circunferencia

Bifurcations

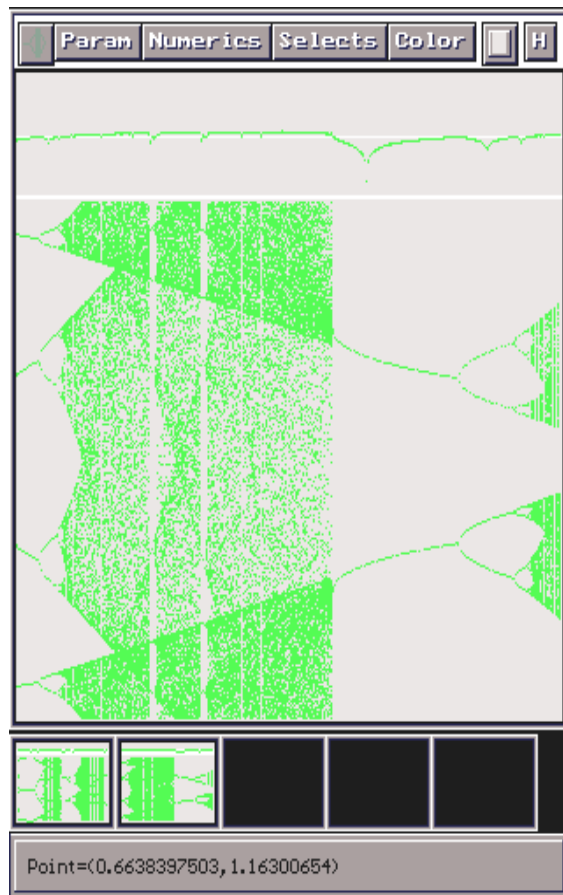
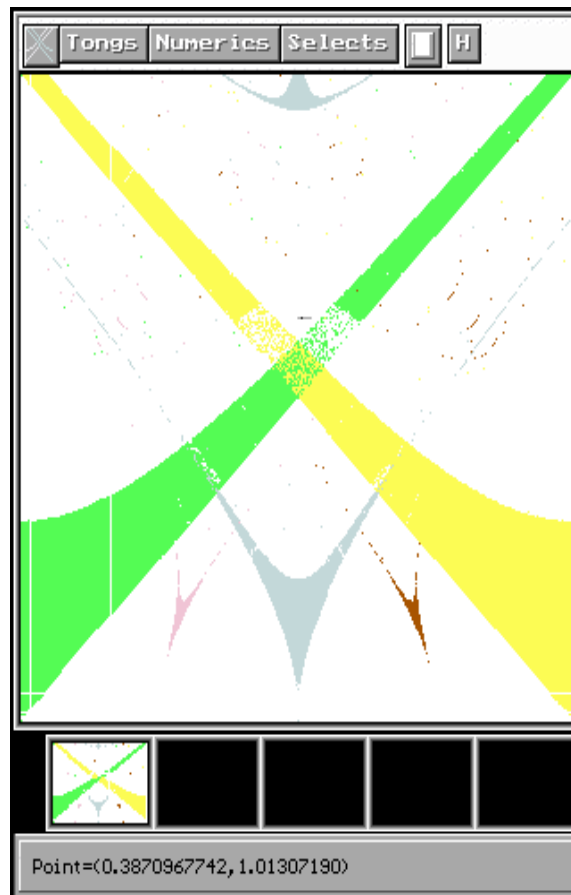


Diagrama de Bifurcación y Gráfica del Exponente de Lyapunov variando un parámetro, manteniendo fijos los demás

Tongues



Lenguas de Arnold y Regiones de Sincronización
Muestra las bifurcaciones en un espacio de 2 parámetros

Con estos escenarios gráficos se puede trabajar en tres formatos diferentes:

- **Formato de Cuatro Ventanas de Visualización**
- **Formato de Dos Ventanas de Visualización**
- **Formato de Única Ventana de Visualización**


5.2.2.1. Formato de Cuatro Ventanas

Este es el formato de la primera pantalla de trabajo, es decir, el primero que aparece (al presionar el botón izquierdo del mouse) después de la portada del programa. Incluye cuatro ventanas donde se visualizan simultáneamente los escenarios gráficos:

- **Sawtooth Oscillator**
- **Circle Dynamics**
- **Torus Dynamics**
- **Cilinder**

La ventana del escenario **Sawtooth Oscillator**, permite el control de las demás, los cálculos que se efectúen en ésta ventana, se realizarán y desplegarán automáticamente en las otras. En la parte superior de esta ventana hay una barra de iconos para controlar el cálculo y el despliegue gráfico.

5.2.2.2 Formato de Dos Ventanas

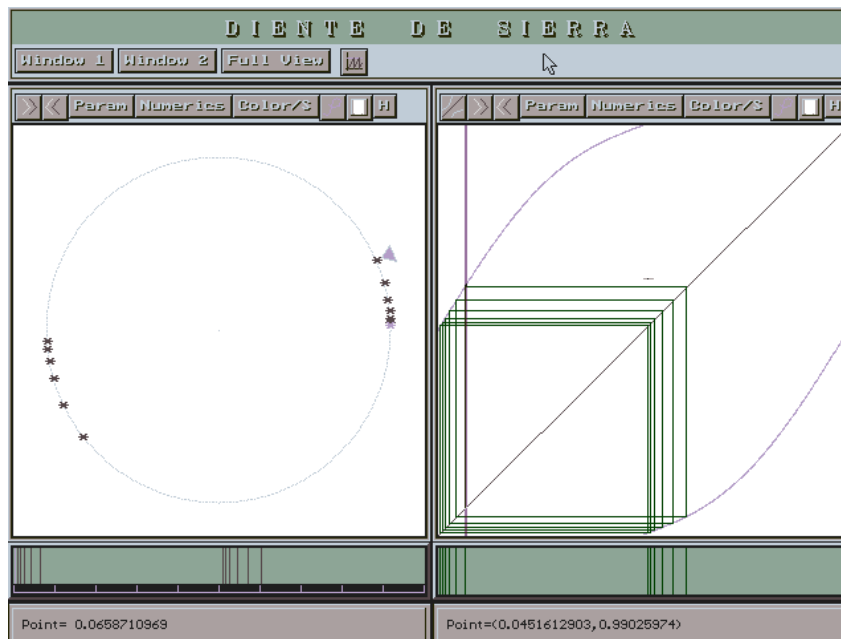
Presionando el botón izquierdo en el icono  se divide la pantalla en 2 partes, mostrando un segundo tipo de formato que se permite utilizar. Pudiéndose observar, simultáneamente, dos cualesquiera de los siguientes cinco escenarios:

- **Circle Dynamics**
- **Torus Dynamics**
- **Lifts**
- **Bifurcations**
- **Tongues**

Esta doble ventana permite hacer estudios comparativos entre los dos escenarios gráficos seleccionados, quedando la pantalla dividida en dos ventanas de visualización, una colocada del lado izquierdo y la otra en el lado derecho. Se tiene la posibilidad de trabajar con veinticinco diferentes pantallas de trabajo, que constituyen las combinaciones posibles de estos cinco escenarios gráficos de trabajo, agrupados de dos en dos.


Al activar el formato de doble ventana de visualización, de entrada, el sistema muestra en la ventana de visualización izquierda el escenario gráfico de trabajo **Circle Dynamics**

y en la ventana derecha, el escenario **Torus Dynamics**. La presentación de dicho formato es:



En éste formato de doble presentación, se tiene en la parte superior de la pantalla tres barras de iconos, una que llamamos: **barra de cambios de formatos y escenarios**, por referirse al manejo del cambio de formato de doble ventana al de ventana ampliada, y cambiar de escenario en alguna de las ventanas del formato de doble presentación. Las otras dos barras de iconos, las llamamos: **barras de iconos locales** porque actúan de forma restringida en cada ventana de trabajo particular.

5.2.2.3. Formato de Única Ventana

Cada una de las ventanas de visualización es posible agrandarla al tamaño de la pantalla del monitor, para obtener un despliegue amplificado de uno sólo de los cinco escenarios gráficos, en un formato de **Única Ventana de Visualización**. Esto se hace presionando el icono  con el botón izquierdo del mouse.

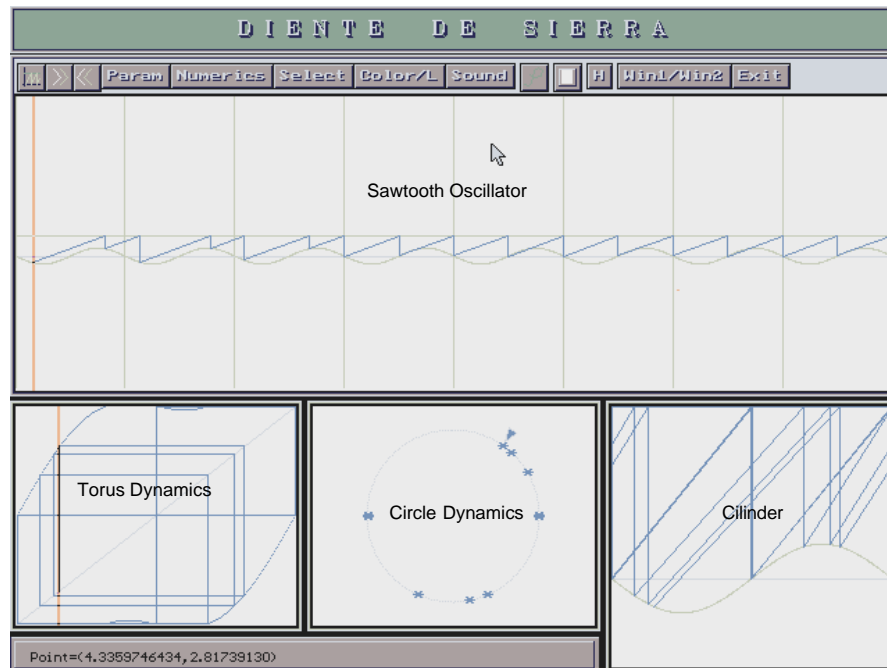
La forma de trabajar en cada uno de los escenarios mencionados será descrita más adelante.

En esta parte se hace una descripción detallada del funcionamiento y la operación de los distintos componentes de *DIENTE DE SIERRA*.

5.3. Primera Pantalla de Trabajo: Formato de Cuatro Ventanas

La Primera Pantalla de trabajo permite observar simultáneamente el comportamiento del oscilador de Diente de Sierra en cuatro escenarios gráficos:

- **Sawtooth Oscillator:** En éste escenario se visualiza la gráfica de tipo diente de sierra que representa las oscilaciones no lineales del oscilador de integración y disparo, así como la secuencia de tiempos de disparo, tanto hacia adelante, como hacia atrás (disparos retroactivos).
- **Circle Dynamics:** Cada uno de los tiempos de disparo del oscilador está determinado por un valor en el eje del tiempo (eje horizontal), del escenario sawtooth; la parte fraccionaria de éste valor es la fase de disparo del oscilador y puede ser representada como un punto en la circunferencia de perímetro uno. Dicho punto tiene coordenadas:
 $(x,y) = (\sin(\text{valor fraccionario}/2P) , \cos(\text{valor fraccionario}/2P))$.
- **Torus Dynamics:** Aquí se puede observar la dinámica de las iteraciones de la función de la circunferencia que determina las fases de disparo del oscilador.
- **Cilinder:** Proyecta en el cilindro de perímetro unitario la gráfica de diente de sierra del oscilador. La longitud horizontal en éste diagrama es la distancia (escalada) entre las franjas verticales del diagrama Sawtooth.

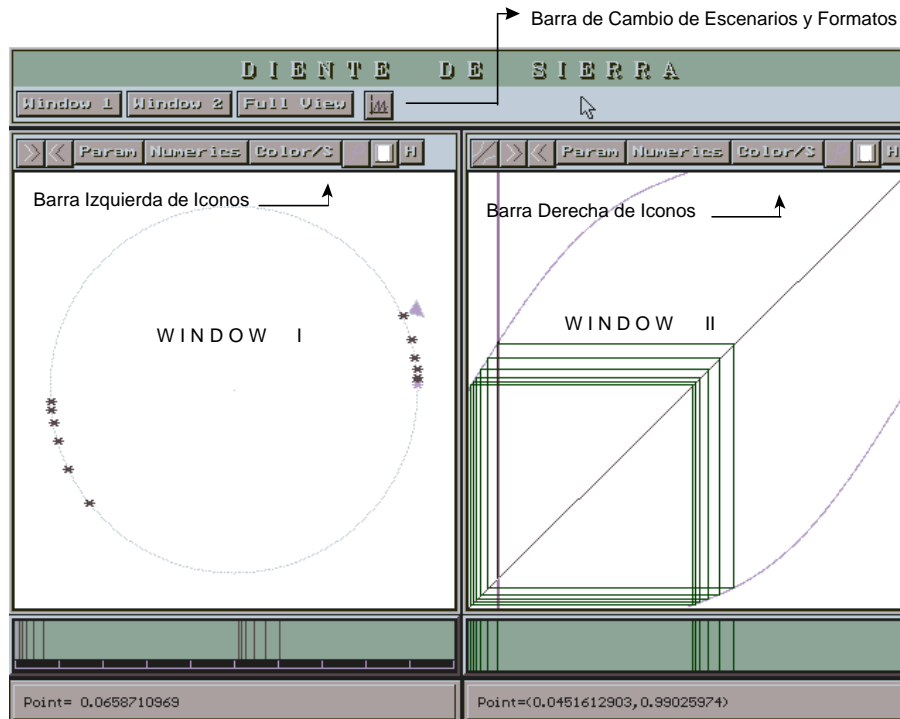


Las operaciones que se realicen en la ventana del escenario **Sawtooth Oscillator** se reflejarán automáticamente en las otras tres ventanas de los demás escenarios. La forma de operar la ventana de éste escenario se discutirá en la sección 5.6.1.

5.4. Formatos de Una y Dos Ventanas de Visualización

5.4.1. Formato de Dos Ventanas

Como sugiere el nombre, en éste formato, la pantalla se encuentra dividida en dos ventanas:



La ventana izquierda de la pantalla la llamamos **Window 1** y la parte derecha **Window 2**. En cada una de éstas ventanas se pueden colocar alguno de los distintos escenarios gráficos anteriormente definidos. Al entrar inicialmente a este formato, aparece en la ventana izquierda el escenario gráfico **Circle Dynamics**, y en la derecha, el escenario **Torus Dynamics**.

5.4.2. Formato de Única Ventana Amplificada

Cada una de las dos ventanas del doble formato de visualización tiene una barra (local) de iconos que sirve para el control de las funciones de cada ventana particular. Cuando se amplifica una de estas ventanas (para pasar del formato doble al formato de una única ventana) esta barra sirve para el control de la ventana amplificada. En la segunda parte, capítulo IV se describe el funcionamiento de cada uno de los diferentes escenarios de visualización así como el de las correspondientes barras de iconos locales.

5.4.3. Escenarios para los Formatos de Una y Dos Ventanas

En los formatos de doble o única ventana se puede trabajar usando cualquiera de los cinco escenarios de trabajo siguientes:

- **Circle Dynamics**
- **Torus Dynamics**
- **Lifts**
- **Bifurcations**
- **Tongues**

La forma de trabajar en cada uno de estos escenarios gráficos será descrita en el capítulo IV. Combinando todas las posibilidades, es posible trabajar con 30 diferentes pantallas de trabajo, 25 usando formato de doble ventana de visualización y 5 con el formato de pantalla única.

En el formato de doble ventana de visualización la pantalla esta dividida en dos ventanas, cada una de las cuales tiene una barra de iconos para su operación.

5.4.4. Menú de Escenarios del Formato de Dos Ventanas

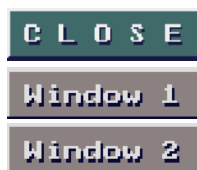
El formato de doble ventana contiene un menú en forma de barra que sirve para seleccionar los escenarios que van a ser usados en cada ventana de visualización, y cambiar de éste formato al formato de Única y de Cuatro Ventanas de Visualización.



Opciones del menú



Este icono permite la amplificación de la ventana escogida para trabajar en el formato de única ventana de visualización. Ofrece el siguiente menú:



Cierra el menú

Amplifica la primera ventana de visualización

Amplifica la segunda ventana de visualización



Retorno a la primera pantalla de trabajo (cuatro ventanas).




y

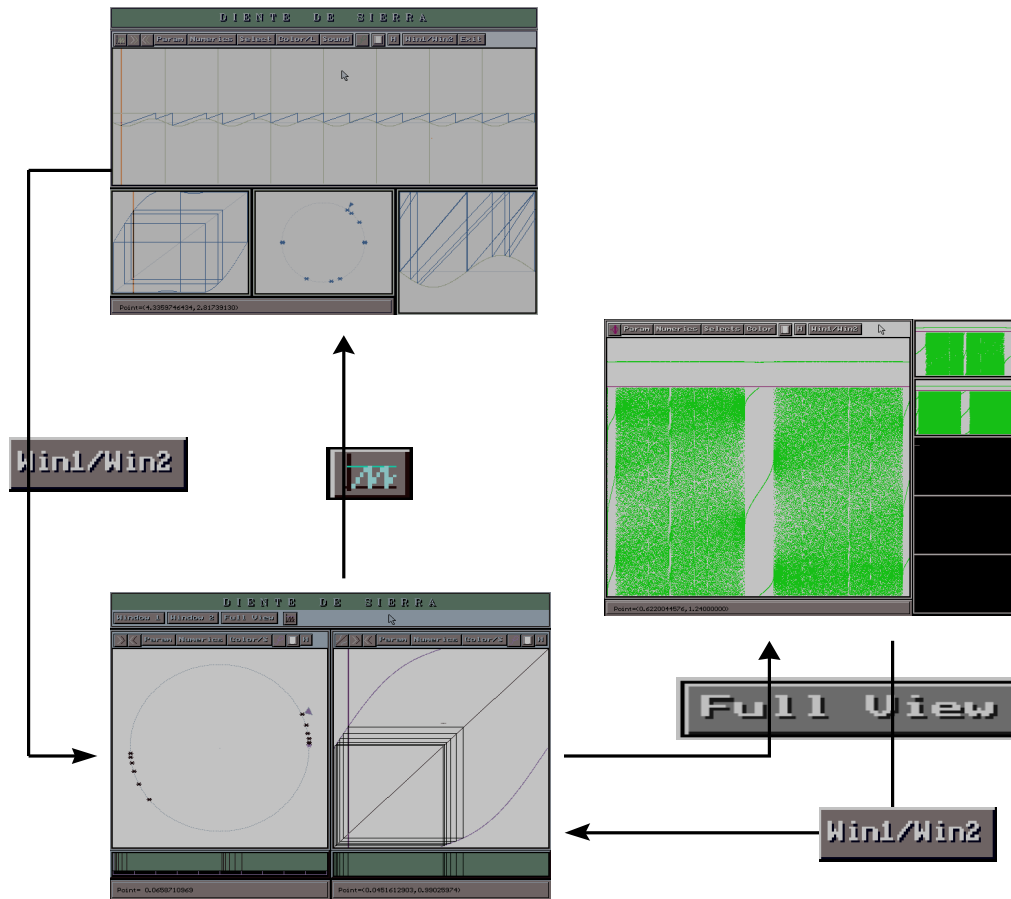


Al activar cualquiera de estos iconos se despliega un menú que permite escoger el escenario gráfico de trabajo que se desea usar en esa ventana:



La opción seleccionada queda marcada con la imagen .

5.5. Pasando de uno a otro Formato



- Del formato mixto (de cuatro ventanas), que aparece al entrar al programa, se puede pasar al formato de doble ventana activando el icono **Win1/Win2** de la barra de iconos del escenario **Sawtooth**.
- Del formato doble se puede regresar al formato mixto activando la opción **Win1/Win2**.
- Del formato doble puede pasarse también al de ventana única activando la opción **Full View** y de este se regresa al de doble ventana con la opción **Win1/Win2**.

5.6. Escenarios Gráficos

Los escenarios gráficos a ser descritos en las siguientes secciones, son:


- **Sawtooth Oscillator**
- **Circle Dynamics**
- **Torus Dynamics**
- **Lifts**
- **Bifurcations**
- **Tongues**

Tales escenarios pueden ser usados en los formatos descritos anteriormente.

Cada escenario contiene una correspondiente barra de iconos, constituida por iconos de dos tipos:

- **Iconos de Acción**
- **Iconos de Menú**

Los primeros, al activarse, realizan una acción previamente programada; los segundos ofrecen un menú de opciones. Estas opciones pueden ser activadas con el botón

izquierdo del mouse .

Algunas opciones requieren la alimentación de valores numéricos. Para hacer esto debemos:

1. Presionar el botón izquierdo del mouse sobre el cuadro donde se exhibe el valor numérico actual;
2. Introducir el valor deseado usando el teclado y



3. Presionar la tecla para que el valor quede determinado.

En la parte inferior de todos los escenarios aparece una barra que se conoce como barra de mensajes. En ella se reporta la posición del apuntador del mouse dentro de la pantalla de trabajo. La excepción es el escenario **Circle Dynamics**, para el cual, el reporte que aparece en esta barra nos especifica la posición de la punta del cursor triangular sobre la circunferencia.

Adoptaremos las siguientes reglas, en la descripción de éste manual:

1. Todos los menús contienen la opción . Presionando el botón izquierdo del mouse en ésta opción, se cierra el correspondiente menú.

2. Cuando a alguna opción, le tengamos que proporcionar un valor real o entero, estará limitado en un determinado rango. Denotándolo por
[(Valor más pequeño) , (Valor más grande)].

Si el valor introducido se encuentra fuera del rango establecido, entonces se adoptará el valor más grande o más pequeño, según corresponda.

Ejemplo.

Supóngase que nos encontramos en la opción del número de iteraciones del escenario **Circle Dynamics** (Esta opción tiene por nombre *#Iterats*), para ésta opción tenemos que si se encuentra activada, entonces [0,100]. Cualquier valor introducido que se encuentre fuera del rango, se considerará como 0 o 100, según corresponda.

La descripción de éste rango la haremos inmediatamente después de la colocación de los símbolos de activación o desactivación (Si es que la opción ofrece ésta posibilidad). En éste ejemplo la descripción quedaría así:

 () [0,100]

3. Inmediatamente después del símbolo de activación (o desactivación) y el rango de la variable (si éstos existen), colocaremos entre paréntesis el valor por omisión que tiene esa opción (Si es que tal valor existe).

Regresando al ejemplo anterior, la descripción quedaría así:

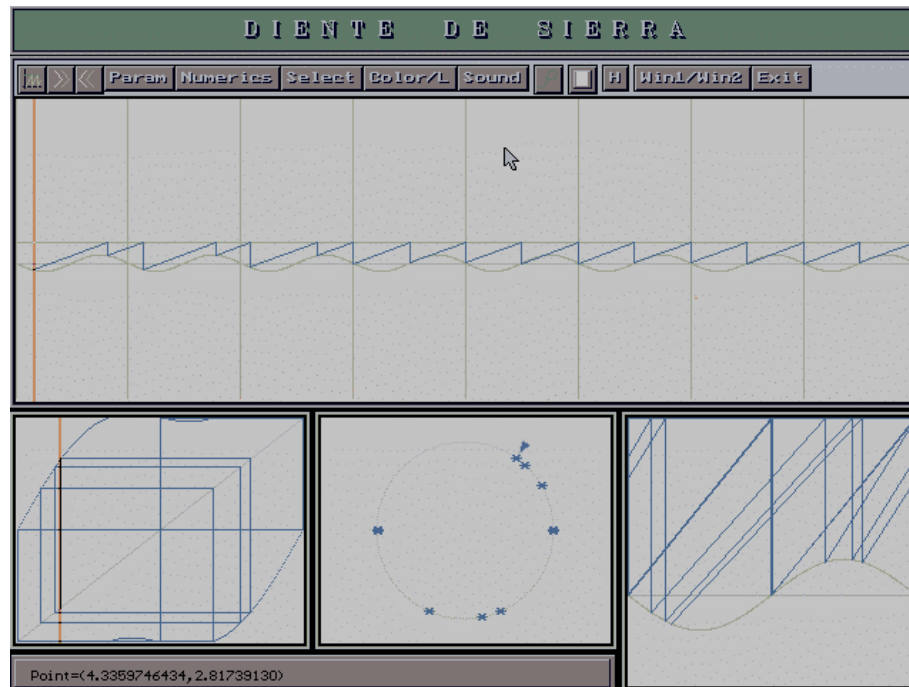
 () [0,100] (1)

Indicando que el valor por omisión es uno.

5.6.1. Sawtooth Oscillator

5.6.1.1 Descripción del Escenario

Este escenario aparece exclusivamente en el formato de cuatro ventanas.



Podemos distinguir en la parte superior de este escenario una **barra de iconos** y un **dial**. Este tiene la forma de una línea vertical, de color azul, que parpadea. Sirve para determinar la posición inicial, desde la cual se van a iniciar los disparos del oscilador. Podemos mover el dial atrapándolo con el mouse y, desplazándolo (sin soltarlo) hasta la posición deseada. Al hacerlo, observaremos que también el dial del escenario del Toro y el cursor del escenario de la circunferencia, se moverán sincronizadamente con éste.

5.6.1.2 Barra de Iconos



5.6.1.3 Funciones de los Iconos



Al activar este icono se despliega la gráfica del oscilador de diente de sierra (con los valores de los parámetros establecidos) así como también sus correspondientes gráficas en el toro y en el cilindro.



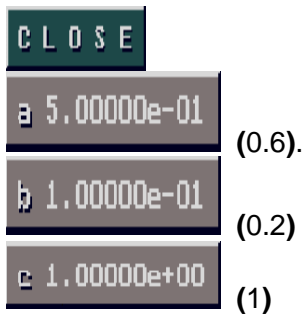
Realiza los disparos del oscilador y las iteraciones de la función de disparo. Los lleva a cabo simultáneamente en el oscilador, en el toro plano, en la circunferencia y en el cilindro. El numero de disparos que se realizan es el que está indicado en la opción **#iterats**.



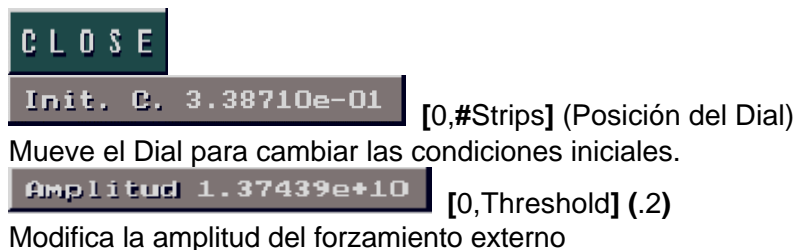
Realiza los disparos retroactivos del oscilador y las iteraciones de la función inversa de disparo. También los lleva a cabo simultáneamente en el oscilador, en el toro plano, en la circunferencia y en el cilindro.



Abre un menú que permite modificar los valores de los parámetros de la familia de funciones que modelan al sistema:



Ofrece el siguiente menú:



Threshold 5.00000e-01

[0,4] (.5)

Modifica el umbral de disparo del oscilador.


Angle 4.50000e+01

[0,90] (45)

Modifica el ángulo de disparo del oscilador.

#Iterats 1

[0,10000] (1)

Establece la cantidad de iteraciones a realizar, cada vez que se presione  o



Iterated 1

[1,5000] (1)

Determina el número de aplicaciones del levantamiento que se van a realizar en cada iteración (orden de la iterada).

Stripes 8

[1,100] (8)

Determina la cantidad de fases en el oscilador.

Delays 40

[0,1000] (40)

Establece una pausa entre cada iteración, para percibir mejor su comportamiento.

Save Its

Al activarla, almacena las iteraciones realizadas y pueden ser reportadas mediante la opción de **Orbit's Report**. Cuando esta opción está activa el rango de la opción **#Iterats** se modifica así: [0,100] (1).

Orbit's Report

Reporte numérico de las iteraciones comprendidas entre los límites **Lower** y **Upper**. La opción cuenta con las siguientes opciones:

C L O S E

Upper 1

[Lower, Cantidad de iteraciones] (1)

Establece el índice máximo de la iteración a reportar.

Lower 0

[0, Upper] (0)

Establece el índice mínimo de la iteración a reportar.

Data Report

Muestra las iteraciones que tiene índices en el rango [Lower , Upper].

Color/L

Modifica el tipos de línea y color para las gráficas del Diente de Sierra y de las iteraciones.

C L O S E

Color

Modifica el color (directa/ inversa)

C L O S E

Direct

Modifica el color para las iteraciones de la función directa.

Inverse

Modifica el color para las iteraciones de la función inversa.

Estas opciones muestran la siguiente paleta de colores:



Style Line

Determina el tipo de línea para pintar las iteraciones. Tiene el siguiente menú:

C L O S E

SolidLn

DottedLn

CenterLn

DashedLn

Sound

Modifica parámetros de la animación sonora.

Tiene el siguiente menú:

Time Sound 1 (1)

Determina la duración del sonido por punto.

Iterated 1 (1) Orden de iterada.

#Iterations 1 (1) Cantidad de iteraciones.

Origin 1.26783e-01 (0.0) Punto inicial.

Sound Forward Animación hacia adelante.

Sound Backward Animación hacia atrás.



Calcula el número de rotación y la sincronización de la función.

Tiene las siguientes opciones:

C L O S E

Information

Muestra el número de rotación y la sincronización de la función.

Init. Cond. 1.26783e-01

[0,Splits](Posición actual del Dial)

Modifica la condición inicial para el cálculo de número de rotación y sincronización.

#Iterations 250

[0,10000] (250)

Modifica la cantidad de iteraciones para estimar el límite que nos da el número de rotación y la sincronización.

Iterated Order 1

[0,10000] (1)

Modifica el orden de iterada para el cálculo del número de rotación y sincronización.

Los valores de la condición inicial, número de iteraciones y orden de la iterada que se especifican en este menú, son para fines de cálculo local (restringidos a este menú) y no modifican los valores de la opción **Numeric**.



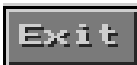
Limpia la ventana.



Proporciona una ayuda sobre éste escenario.

Win1/Win2

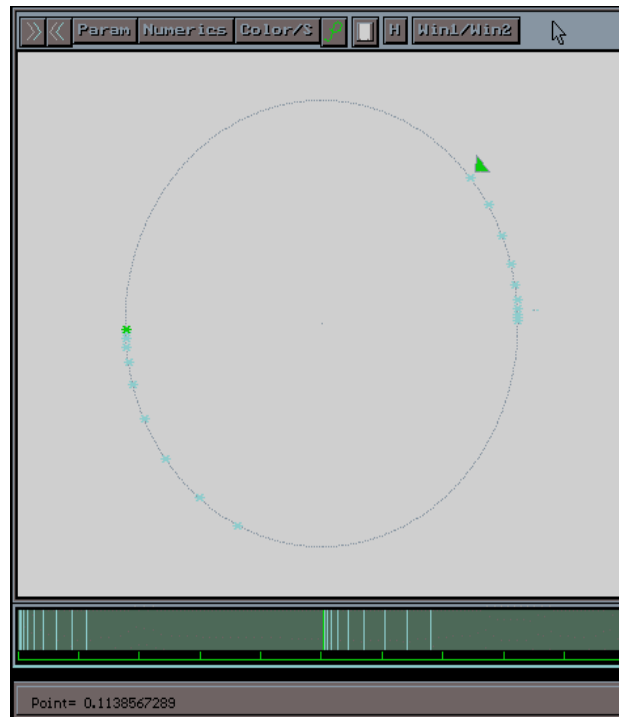
Muestra el formato de doble ventana de visualización, con los escenarios gráficos que se hayan asignado a cada una de las ventanas de visualización. Cuando se active por primera vez, se tiene los escenarios de trabajo **Circle Dynamics** y **Torus Dynamics** para **Window 1** y **Window 2** respectivamente.



Termina la sesión de trabajo con Diente de Sierra y retorna al sistema operativo.

5.6.2. Circle Dynamics

5.6.2.1 Descripción del Escenario



En este escenario se muestran las órbitas de la función en la circunferencia. La condición inicial se elige desplazando el cursor triangular verde con el botón izquierdo del mouse. En la parte inferior aparece la coordenada del punto (el cero corresponde al extremo derecho del círculo y este se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Debajo de la ventana del círculo hay una franja de longitud uno que representa la longitud de la circunferencia. Las iteraciones realizadas se visualizan simultáneamente en este intervalo.

5.6.2.2 Barra de Iconos



5.6.2.3 Funciones de los Iconos



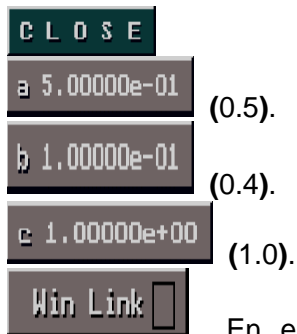
Realiza las iteraciones de la función directa.



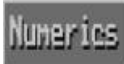
Realiza las iteraciones de la función inversa.



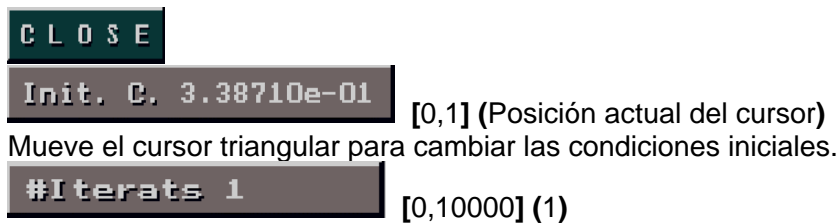
Abre un menú que permite modificar los valores de los parámetros de la familia de funciones que modela al sistema:



En el formato de doble ventana de visualización, ésta opción permite enlazar parámetros entre ambas ventanas. Para el formato de Única Ventana de Amplificación, ésta opción no aparece.



Ofrece el siguiente menú:



Establece la cantidad de iteraciones a realizar.



Determina el número de aplicaciones de la función que se van a realizar en cada iteración (orden de la iterada).



Establece una pausa entre cada iteración, para percibir mejor su comportamiento.



Al activarla, almacena las iteraciones realizadas y pueden ser reportadas mediante la opción de **Orbit's Report**. Cuando esta opción está activa el rango de la opción **#Iterats** se modifica así: [0,100] (1).

Orbit's Report

Reportar las iteraciones comprendidas entre los límites **Lower** y **Upper**. Ofrece las siguientes opciones:

C L O S E

Upper 1

[Lower,Cantidad de iteraciones] (1)

Establece el índice máximo de la iteración a reportar.

Lower 0

[0,Upper] (0)

Establece el índice mínimo de la iteración a reportar.

Data Report

Muestra las iteraciones que tiene índices en el rango [Lower , Upper].

Inverse Calculation

Establece los métodos numéricos, y los parámetros de estos, para calcular las iteraciones de la función retroactiva de fases de disparos.

C L O S E

Init. Cond. 0.00000e+00

Establece una condición inicial para el algoritmo de la inversa.

Tolerance 1.00000e-03

Establece la tolerancia para la aproximación a la solución del algoritmo.

#Iterations 5.00000e+00

Determina la cantidad máxima de iteraciones que deberán realizar antes de satisfacer la tolerancia.

Methods Steffensen

Selecciona el algoritmo para calcular las iteraciones de la función inversa.

Cuenta con las siguientes opciones:

C L O S E

Punto Fijo

Steffensen

N e w t o n

Color/S

Permite modificar el color y el sonido.
Tiene con las siguientes opciones:

C L O S E

Color

Modifica el color de las iteraciones.

Tiene el menú siguiente:

C L O S E

Direct

Modifica el color de las iteraciones de la función directa.

Inverse

Modifica el color de las iteraciones de la función inversa.

Todas estas opciones muestran la siguiente paleta de colores:



Sound

Activa o desactiva el sonido y modifica la frecuencia. Tiene el siguiente menú:

C L O S E

Frecuency 345

[0,10000] (345)

Modifica la frecuencia del sonido.

Turn On

Activa o desactiva el sonido.



Calcula el número de rotación y la sincronización de la función.

Tiene las siguientes opciones:

C L O S E

Information

Muestra el número de rotación y la sincronización del sistema.

Init. Cond. 1.26783e-01

[0,2 Π] (Posición del cursor)

Modifica la condición inicial para el cálculo de número de rotación y la sincronización.

#Iterations 250

[0,10000] (250)

Determina la cantidad de iteraciones para el numero de rotación y la sincronización.

Iterated Order 1

[0:10000] (1)

Determina el orden de iterada para el número de rotación y sincronización.

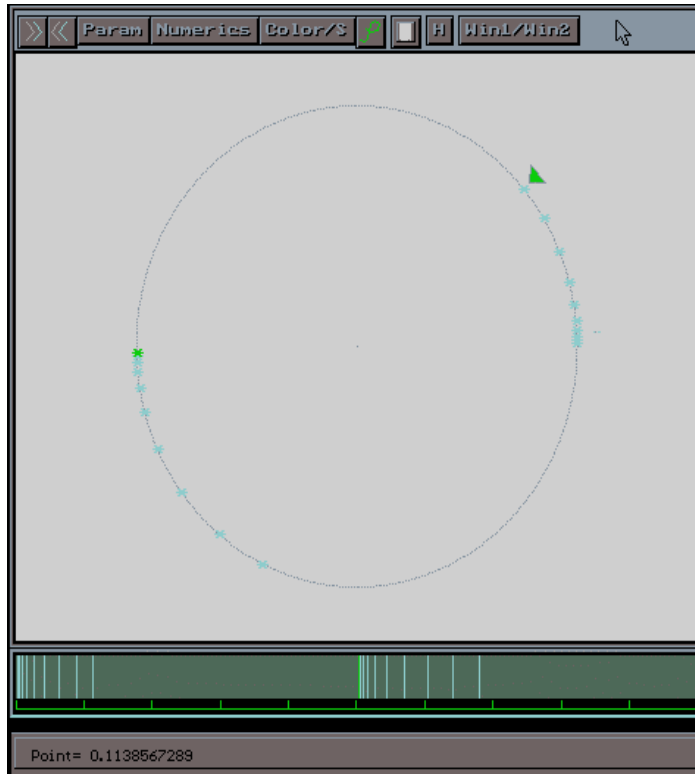


Limpia la ventana



Proporciona ayuda general

5.6.2.4 Formato de Ventana Amplificada



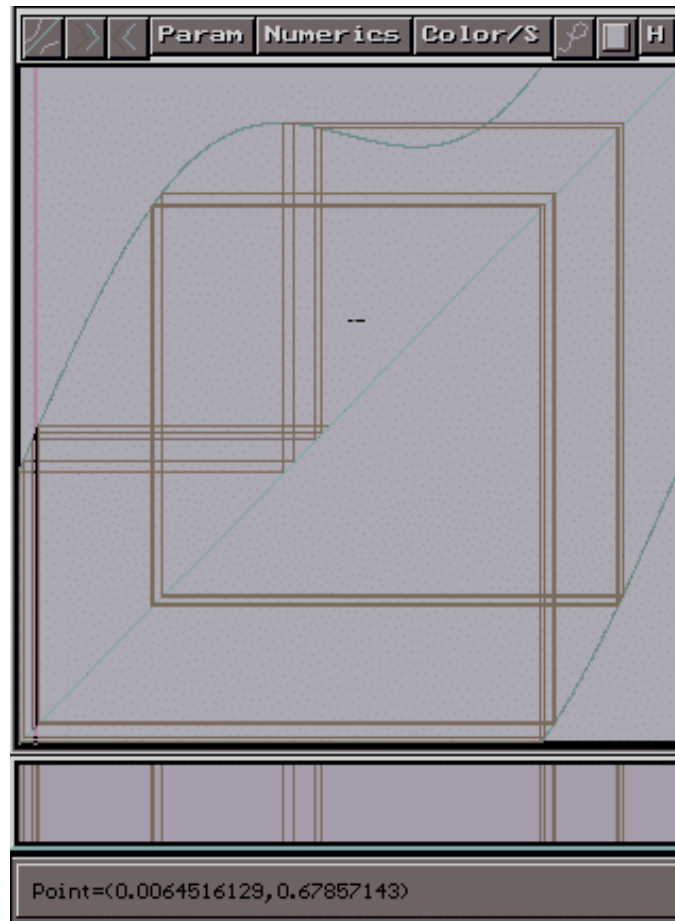
Todos los elementos de la barra de iconos de este formato han sido considerados anteriormente excepto la opción:



Regresa al formato de doble ventana.

5.6.3. Torus Dynamics

5.6.3.1 Descripción del Escenario



La ventana de este escenario representa la superficie del toro, identificando el lado superior con el inferior y el lado derecho con el izquierdo. Aquí se dibujan las gráficas de las funciones de la circunferencia y se muestran sus iteraciones. La condición inicial para las iteraciones se determina con un **dial** (línea vertical azul que parpadea), cuya posición se modifica desplazándola con el mouse. (sin soltarla), hasta la posición deseada. Las iteraciones realizadas se observan también en una franja horizontal situada en la parte de abajo de la ventana y que representa el intervalo [0,1].

5.6.3.2 Barra de Iconos



5.6.3.3 Funciones de los iconos



Grafica la función(s) de la circunferencia en el toro plano.



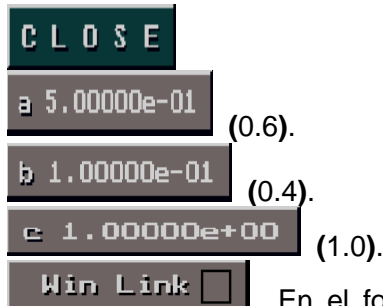
Realiza y grafica las iteraciones de la función directa



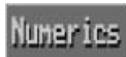
Realiza y grafica las iteraciones de la función inversa



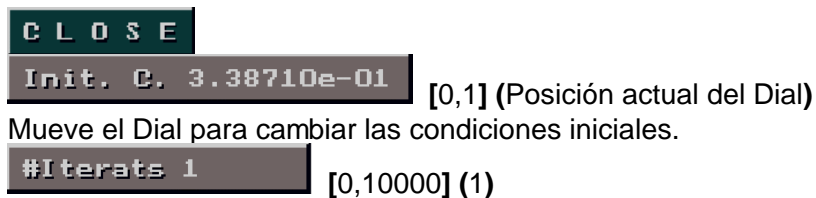
Abre un menú que permite modificar los valores de los parámetros de la familia de funciones que modela al sistema:



En el formato de doble ventana de visualización, ésta opción enlaza parámetros entre ambas ventanas. Para el formato de Única Ventana de Visualización, ésta opción no aparece.



Ofrece el siguiente menú.



Establece la cantidad de iteraciones a realizar.

Iterated 1 [0,5000] (1)

Determina el número de aplicaciones de la función que se van a realizar en cada iteración (orden de la iterada).

Point's Gph 1000 [20,1500] (1000)

Determina la cantidad de puntos para dibujar la gráfica de la función en el toro.

Delays 40 [0,1000] (40)

Establece una pausa entre cada iteración, para percibir mejor su comportamiento.

Save Its

Al activarla, almacena las iteraciones realizadas y pueden ser reportadas mediante la opción de **Orbit's Report**. Cuando esta opción está activa el rango de la opción **#Iterats** se modifica así: [0,100] (1).

Orbit's Report

Reportar las iteraciones comprendidas entre los límites **Lower** y **Upper**. Ofrece las siguientes opciones:

C L O S E

Upper 1 [Lower , Cantidad de Iteraciones] (1)

Establece el índice máximo de la iteración a reportar.

Lower 0 [0,Upper] (0)

Establece el índice mínimo de la iteración a reportar.

Data Report Muestra las iteraciones que tiene índices en el rango [Lower , Upper].

Direct/Inverse Activa o desactiva la gráfica de la función directa o inversa

cuando se presiona el .

Tiene las siguientes opciones:

C L O S E

Direct Activa o desactiva la gráfica de la función directa.

Inverse Activa o desactiva la gráfica de la función inversa.

Inverse Calculation

Establece los métodos numéricos, y los parámetros de estos, para calcular las iteraciones de la función retroactiva de fases de disparos.

C L O S E

Init. Cond. 0.00000e+00

Establece una condición inicial para el algoritmo de la inversa.

Tolerance 1.00000e-03

Establece la tolerancia para la aproximación a la solución del algoritmo.

#Iterations 5.00000e+00

Determina la cantidad máxima de iteraciones que deberán realizar antes de satisfacer la tolerancia.

Methods Steffensen

Selecciona el algoritmo para calcular las iteraciones de la función inversa.

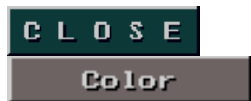
Cuenta con las siguientes opciones:



Color/S

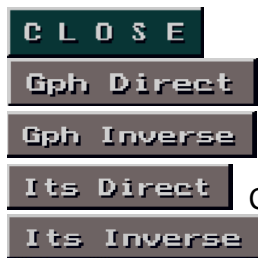
Modifica el tipo color y el tipo de líneas para las gráficas y/o las iteraciones.

Tiene las siguientes opciones:



Modifica el color para las iteraciones.

Tiene el siguiente menú:



Color para las gráficas de la función.

Color para las gráficas de la inversa.

Color para las iteraciones.

Color para las iteraciones de la inversa.

Estas opciones muestran la siguiente paleta de colores:



Style Line

Selecciona el tipo de línea.

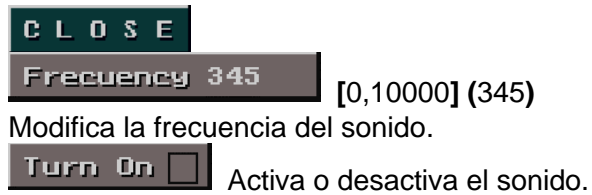
Tiene el siguiente menú:



Sound

Activa o desactiva el sonido y modifica la frecuencia.

Tiene el siguiente menú:



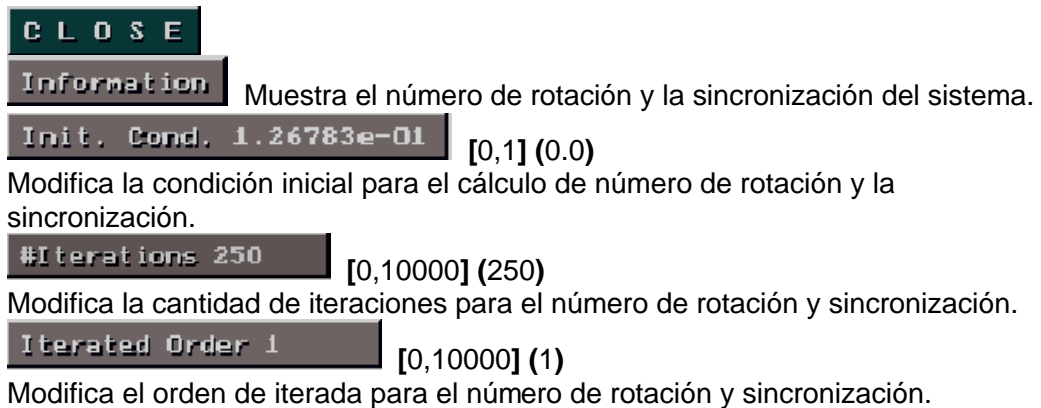
Modifica la frecuencia del sonido.

Activa o desactiva el sonido.



Calcula el número de rotación y la sincronización de la función.

Tiene las siguientes opciones:



Modifica la condición inicial para el cálculo de número de rotación y la sincronización.

Modifica la cantidad de iteraciones para el número de rotación y sincronización.

Modifica el orden de iterada para el número de rotación y sincronización.

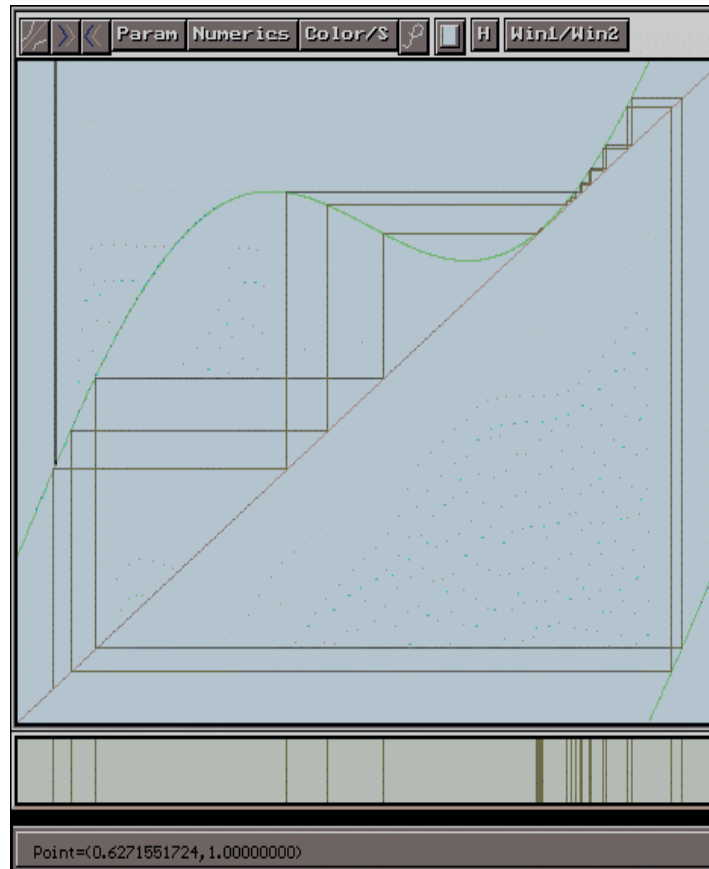


Limpia la ventana



Ofrece ayuda general

5.6.3.4 Formato de Ventana Amplificada



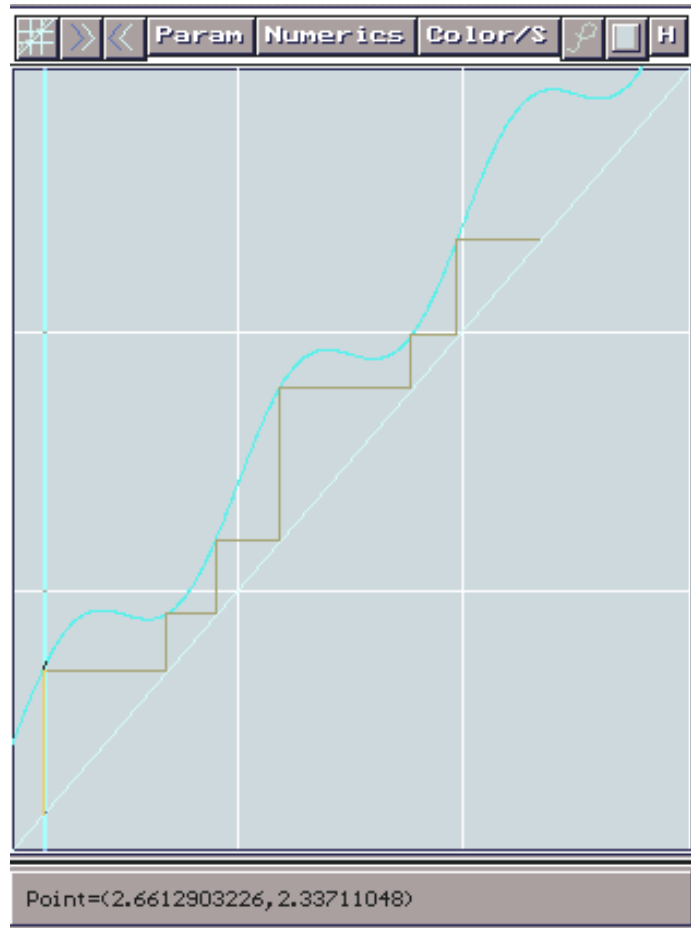
Todos los elementos de la barra de iconos de este formato han sido considerados anteriormente excepto la opción:



Regresa al formato de doble ventana.

5.6.4 Lifts

5.6.4.1 Descripción del Escenario



Este escenario muestra la gráfica y las iteraciones de la función de disparos asociada al oscilador de diente de sierra. Esta función constituye una representación (levantamiento), en la recta, de la función de la circunferencia cuyas iteraciones determinan las fases de disparo del oscilador forzado.

5.6.4.2 Barra de Iconos



5.6.4.3 Funciones de los iconos



Dibuja la gráfica del levantamiento.



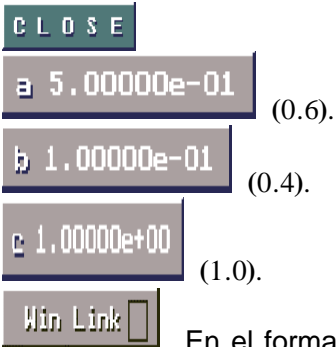
Realiza las iteraciones del levantamiento



Realiza las iteraciones de la función inversa del levantamiento



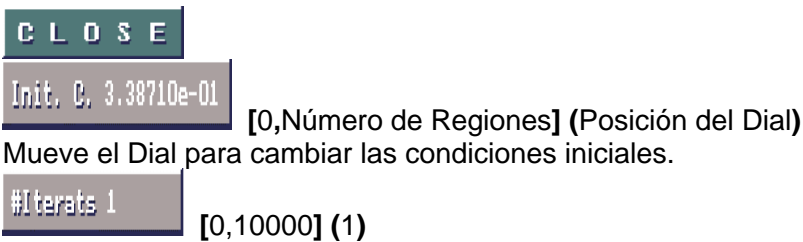
Abre un menú que permite modificar los valores de los parámetros de la familia de funciones que modela al sistema:




En el formato de doble ventana de visualización, ésta opción permite enlazar parámetros entre ambas ventanas. Para el formato de Única Ventana de Visualización, ésta opción no aparece.



Ofrece el siguiente menú:



Mueve el Dial para cambiar las condiciones iniciales.

Determina la cantidad de iteraciones a realizar cada vez que se presione  o



Determina el número de aplicaciones del levantamiento que se van a realizar en cada iteración (orden de la iterada).

Point's Gph 1000

[20,1500] (1000)

Determina la cantidad de puntos de la partición del intervalo en que se va a graficar el levantamiento.

#Tori 3

[1,20] (3)

Determina la cantidad de toros que se pueden visualizar en el plano.

Delays 40

[0,1000] (40)

Establece una pausa entre cada iteración, para percibir mejor su comportamiento.

Save Its

Al activarla, almacena las iteraciones realizadas y pueden ser reportadas mediante la opción de **Orbit's Report**. Cuando esta opción está activa el rango de la opción **#Iterats** se modifica así: [0,100] (1).

Orbit's Report

Reportar las iteraciones comprendidas entre los límites **Lower** y **Upper**. Ofrece las siguientes opciones:

C L O S E

Upper 1

[Lower , Cantidad de Iteraciones] (1)

Establece el índice máximo de la iteración a reportar.

Lower 0


[0 , Upper] (1)

Establece el índice mínimo de la iteración a reportar.

Data Report

Muestra las iteraciones que tiene índices en el rango [Lower , Upper].

Direct/Inverse

Activa o desactiva la gráfica de la función directa o inversa cuando se presiona .

Cuenta con el siguiente menú:

C L O S E

Direct

Activa o desactiva el pintado del levantamiento.

Inverse

Activa o desactiva el pintado la inversa del levantamiento.

Inverse Calculation

Establece los métodos numéricos, y los parámetros de estos, para calcular las iteraciones de la función retroactiva de fases de disparos.

Tiene el siguiente menú:

C L O S E

Init. Cond. 0.00000e+00

Establece una condición inicial para el algoritmo de la inversa.

Tolerance 1.00000e-03

Establece la tolerancia para la aproximación a la solución del algoritmo.

#Iterations 5.00000e+00

(5)

Determina la cantidad máxima de iteraciones que deberán realizar antes de satisfacer la tolerancia.

Methods Steffensen

Selecciona el algoritmo para calcular las iteraciones de la función inversa.

Cuenta con las siguientes opciones:

C L O S E

Punto Fijo

Steffensen

N e w t o n

Color/S

Modifica el tipo color y el tipo de líneas para las gráficas y/o las iteraciones.

Tiene las siguientes opciones:

C L O S E

Color

Modifica el color (Directa/Inversa)

C L O S E

Gph Direct

Color para las graficas del levantamiento.

Gph Inverse

Color para las graficas de la inversa.

Its Direct

Color para las iteraciones del levantamiento.

Its Inverse

Color para las iteraciones de la inversa del levantamiento.

Estas opciones muestran la siguiente paleta de colores:




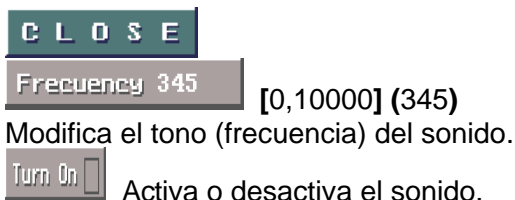
Style Line


Selecciona el tipo de línea para pintar las iteraciones.

Tiene el siguiente menú:

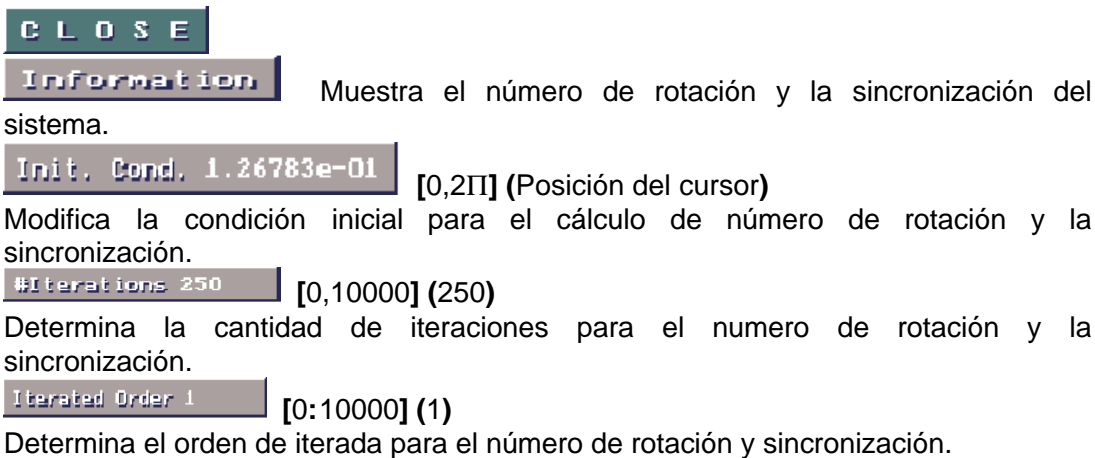


 Activa o desactiva el sonido.



 Calcula el número de rotación y la sincronización de la función.

Tiene las siguientes opciones:

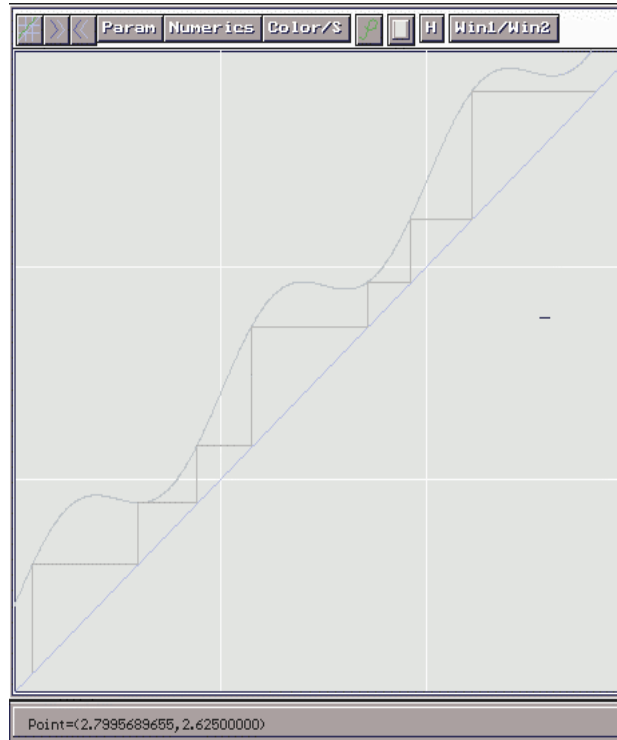


Los valores de la condición inicial, número de iteraciones y orden de la iterada que se especifican en este menú, son para fines de cálculo local (restringidos a este menú) y no modifican los valores de la opción **Numeric**.

 Limpia la ventana.

 Proporciona ayuda.

5.6.4.4 Formato de Ventana Amplificada

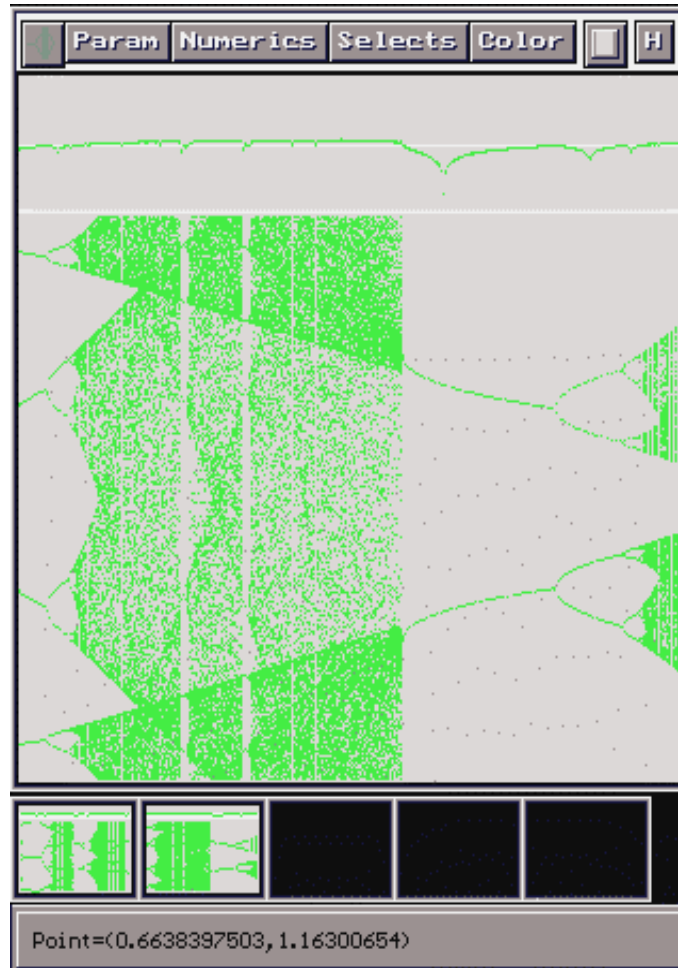


Todos los elementos de la barra de iconos de este formato han sido considerados anteriormente excepto la opción:

Win1/Win2 Regresa al formato de doble ventana.

5.6.5. Bifurcations

5.6.5.1 Descripción del Escenario



El objetivo del escenario es mostrar las bifurcaciones que sufre el sistema al variar uno de los parámetros, manteniendo fijos los demás.

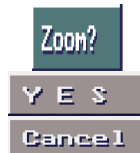
Historial de Imágenes

Cuenta con la posibilidad de almacenar imágenes en pequeños cuadros de los diagramas previamente se realizados y generar un historial de imágenes.

Para recuperar las imágenes situadas en los cuadros pequeños, bastará con situar el cursor del mouse en el área del cuadro de la imagen que se desee y presionar el botón izquierdo del mouse para ampliarla. Si no existiese imagen alguna, sólo se escuchará un sonido.

Amplificaciones

Se tiene la posibilidad de ampliar las regiones del diagrama que se desee. Para ello debe colocarse el cursor del mouse en la zona de la ventana de visualización que se quiere ampliar, presionar el botón izquierdo del mouse y, sin soltarlo arrastrarlo. Se observará que se genera un rectángulo, que cambia de tamaño al mover el mouse. Cuando se abarque la zona de interés soltamos el botón izquierdo del mouse, entonces el programa preguntará si se desea realizar la ampliación de la zona determinada por el rectángulo. El menú que se muestra es:



Si la respuesta es afirmativa presionar **YES**, en caso contrario **Cancel**.

5.6.5.2 Barra de Iconos



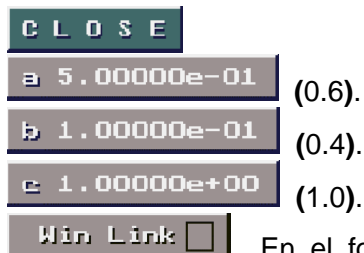
5.6.5.3 Funciones de los Iconos



Lleva a cabo el diagrama de bifurcación del sistema, en la dirección del parámetro especificado, manteniendo fijos los demás en sus valores actuales.



Abre un menú que permite modificar los valores de los parámetros de la familia de funciones que modela al sistema:



En el formato de doble ventana de visualización, ésta opción permite enlazar parámetros entre ambas ventanas. Para el formato de Única Ventana de Visualización no aparece ésta opción.

Numerics

Ofrece el siguiente menú:

C L O S E

Iterated Order 1 [1,5000] (1)

Determina el número de aplicaciones de la función que se van a realizar en cada iteración (orden de la iterada).

#Iterations 250 [30,14000] (250)

Determina la cantidad total de iteraciones que se realizan en la búsqueda de atractores.

Draw Points 100 [10,Número de iteraciones] (100)

En la búsqueda de atractores se grafican un cierto número de iteraciones después de haber pasado un período transitorio durante el cual ocurre la convergencia. Sólo se grafican entonces las últimas iteraciones. El número que aparece en esta opción representa el número de puntos de la cola que va a graficarse.

To Take #Steps 3 [1,30] (1)

Se elige una condición inicial aleatoriamente para iniciar las iteraciones. Aquí se determina el número de veces que se repite el proceso para diferentes condiciones iniciales y un mismo valor del parámetro que se está incrementando.

Inverse Calculation Establece los métodos numéricos, y los parámetros de estos, para calcular las iteraciones de la función retroactiva de fases de disparos.

Tiene el siguiente menú:

C L O S E

Init. Cond. 0.00000e+00

Establece una condición inicial para el algoritmo de la inversa.

Tolerance 1.00000e-03

Establece la tolerancia deseada para la aproximación a la solución del algoritmo.

#Iterations 5.00000e+00

Determina la cantidad máxima de iteraciones que deberán realizar antes de satisfacer la tolerancia.

Methods Steffensen

Selecciona el algoritmo para calcular las iteraciones de la función inversa.

Cuenta con las siguientes opciones:

C L O S E

Punto Fijo

Steffensen


N e w t o n

Select

Activa o desactiva el pintado de la función directa o inversa del sistema, determina el parámetro a variar y establece el rango del parámetro que varia.

C L O S E

Direct/Inverse

Activa o desactiva la graficación de la función directa o inversa cuando se presiona el icono .

Cuenta con el siguiente menú:

C L O S E

Direct

Activa o desactiva el pintado de la función directa.

Inverse

Activa o desactiva el pintado de la función inversa.

Bifur Param

Selecciona el parámetro de bifurcación (el que se variará).
Abre el siguiente menú:

C L O S E

a

b

c

Param Range

Establece el rango de variación del parámetro de bifurcación.

C L O S E

Maximum 1.00000e+00

Minimum 0.00000e+00

Color

Modifica el color de los diagramas de bifurcaciones.

Tiene el menú :

C L O S E

Direct

Modifica el color para el diagrama de la función directa.

Inverse

Modifica el color para el diagrama de la función inversa.

Estas opciones muestran la siguiente paleta de colores:

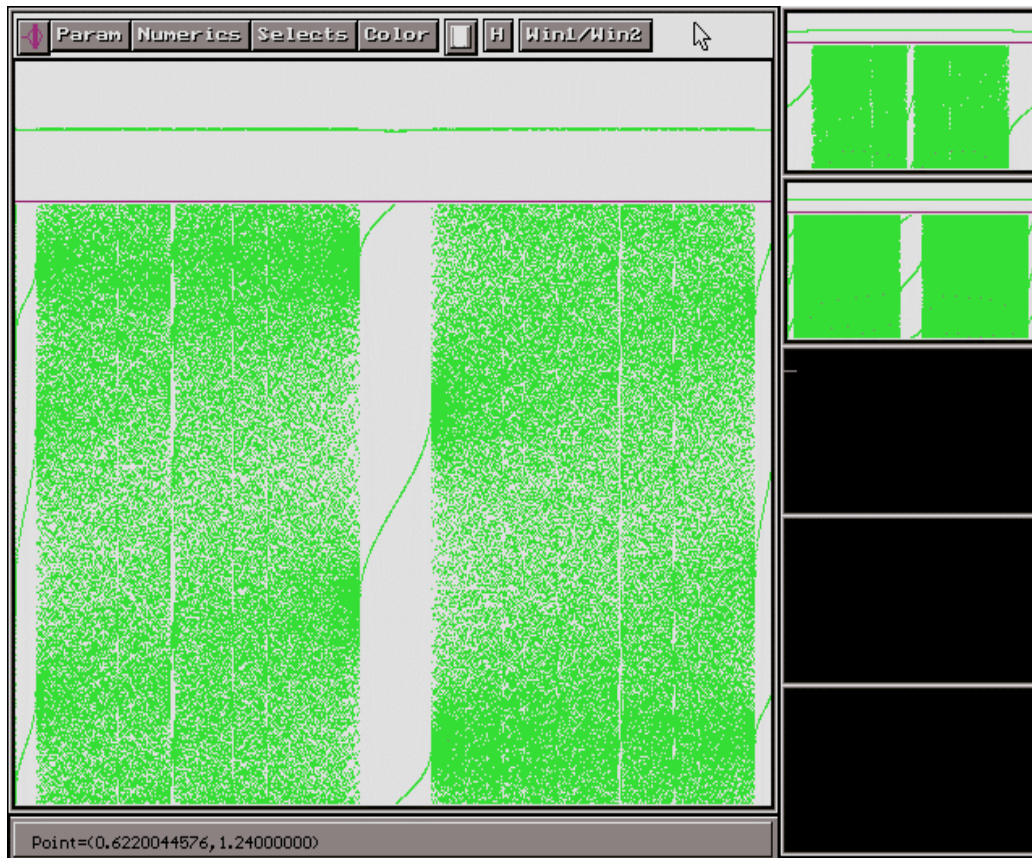


Limpia la ventana.



Proporciona ayuda.

5.6.5.4 Formato de Ventana Amplificada



Todos los elementos de la barra de iconos de este formato han sido considerados anteriormente excepto la opción:



Regresa al formato de doble ventana.

5.6.6. Tongues

5.6.6.1 Descripción del Escenario



Este escenario permite visualizar las regiones de sincronización de la familia Clásica en el espacio de parámetros. En la figura se pueden observar las lenguas de Arnold.

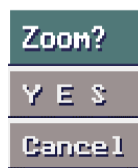
Historial de Imágenes

Cuenta con la posibilidad de almacenar imágenes en pequeños cuadros de los diagramas previamente se realizaron y generar un historial de imágenes.

Para recuperar las imágenes situadas en los cuadros pequeños, bastará con situar el cursor del mouse en el área del cuadro de la imagen que se desee y presionar el botón izquierdo del mouse para amplificarla. Si no existiese imagen alguna, sólo se escuchará un sonido.

Amplificaciones

Se tiene la posibilidad de ampliar las regiones del diagrama que se desee. Para ello debe colocarse el cursor del mouse en la zona de la ventana de visualización que se quiere ampliar, presionar el botón izquierdo del mouse y, sin soltarlo arrastrarlo. Se observará que se genera un rectángulo, que cambia de tamaño al mover el mouse. Cuando se abarque la zona de interés soltamos el botón izquierdo del mouse, entonces el programa preguntará si se desea realizar la ampliación de la zona determinada por el rectángulo. El menú que se muestra es:



Si la respuesta es afirmativa presionar , en caso contrario presionar .

Enlace de ventanas

Presionando el botón derecho del mouse, aparece un menú que permite enlazar los parámetros de las ventanas. Si los parámetros de las ventanas están enlazados, los parámetros de la otra ventana de visualización se modificarán automáticamente al desplazar el mouse y presionar el botón derecho.

5.6.6.2 Barra de Iconos



5.6.6.3 Funciones de los Iconos



Realiza el diagrama de las lenguas de Arnold del sistema.



Permite visualizar las lenguas que se deseen, así como introducir nuevas. Cuenta con las siguientes opciones:

C L O S E

#Tongues 5 [0,100] (5)

Permite indicar la cantidad de lenguas a visualizar y sus sincronizaciones.

What Tongues? Muestra las lenguas que se tienen listas para ser visualizadas.

Numerics

Modificar valores de ajuste a las necesidades numéricas.

Tiene el siguiente menú:

C L O S E

Iterated Order 1 [1,10000] (1)

Determina el orden de iterada.

#Iterations 160 [0,1000] (160)

Determina la cantidad total de iteraciones que se realizan en la búsqueda de sincronizaciones.

To Take #Steps 1 [1,30] (.5)

Se elige una condición inicial aleatoriamente para iniciar las iteraciones. Aquí se determina el número de veces que se repite el proceso para diferentes condiciones iniciales y un mismo valor del parámetro que se está incrementando.

Tolerance 1.00000e-05 [1E-14,.2] (.00001)

Establece la tolerancia permitida para el cálculo de las sincronizaciones.

Select

Determina los parámetros a variar y establece los rangos.

Tiene el siguiente menú:

Election Ptr Selecciona los parámetros de bifurcación

Abre el siguiente menú:

C L O S E

a

b

c

Param Range

Establece los rangos de variación de los parámetros de bifurcación.



Este menú ofrece la posibilidad de escoger el tamaño del incremento de los parámetros pues el algoritmo de calculo de *DIENTE DE SIERRA* calcula automáticamente el paso óptimo para no hacer cálculos innecesarios. Para esto el programa reconoce la resolución del tipo de monitor con que se esté trabajando al momento de realizar esta opción.

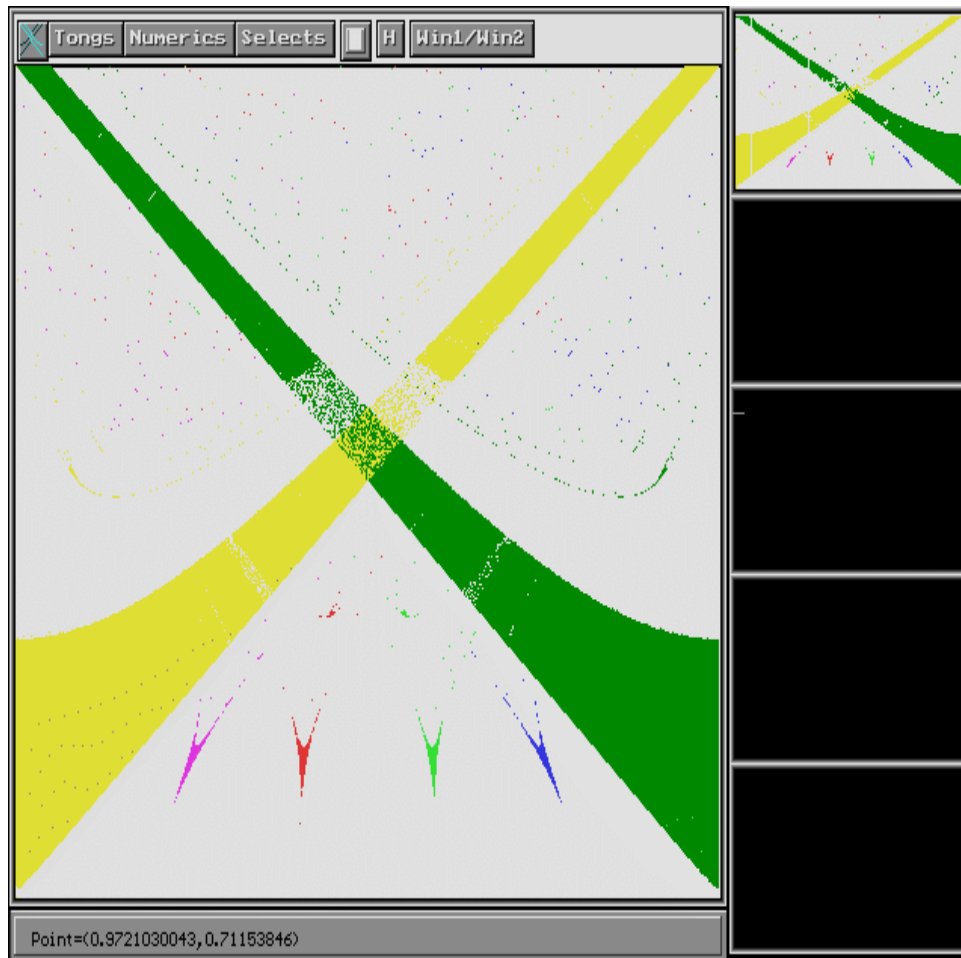


Limpia la ventana.



Proporciona ayuda.

5.6.6.4 Formato de Ventana Amplificada



Todos los elementos de la barra de iconos de este formato han sido considerados anteriormente excepto la opción:

Win1/Win2

Regresa al formato de doble ventana.

5.7 Glosario

Arrastrar

Mover texto o gráfico o seleccionar bloques de texto utilizando el mouse. Coloque el puntero del mouse en el gráfico o texto seleccionado y, a continuación presione y mantenga presionado el botón del mouse mientras desplaza el puntero a una nueva posición.

Barra de Iconos

Barra con botones de opciones utilizados para realizar alguna tarea específica.

Barra de Título

Barra horizontal situada en la parte superior de una ventana, en la que se muestra el nombre del documento o de la aplicación.

Computación

Análisis matemático de cómputos, para su optimización y automatización.

Computadora

Sistema de hardware y software que automatiza el procesamiento de datos. Dado su desarrollo tecnológico, en un principio las computadoras solo se utilizaron para hacer cálculos tediosos, actualmente se utilizan tanto en la toma de decisiones de una empresa como en el diseño de nuevas medicinas o inclusive en la demostración de teoremas. De hecho, las Ciencias de la Computación se están considerando como la primer y única rama auxiliar de las Matemáticas.

Cómputo

Sinónimo de cálculo.

Firmware

Este fue el primer componente de un sistema de computo al que no se le quiso clasificar como hardware, que en realidad lo es, solo que este término se refiere a los procesadores auxiliares que el fabricante le "añade" a sus diferentes modelos de computadoras. Actualmente este está en desuso.

Formato

Atributo que determina la forma en que aparece el texto o la aplicación en una página.

Hardware

Todos los componentes electrónicos de una computadora, incluyendo los cables para conexiones internas y externas.

Icono

Representación gráfica de un objeto de nivel de archivo (Por ejemplo, una unidad de disco, un directorio, una aplicación o un documento), que puede seleccionarse o abrirse.

Interactivo

Indica que interviene un agente externo en su realización.

Programa Interactivo

Aquel que permite la intervención del hombre para el cálculo o ejecución de alguna(s) función(es).

Ejemplo:

(Programa No Interactivo)

```
void main( )
{
int alto=8, base=5;
printf(" Area del Triángulo=", (alto*base)/2 );
}
```

(Programa Interactivo)

```
void main( )
{
int alto, base;
scanf("altura", &alto);
scanf("base", &base);
printf(" Area del Triángulo=", (alto*base)/2 );
}
```

Laboratorio de computación

Lugar donde se realizan investigaciones sobre computación.

Laboratorio de cómputo

Lugar en donde se analizan los resultados de cálculos.

Menú

Lista de comandos que se despliega desde la barra de menús.

Visual

Algo es llamado visual si cumple:

- 1) Tiene una representación gráfica, y
- 2) Es susceptible de observación.

Visual-Interactivo

Aquello en donde las variables de interacción tienen una representación gráfica.

Software

Cualquier programa para computadora. Por ejemplo: hojas de cálculo, sistemas operativos, sistemas de simulación, etc. Existe una forma de clasificación que ha sido aceptada (pero no formalizada) de acuerdo con la dificultad y magnitud del programa, así tenemos:

Rutina o Sub-rutina: algoritmo pequeño;

Algoritmo: conjunto sistematizado de sentencias que resuelven un problema específico.

Objeto: conjunto de rutinas que comparten información y que modelan una entidad o componente real o abstracto bien definido;

Programa: conjunto de objetos o rutinas que interaccionan entre sí, para resolver un problema en particular.

Módulo: conjunto de objetos que pertenecen a una misma semántica funcional.

Existen tres tipos básicos de objetos en los módulos: los de utilería, los de control o interfaz y los operativos.

Sistema: conjunto de módulos que interaccionan entre sí, para resolver un

problema complejo o de tipo general, en un área específica.

Aplicación: sinónimo de programa o sistema de software.

Unidad

Mecanismo de un sistema que hace girar un disco para recuperar y guardar información. Los sistemas personales suelen tener un disco duro etiquetado como C y dos unidades etiquetadas como A y B para leer disquetes.

Ventana

Area rectangular de la pantalla en la que se ven las aplicaciones y se trabaja con ellas. Pueden haber varias ventanas abiertas a la vez.

Zoom

Ampliar o reducir la presentación de una aplicación.

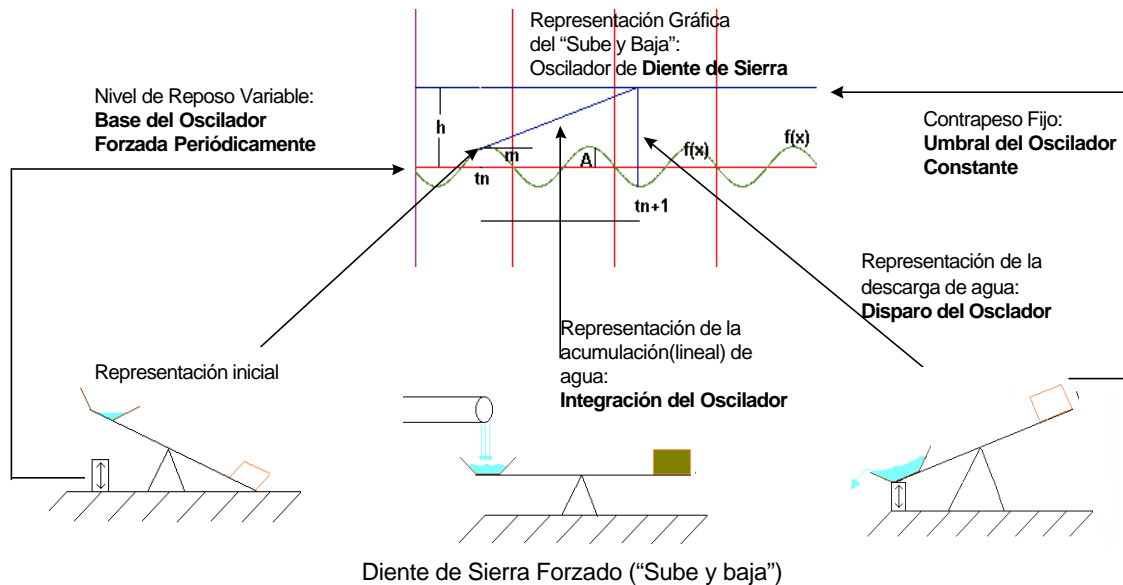
Capítulo 6: Tutorial

Osciladores de Integración y Disparo

Familia Clásica de Funciones de la Circunferencia

El problema fundamental al considerar los osciladores de Diente de Sierra es conocer las distintas dinámicas que se presentan al variar los parámetros del sistema y analizar las posibles bifurcaciones. Cuando hablamos de la dinámica de un oscilador, nos referimos a la dinámica de las sucesiones de tiempo y de fases de disparo, es decir, estamos interesados en conocer las órbitas de los sistemas dinámicos generados por la función de disparo y la función de fases de disparo.

Recordemos que la función de Arnold es la función de fases de disparo de un oscilador Diente de Sierra forzado: el “Sube y baja” de la imagen siguiente.



Para esta representación del “Sube y baja” se tienen los siguientes parámetros:

- h indicando el nivel de umbral,
- m la pendiente de disparo, y
- A la amplitud del forzamiento.

La asociación con la familia biparamétrica Clásica o de funciones de Arnold, $f(x) = x + a + b \sin(2\pi x) \pmod{1}$, se establece a partir de las relaciones siguientes: $a = h/m$ y $b = A/m$.

Analizaremos algunos problemas para ilustrar el uso del software Diente de Sierra, y comprender la dinámica de la familia de este tipo de oscilador.

1. Sucesión de Tiempos y Fases de Disparo

1.1 Comportamiento Periódico

Consideremos los siguientes valores como parámetros del oscilador:

$h=.5$	$m=1$	$A=.24$
--------	-------	---------

La primera pantalla de trabajo es utilizada para simular la dinámica de Osciladores de Diente de Sierra. Eligiendo como condición inicial $t_0=0.4$, y realizando 14 disparos se genera la Fig. 1.1:

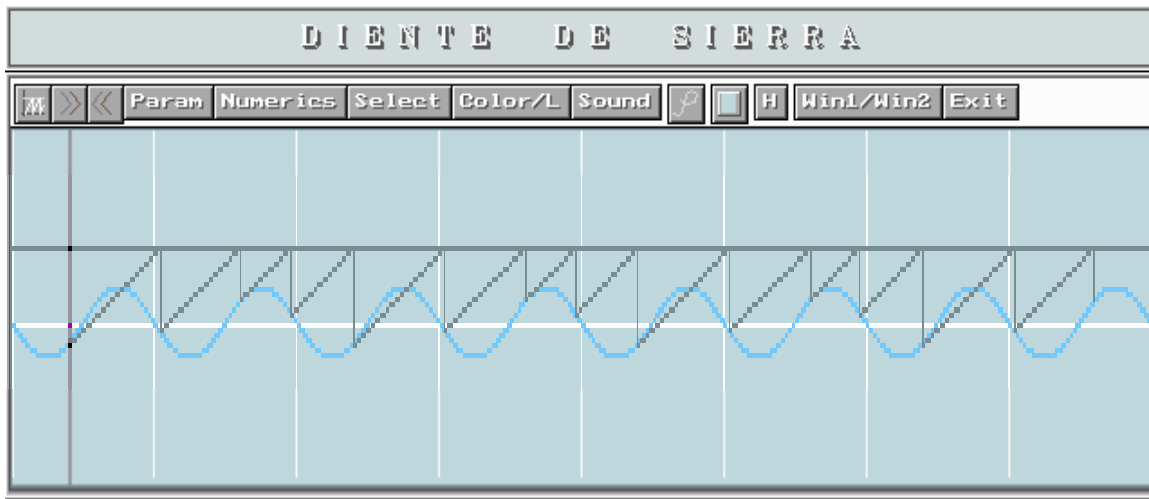


Fig. 1.1: Oscilador con condición inicial $t_0=0.4$ y 14 disparos realizados

Esta gráfica muestra el proceso de acumulación que lleva al oscilador hasta alcanzar un umbral y disparar. En él se puede apreciar un largo tiempo de acumulación en comparación con un corto tiempo de disparo.

El programa reporta los siguientes tiempos de disparo:

#Disp	Valor	#Disp	Valor	#Disp	Valor	#Disp	Valor
t_0	0.4	t_1	1.04106846	t_2	1.60231326	t_3	1.95843769
t_4	2.39647315	t_5	3.04180927	t_6	3.60413353	t_7	3.95807043
t_8	4.39557101	t_9	5.04198738	t_{10}	5.60457098	t_{11}	5.95798501
t_{12}	6.39536122	t_{13}	7.04202813	t_{14}	7.60467104		

El conjunto de valores $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots\}$ constituye la **sucesión de tiempos de disparos** del oscilador. Dado que el periodo del forzamiento es 1, para observar la **sucesión de**

fases de disparo nos fijamos en la parte fraccionaria de los valores t_n , es decir $x_n = t_n \bmod 1$.

En las ventanas inferiores, central y derecha, de la primera pantalla, se ilustra gráficamente la sucesión de fases de disparos de 2 maneras distintas:

1. Como puntos en una Circunferencia, Fig. 1.2(a) y
2. Como disparos en el Cilindro, Fig. 1.2(b)

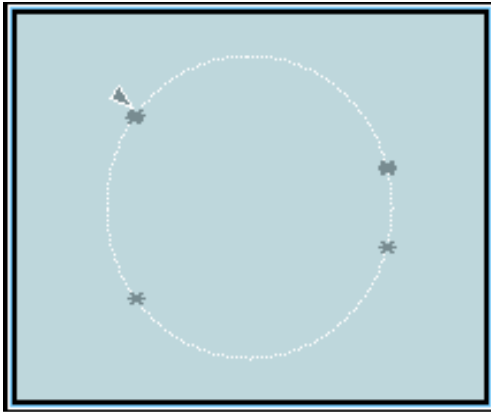
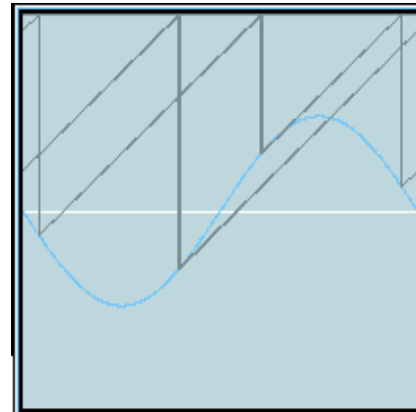


Fig 1.2: (a) Puntos en una Circunferencia



(b) Disparos en el Cilindro

En este ejemplo se muestra una órbita en la circunferencia que aparentemente es una órbita de período 4, lo que significaría que las fases de disparo se repiten cada 4 tiempos de disparo. Nos cuestionamos ¿Dicha órbita observada es realmente periódica, y si así fuera, es de periodo 4?, ¿Cómo serán las demás órbitas?, ¿Convergerán todas a esa misma órbita?

Para tratar de contestar a tales cuestiones hagamos lo siguiente:

Pasemos al formato de doble ventana y, en una de ellas abrimos el escenario gráfico **Circle Dynamics**, donde es mostrada la circunferencia. Cambiemos la condición inicial a $x=0.75$, y realizando 20 iteraciones obtenemos la Fig. 1.3:

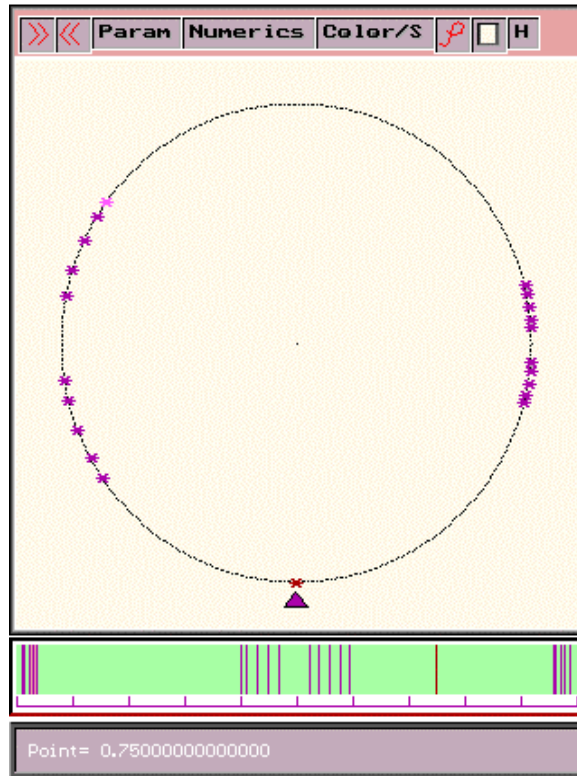


Fig. 1.3: Realización de 20 iteraciones apartir de la condición inicial $x=0.75$

Se observa, aun cuando no muy claramente, la convergencia a una órbita de período 4. Consultando el reporte de la órbita, los valores son:

#Iters & #Turns	Valor Calculado	#Iters & #Turns	Valor Calculado	#Iters & #Turns	Valor Calculado	#Iters & #Turns	Valor Calculado
0 0	.75	1 1	.01	2 1	.52506972	3 1	.98742161
4 2	.46847358	5 3	.01570401	6 3	.53934669	7 3	.98061584
8 4	.45145742	9 5	.02352825	10 5	.55887891	11 5	.97210304
12 6	.43025050	13 7	.03209561	14 7	.58016727	15 7	.96432542
16 8	.41097876	17 9	.03832859	18 9	.59556968	19 9	.95996002
20 10	.40021607						

Estos valores no indican todavía cual es la órbita límite. Realizando 20 iteraciones más obtenemos la Fig. 1.4:

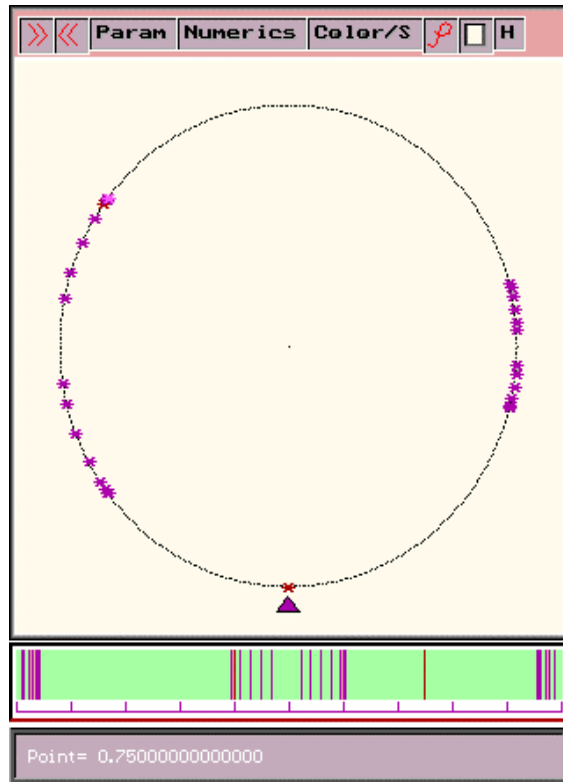


Fig. 1.4: Realización de 20 iteraciones adicionales, apartir de la última iteración realizada anteriormente ($x=0.40021607$), para observar si realmente existe alguna órbita limite

El reporte de los valores es ahora:

#Iters & #Turns	Valor Calculado	#Iters & #Turns	Valor Calculado	#Iters & #Turns	Valor Calculado	#Iters & #Turns	Valor Calculado
0 0	.40021607	1 1	.04102080	2 1	.60219611	3 1	.95846198
4 2	.39653281	5 3	.04179733	6 3	.60410419	7 3	.95807620
8 4	.39558518	9 5	.04198462	10 5	.60456200	11 5	.95798632
12 6	.39536446	13 7	.04202750	14 7	.60466951	15 7	.95796592
16 8	.39531435	17 9	.04203720	18 9	.60469331	19 9	.95796132
20 10	.39530305						

Ahora si se puede inferir, con precisión de milésimas, la órbita límite: { **0.04203720, 0.60469331, 0.95796132, 0.39530305** }

Al proceso anteriormente descrito de:

- Considerar alguna condición inicial,
- Realizar repetidamente determinada cantidad de iteraciones para observar si existe convergencia hacia alguna órbita periódica,

lo llamaremos **protocolo de búsqueda de órbitas periódicas**.

Al comparar los valores obtenidos, con aquellos que se originaron a partir de iterar $x=0.4$, podemos concluir que se esta convergiendo a la misma órbita. De estas observaciones podemos inferir que tenemos una órbita de período 4. Hecho confirmado al visualizar la órbita en el escenario gráfico **Torus Dynamics** (Fig. 1.5).

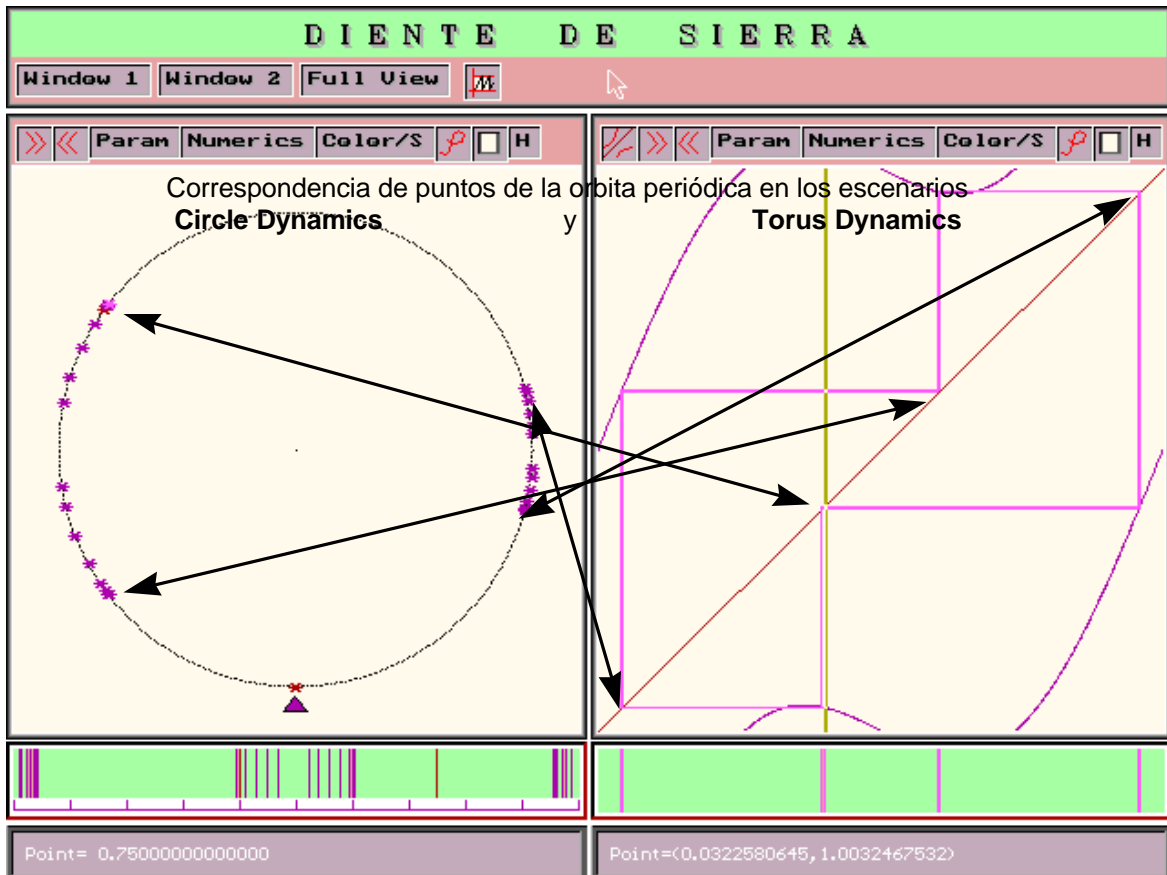


Fig. 1.5: Convergencia hacia una órbita periódica de periodo 4
Localización de los puntos de la órbita en los escenarios
Circle Dynamics y **Torus Dynamics**

Desde el punto de vista del “Sube y baja”, este comportamiento significa, que sin importar desde donde inicie el movimiento, las fases de disparo convergerán asintóticamente a los valores de la órbita. De tal modo que las descargas terminarán siempre ocurriendo cuando el elevador se encuentre en las posiciones de: Su altura multiplicadas por el valor de los puntos de la órbita.

En nuestro caso las descargas ocurren a cuatro alturas diferentes, a saber {0.04203720, 0.39531435, 0.60469331 y 0.95796132} multiplicados por la altura del elevador.

1.2 Comportamiento Cuasiperiódico

Consideremos los siguientes valores como parámetros del oscilador:

$h=.330578$	$m=1$	$A=0$
-------------	-------	-------

Eligiendo como condición inicial $t_0=0.2$, y realizando 22 disparos se genera la Fig. 1.6:

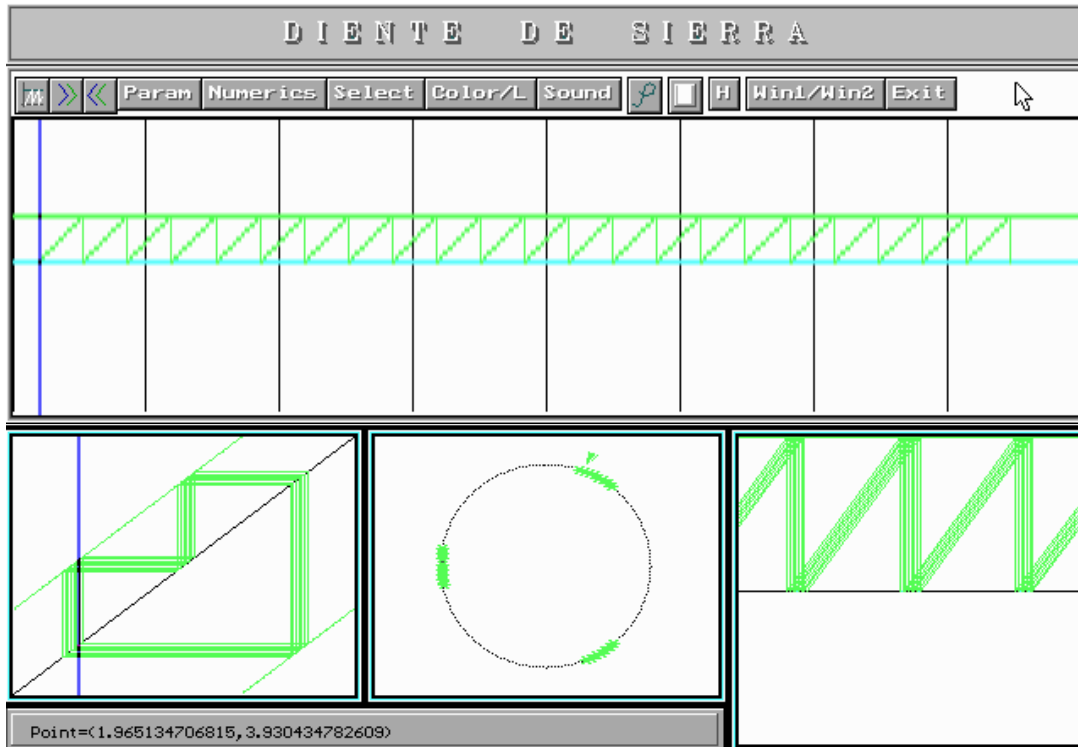


Fig. 1.6: Oscilador con condición inicial $t_0=0.2$ y 22 disparos realizados
Se visualizan también los escenarios Circle y Torus Dynamics, y Cylinder

El programa reporta los siguientes tiempos de disparo:

#Disparo	Valor	#Disparo	Valor	#Disparo	Valor
t_0	0.2	t_1	0.530578	t_2	0.861156
t_3	1.191734	t_4	1.522312	t_5	1.852890
t_6	2.183468	t_7	2.514046	t_8	2.844624
t_9	3.175202	t_{10}	3.505780	t_{11}	3.836358
t_{12}	4.166936	t_{13}	4.497514	t_{14}	4.828092
t_{15}	5.158670	t_{16}	5.489248	t_{17}	5.819826
t_{18}	6.150404	t_{19}	6.480982	t_{20}	6.811560
t_{21}	7.142138	t_{22}	7.472716		

Observamos en los escenarios gráficos **Circle Dynamics** y **Torus Dynamics** de la figura 1.6 un comportamiento aperiódico, pero bastante regular de una órbita. En un principio, la órbita es aproximadamente de periodo 3, pero tiene un pequeño corrimiento, el cual puede ser confirmado al observar los valores de los disparos obtenidos.

De hecho nos damos cuenta que $\frac{1}{2} t_{n+1} - t_n \frac{1}{2} = h \cdot n \hat{N} \in \{0\}$, además $\frac{1}{2} t_{n+3} - t_n \frac{1}{2}$ es pequeño, ¿Será siempre esto cierto?

Aplicando el criterio del protocolo de búsqueda de órbitas periódicas tenemos la Fig. 1.7 y los resultados siguientes:

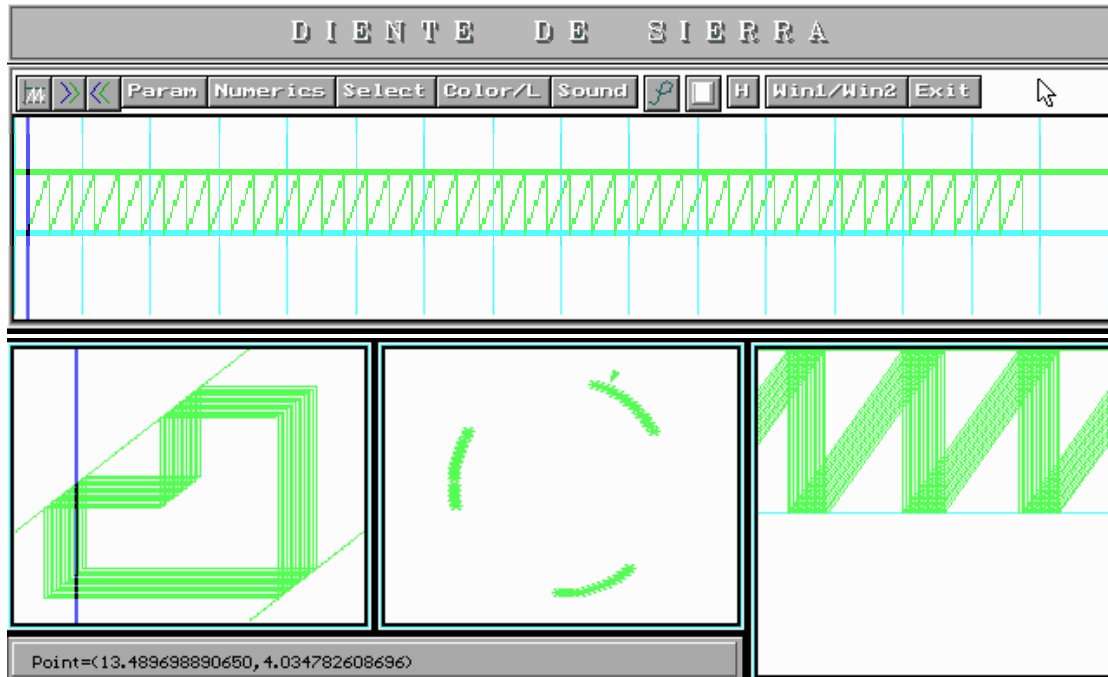


Fig. 1.7: 22 disparos adicionales, apartir de la condición inicial $t_0=7.472716$

Los valores de los tiempos de disparos calculados son:

#Disparo	Valor	#Disparo	Valor	#Disparo	Valor
t_0	7.472716	t_1	7.803294	t_2	8.133872
t_3	8.464450	t_4	8.795028	t_5	9.125606
t_6	9.456184	t_7	9.786762	t_8	10.117340
t_9	10.447918	t_{10}	10.778496	t_{11}	11.109074
t_{12}	11.439652	t_{13}	11.770230	t_{14}	12.100808
t_{15}	12.431386	t_{16}	12.761964	t_{17}	13.092542
t_{18}	13.42312	t_{19}	13.753698	t_{20}	14.084276
t_{21}	14.414854	t_{22}	14.745432		

Con estos resultados confirmamos que $\frac{1}{2} t_{n+1} - t_n \frac{1}{2} = h \cdot n \hat{N} \in \{0\}$, y $\frac{1}{2} t_{n+3} - t_n \frac{1}{2}$ es pequeño. Además se observa que la órbita va llenando densamente toda la circunferencia (Fig. 1.8)

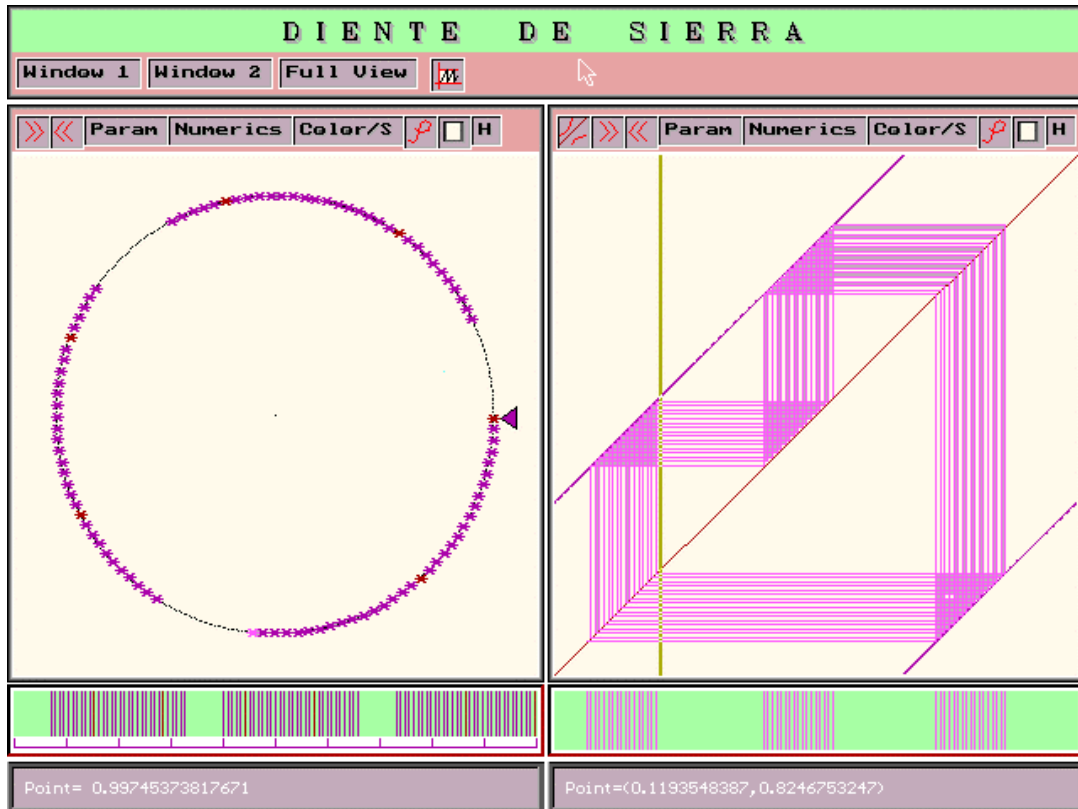


Fig. 1.8: Corrimiento de una órbita periódica de periodo 3

Da la impresión que la órbita no se va a cerrar nunca, pero la realidad es que el sistema tiene una órbita de periodo N muy grande ($N=330, 578$), pero no podemos observar gráficamente que se cierre, pues (debido al tamaño de los píxeles) antes de que esto ocurra se llena la pantalla.

Un análisis teórico nos garantiza que si el valor del parámetro a fuera irracional entonces la órbita nunca se cerraría. Esto es lo que se conoce como **cuasi-periodicidad**, debido a que la órbita no se cierra, pero siempre esta muy cerca de cerrarse, en el sentido de que siempre regresa a una vecindad (de radio arbitrariamente pequeño) de cualquiera de los puntos de ella.

Desde el punto de vista del “Sube y baja”, este comportamiento significa, que eventualmente dispara a cualquier altura.

1.3 Comportamiento Biestable

Consideremos los siguientes valores para los parámetros del oscilador:

$h=.5$	$m=1$	$A=.675$
--------	-------	----------

Elijiendo las condiciones iniciales siguientes:

$t_0=0.710$
$t_0=0.1935$

realizamos 14 iteraciones, obteniendo la Fig. 1.9:

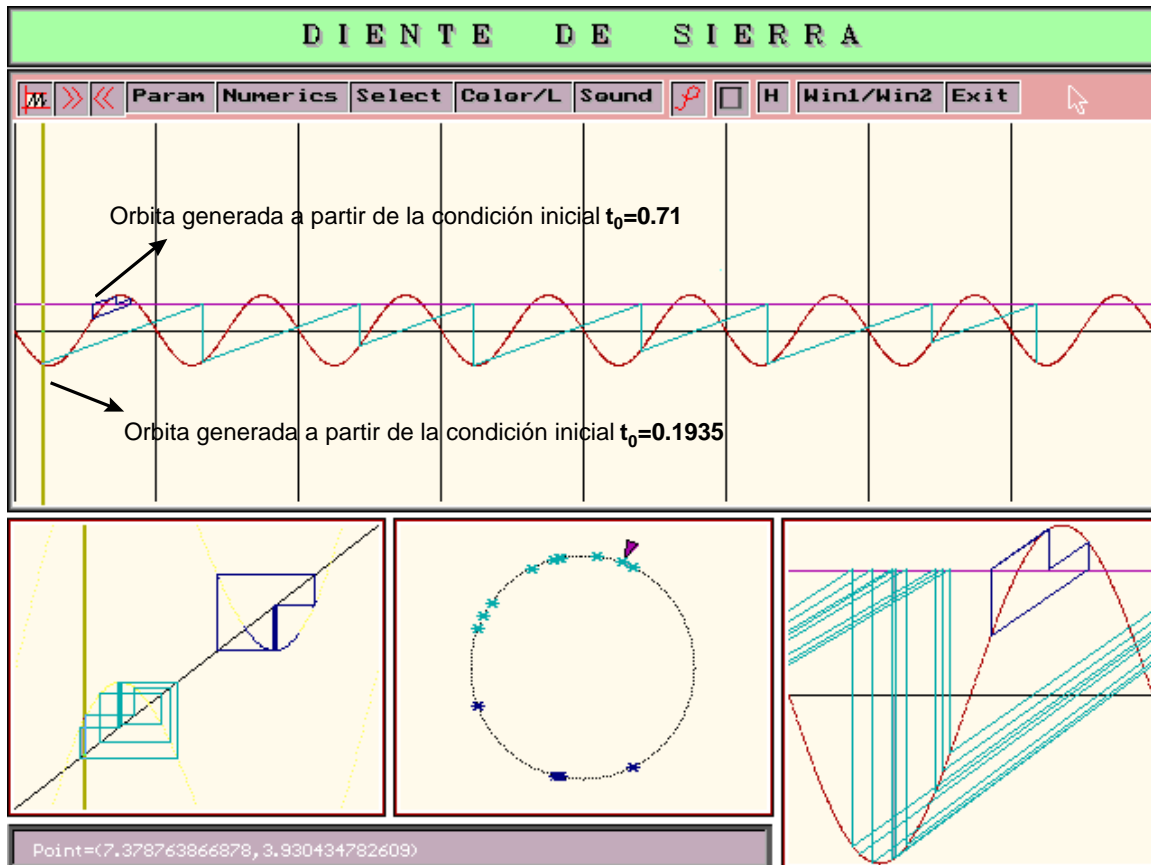


Fig. 1.9: Fenómeno de Biestabilidad

El programa reporta los siguientes tiempos de disparo:

- Con condición inicial $t_0=0.1935$

#Disparo	Valor	#Disparo	Valor	#Disparo	Valor
t_0	0.1935	t_1	1.32641139	t_2	2.42509963
t_3	3.23116665	t_4	4.40144622	t_5	5.29322273
t_6	6.44348345	t_7	7.17817273	t_8	8.28559115
t_9	9.44378350	t_{10}	10.17727920	t_{11}	11.28303526
t_{12}	12.44354657	t_{13}	13.17798484	t_{14}	14.28505529

- Con condición inicial $t_0=0.71$

#Disparo	Valor	#Disparo	Valor	#Disparo	Valor
t ₀	.71	t ₁	.55620637	t ₂	.82275098
t ₃	.71705141	t ₄	.556445	t ₅	.82198235
t ₆	.71485110	t ₇	.55624533	t ₈	.82263489
t ₉	.71671818	t ₁₀	.55642316	t ₁₁	.82210328
t ₁₂	.71520204	t ₁₃	.55627183	t ₁₄	.82255595

Estos valores muestran convergencia a dos órbitas distintas, de periodo 3 cada una de ellas. En las ventanas inferiores, izquierda y central, de la primera pantalla, que corresponden a los escenarios gráficos **Torus Dynamics** y **Circle Dynamics** respectivamente, se pueden observar las gráficas correspondientes.

Para conocer las cuencas de atracción de las correspondientes órbitas, será necesario variar la condición inicial para darnos una idea aproximada de tales cuencas.

Desde el punto de vista del “Sube y baja”, este comportamiento significa, que dependiendo donde inicie el movimiento, las fases de disparo convergerán asintóticamente a alguna de estas dos órbitas. De tal modo que las descargas dependerán de los valores de la órbita a la cual sus fases hayan convergido.

1.4 Comportamiento Caótico

Consideremos los siguientes valores de los parámetros del oscilador:

h=0.25	m=1	A=0.5
---------------	------------	--------------

Eligiendo como condición inicial $t_0=0.3$, apliquemos el protocolo de búsqueda de órbitas periódicas para ver si es posible encontrar alguna. Realizando 50 disparos, obtenemos la Fig. 1.10:

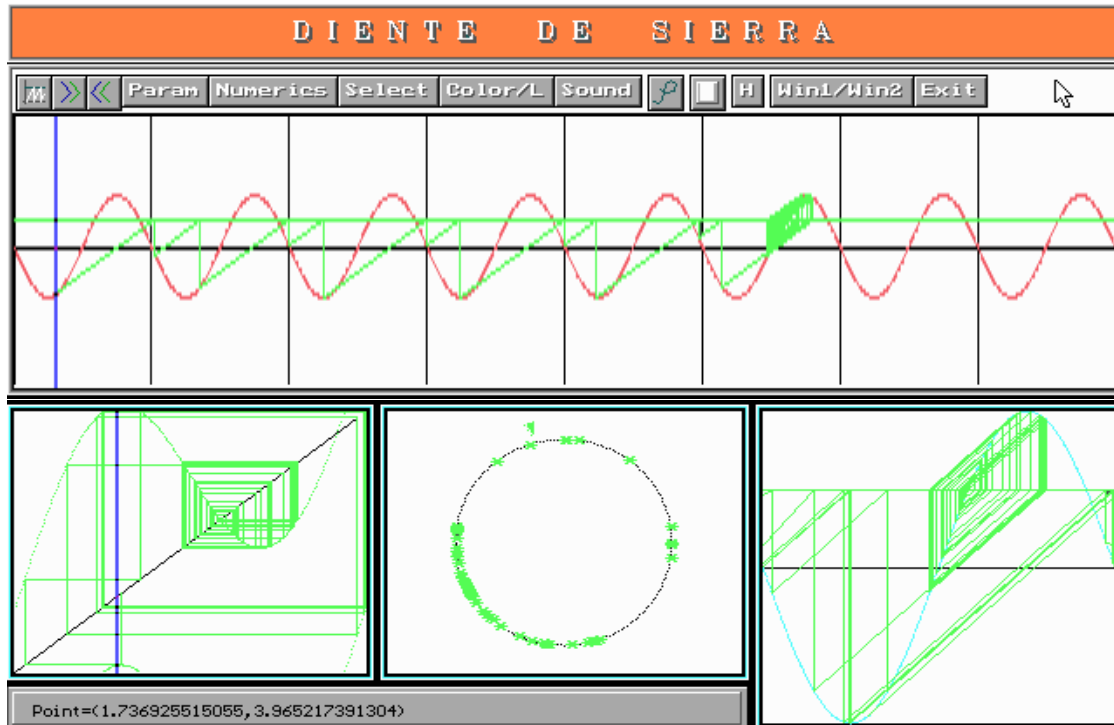


Fig. 1.10: 50 Disparos a partir de $t_0=0.3$

Los resultados obtenidos fueron:

#Disp	Valor	#Disp	Valor	#Disp	Valor	#Disp	Valor
t_0	0.3	t_1	1.02552826	t_2	1.35538420	t_3	1.99972078
t_4	2.24884359	t_5	2.99883039	t_6	3.24515597	t_7	3.99492440
t_8	4.22898165	t_9	4.97462788	t_{10}	5.14525621	t_{11}	5.79082654
t_{12}	5.55718725	t_{13}	5.63136927	t_{14}	5.51395378	t_{15}	5.72017283
t_{16}	5.47892775	t_{17}	5.79493492	t_{18}	5.56473108	t_{19}	5.61693278
t_{20}	5.53174666	t_{21}	5.68267165	t_{22}	5.47674837	t_{23}	5.79953596
t_{24}	5.57355923	t_{25}	5.60060621	t_{26}	5.55517498	t_{27}	5.63528891
t_{28}	5.50963376	t_{29}	5.72938689	t_{30}	5.48357463	t_{31}	5.78508490
t_{32}	5.54718478	t_{33}	5.65111142	t_{34}	5.49456047	t_{35}	5.76164593
t_{36}	5.51298392	t_{37}	5.72223896	t_{38}	5.47982596	t_{39}	5.79303500
t_{40}	5.56120252	t_{41}	5.6236330	t_{42}	5.52312932	t_{43}	5.700721921
t_{44}	5.47449771	t_{45}	5.80427311	t_{46}	5.58306409	t_{47}	5.58379697
t_{48}	5.58253662	t_{49}	5.58470737	t_{50}	5.58097840		

No es posible observar ninguna periodicidad en la órbita; más bien se observa un comportamiento errático alrededor de un cierto intervalo, haciendo que la órbita vaya llenando densamente dicho intervalo (un arco) del círculo. Hecho patentado al observar los resultados.

Sin embargo podemos preguntarnos si: ¿Todas las órbitas convergerán a este intervalo de atracción?

Para contestar tal cuestión, necesitamos variar la condición inicial para tener una idea de lo que sucede con dichas órbitas. Veamos la Fig. 1.11, en donde se realizaron 120 iteraciones a partir de cada condición inicial.

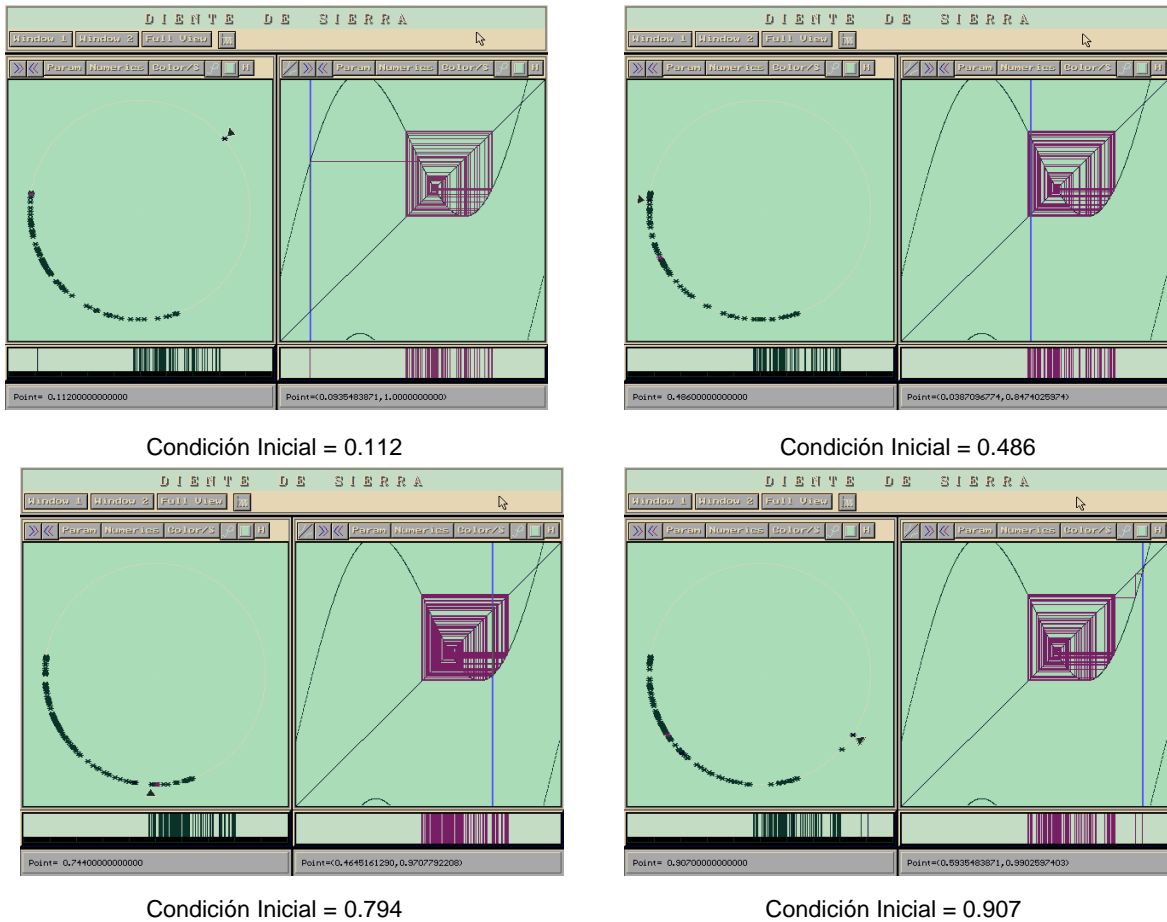


Fig. 1.11: Comportamientos de las órbitas con distintas condiciones iniciales

Es claro por las imágenes que casi todos los puntos son atrapados por la misma región. Decimos casi todos los puntos pues, al elegir como condición inicial al **0**, obtuvimos una órbita periódica de periodo 2, ver Fig. 1.12:

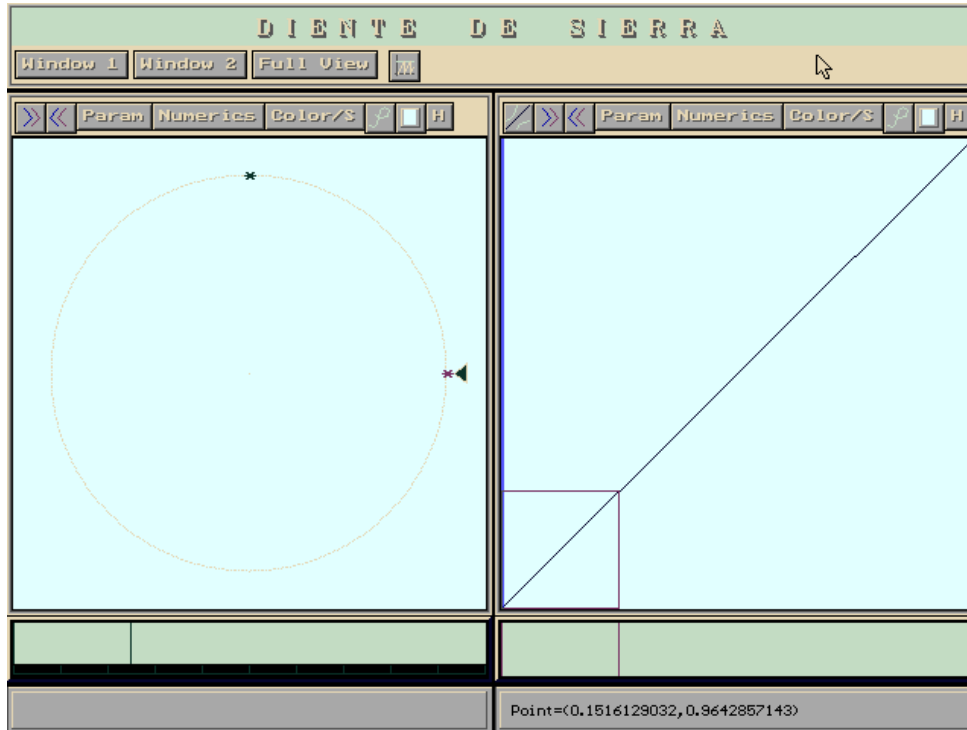


Fig. 1.12: Órbita periódica (periodo 2) al elegir como condición inicial al 0

Al elegir a **0** como condición inicial, obtenemos una órbita periódica de periodo 2.

Desde el punto de vista del “Sube y baja”, este comportamiento significa, que las fases de disparo son impredecibles, aún cuando podemos asegurar que estarán acotadas en un intervalo de fases.

2. Estabilidad e Inestabilidad

Sabemos que las órbitas periódicas se corresponden con los puntos fijos de las iteradas de orden igual al periodo de la órbita, y la estabilidad de estas puede determinarse por el valor de la pendiente de la gráfica en el punto fijo:

- a) Si en valor absoluto es menor que 1, entonces es asintóticamente estable.
- b) Si en valor absoluto es mayor que 1, entonces es inestable.

2.1 Estabilidad e Inestabilidad para el caso Periódico

Consideremos nuevamente el ejemplo de la sección 1.1, y grafiquemos en el escenario **Torus Dynamics** la iterada de orden 4. Veamos la Fig. 2.1:

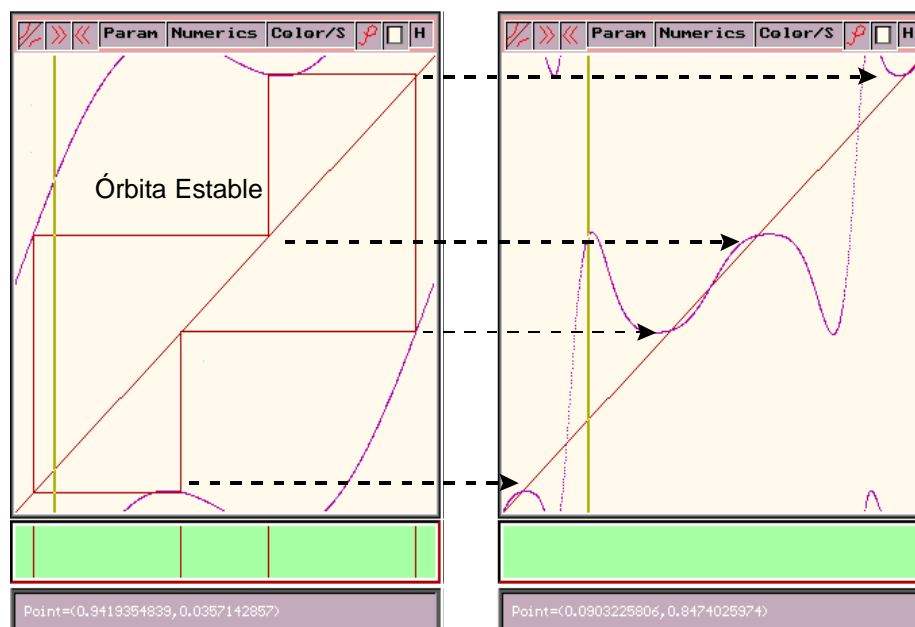


Fig. 2.1: Iterada de orden 1(izquierda) 2(derecha), con valores en los parámetros $a=0.5$ y $b=0.25$

En la segunda ventana se observan 8 puntos fijos, de acuerdo a las pendientes, 4 de ellos corresponden a la órbita de periodo 4 estable que se observó en la sección 1.1. Los otros 4 corresponden a una órbita inestable. En efecto, consideremos como condición inicial un punto cercano a la órbita inestable y apliquemos el protocolo de búsqueda de órbitas periódicas. Ver Fig. 2.2:

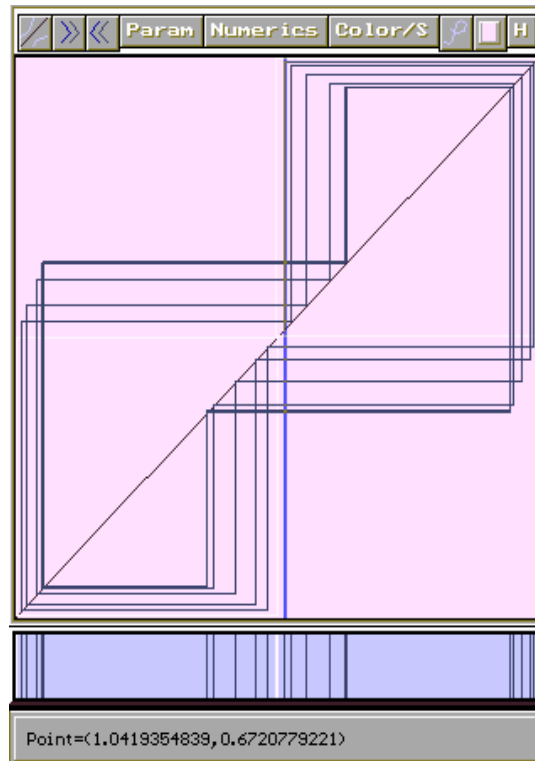


Fig. 2.2: Órbita de inestable (Color Blanco)

Al elegir una condición inicial cercana a la órbita inestable, observamos como la órbita se va alejando de los puntos inestables. De hecho, dicha órbita inestable es de periodo 2, por lo cual debe existir otra de periodo 2 también inestable, pues la órbita estable es de periodo 4.

2.2 Estabilidad e Inestabilidad para el caso Cuasiperiódico

Para este caso, todas las órbitas son inestables en el sentido de Lyapounov. Sin embargo, después de una determinada cantidad de iteraciones la órbita pasa arbitrariamente cerca de la condición inicial tanto como uno lo desee, y podemos repetir este proceso, dicho fenómeno lo conoceremos como “Cuasi-estabilidad”.

2.3 Estabilidad e Inestabilidad para el caso Biestable

Ahora veamos las gráficas de las iteradas de orden 1 y 3 del ejemplo de la sección 1.2 (Ver Fig. 2.3):

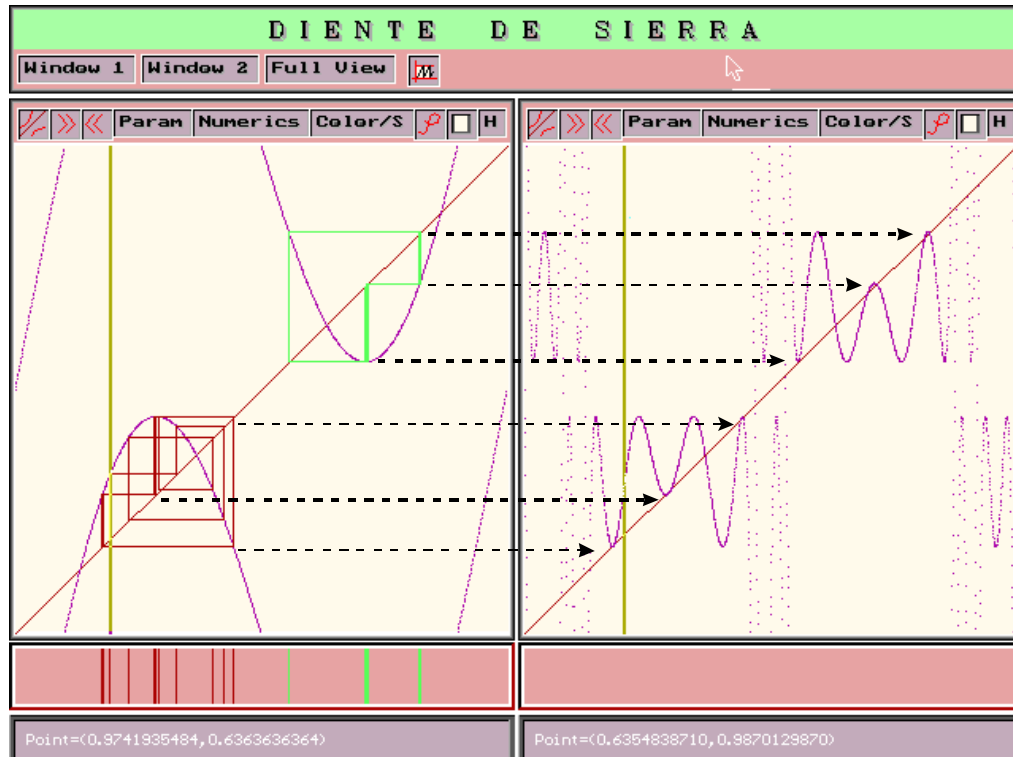


Fig. 2.3: Iterada de orden 1(izquierda) y 3(derecha), con valores en los parámetros $a=0.5$ y $b=0.675$

Se observa en la gráfica de la iterada de orden 3, los puntos fijos asintóticamente estables que corresponden a las órbitas de periodo 3 atractoras. La iterada de orden 3 tiene más puntos fijos inestables, algunos corresponden a los puntos fijos de la primera iterada, pero los otros corresponden a otras órbitas inestables. ¿De que periodo serán?

2.4 Estabilidad e Inestabilidad para el caso Caótico

En el ejemplo de la sección 1.4 observamos que las órbitas generalmente convergían de una manera irregular a un intervalo, llenándolo densamente. Sin embargo, es posible encontrar también comportamientos periódicos. Grafiquemos varias iteradas, ver Figs. 2.4, 2.5 y 2.6

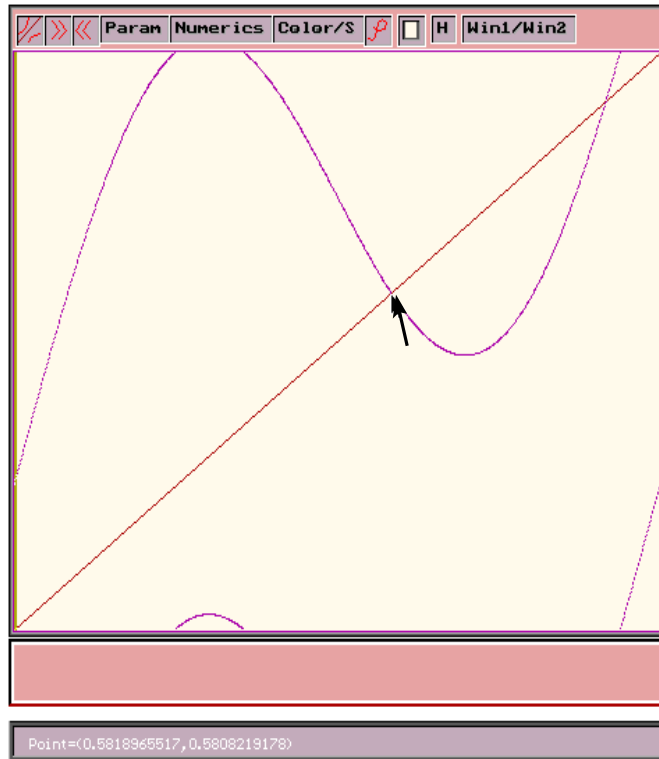


Fig. 2.4: Iterada de orden 1 (Mostrando un punto fijo)

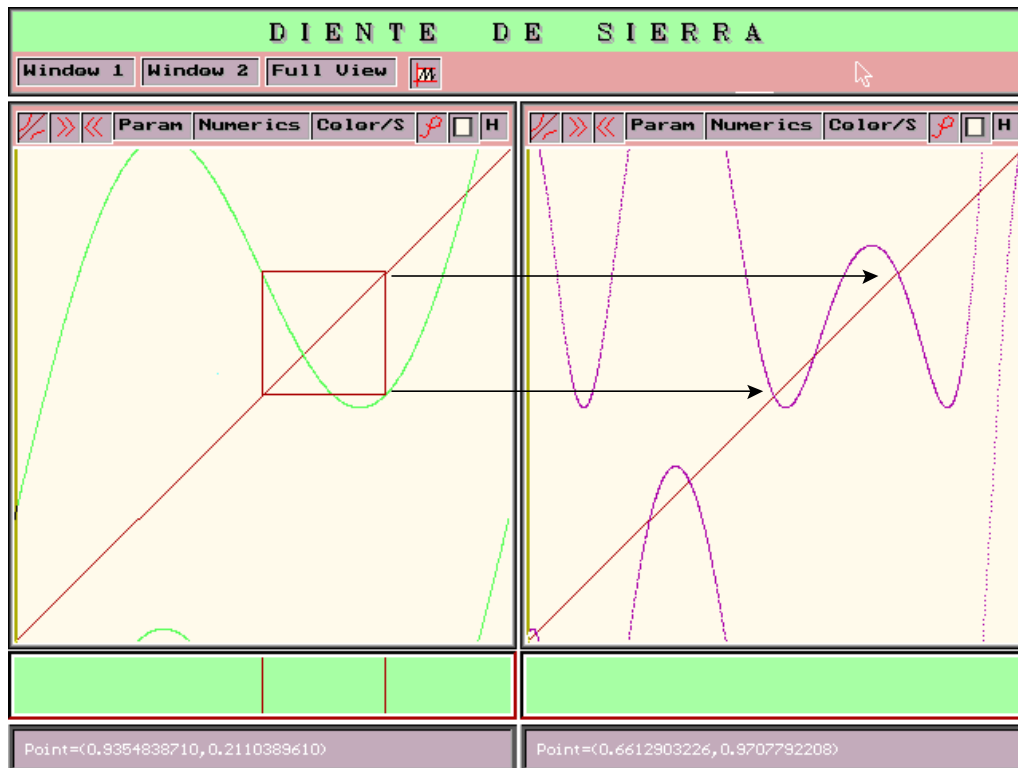


Fig. 2.5: Iterada de Orden 1 (Izquierda) Mostrando la órbita de Periodo 2
 Iterada de Orden 2 (Derecha) Mostrando los puntos fijos de la órbita de periodo 2

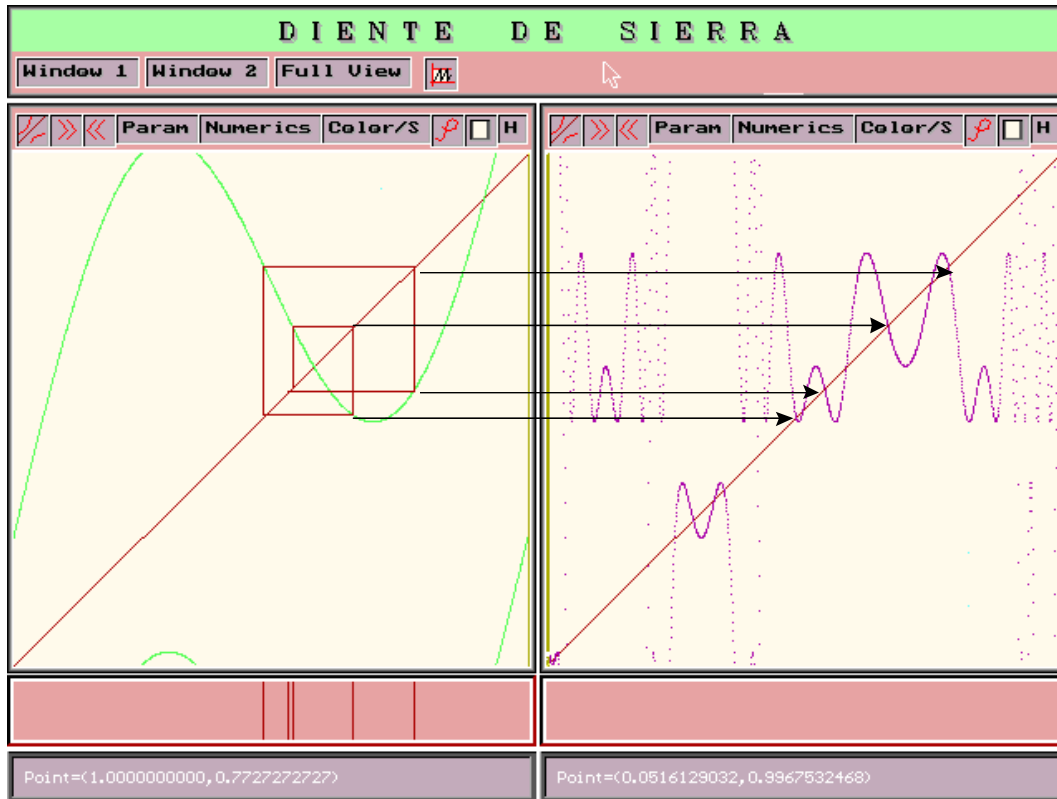


Fig. 2.6: Iterada de Orden 1 (Izquierda) Mostrando la órbita de Periodo 4
Iterada de Orden 4 (Derecha) Mostrando los puntos fijos de la órbita de periodo 4

Hay varias órbitas periódicas: Iniciando con un punto fijo, después una órbita de periodo 2 y posteriormente una de periodo 4. Observando las pendientes, vemos que éstas órbitas son inestables. Este ejemplo ilustra algunas de las características del Caos: Órbitas aperiódicas irregulares y densas, y órbitas periódicas inestables de varios periodos.

3. Número de Lyapounov

Consideremos los valores de los parámetros siguientes:

a	b
0.45	0.65

Veamos cual es el número de Lyapounov para dos condiciones iniciales dadas, a saber:

$$x_0 = 0.154839$$

$$x_1 = 0.16$$

Observemos la Fig. 3.1:

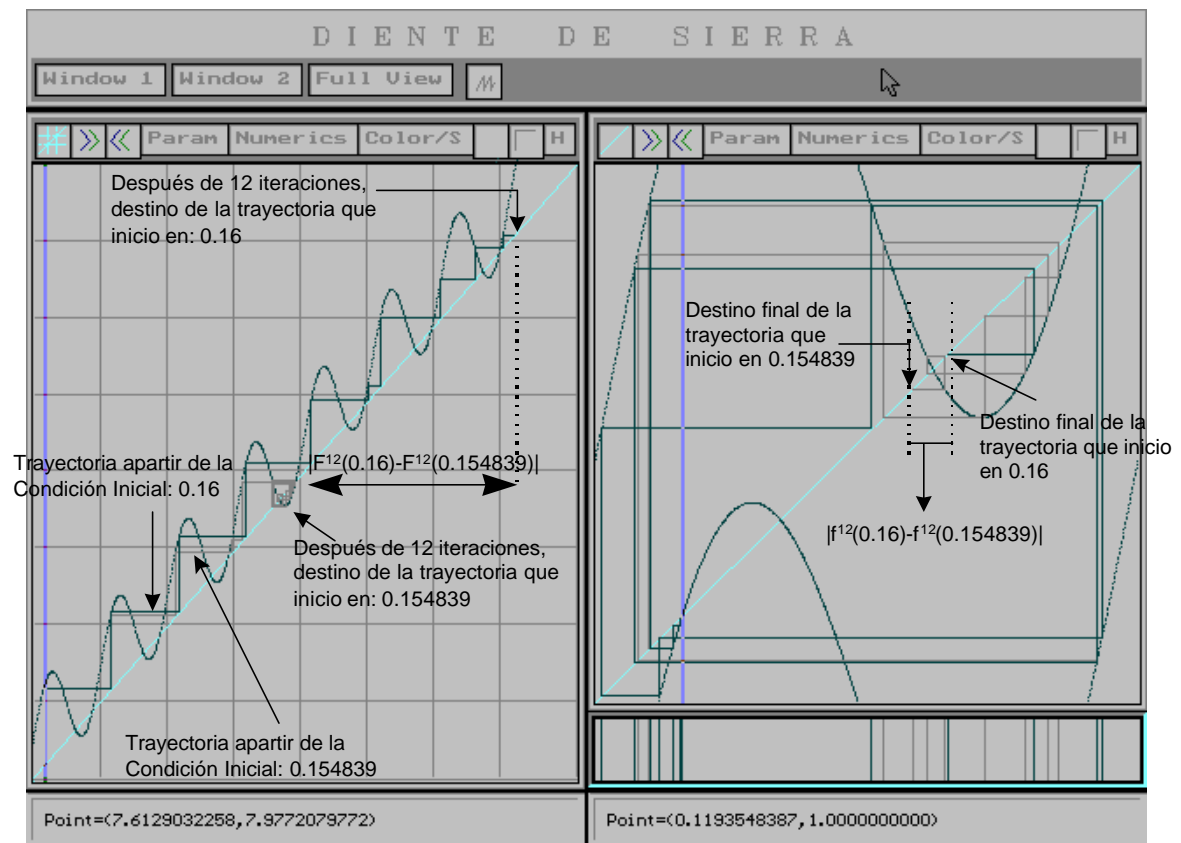


Fig. 3.1: Trayectorias de las órbitas que tienen como punto de partida $x_0 = 0.154839$ y $x_1 = 0.16$

La imagen anterior muestra los destinos finales de dos trayectorias que iniciaron con condiciones relativamente cercanas, distando sólo 0.005161.

Después de 12 iteraciones distan en el escenario Lifts: 4.065064, y en el escenario Torus Dynamics: 0.065064. Claramente se observa en el escenario Lifts la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales.

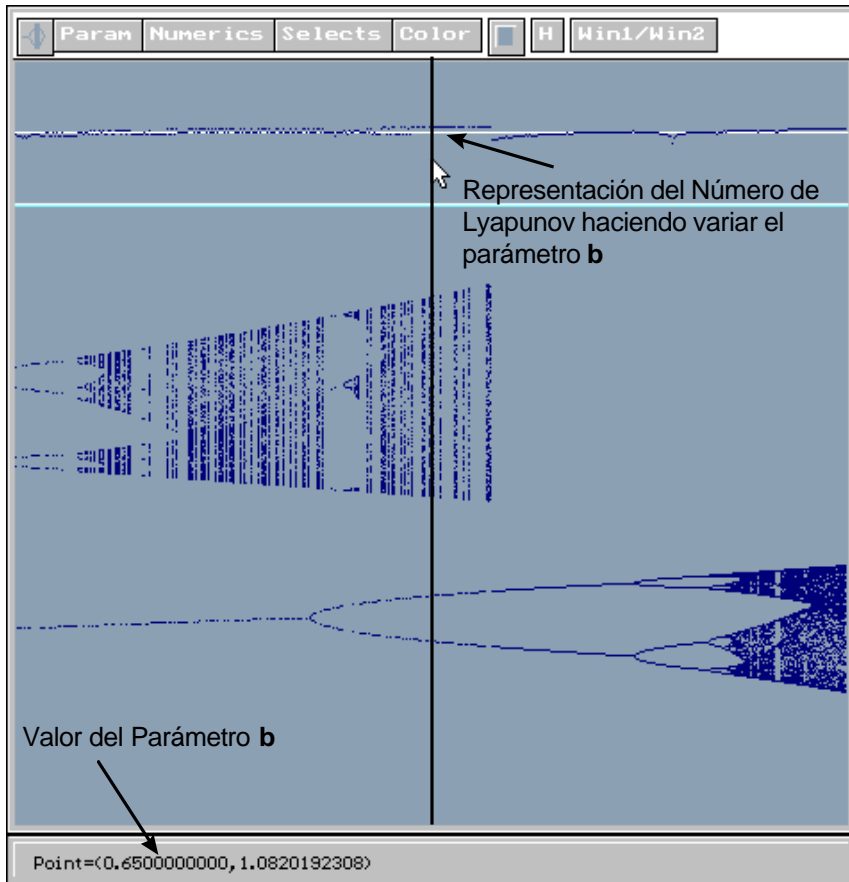


Fig. 3.2: Diagrama de Bifurcación con $a=0.45$ y $b \in [0.6, 0.7]$

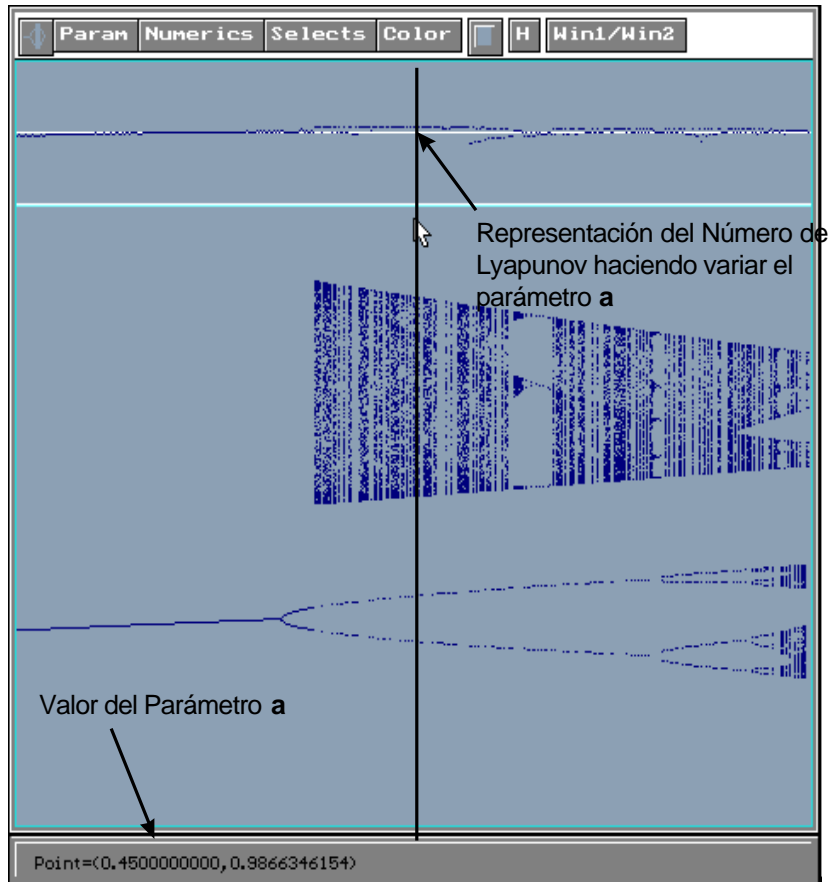


Fig. 3.3: Diagrama de Bifurcación con $b=0.65$ y $\hat{a} \in [0.4, 0.5]$

Estas imágenes nos permiten encontrar el valor del número de Lyapunov en ambas direcciones (**a** y **b**). Indicando que hay sensibilidad en el sistema.

4. Cambios Cualitativos en la Dinámica

Es lógico pensar que al variar los parámetros del sistema la dinámica debe cambiar. En la familia clásica se presentan dos tipos de estos cambios, los cuales mostraremos en la presente sección.

4.1 Cambio Cualitativo de Doblamiento de Periodo

Consideremos los siguientes valores de los parámetros para la función de Arnold:

a=0.25	b=0.35	Fig. 4.1: (Izquierda)
	b=0.425	(Derecha)
	b=0.475	Fig. 4.2: (Izquierda)
	b=0.4825	(Derecha)

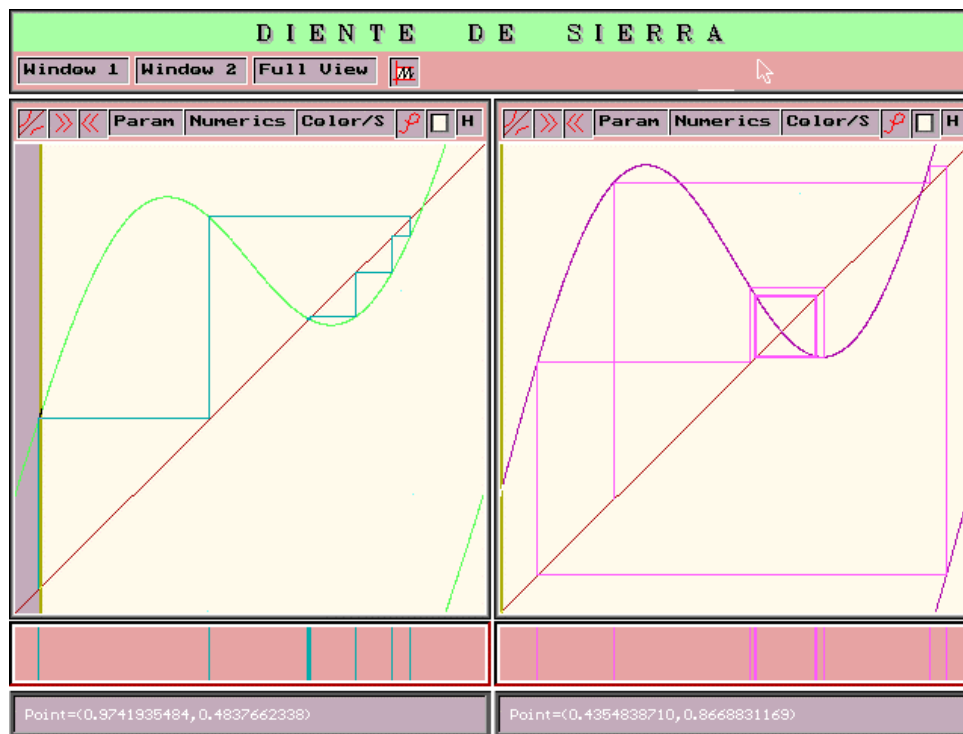


Fig. 4.1: Gráficas con los parámetros:

a=0.25	b=0.35	Izquierda: Punto Fijo
a=0.25	b=0.425	Derecha: Órbita de Periodo 2

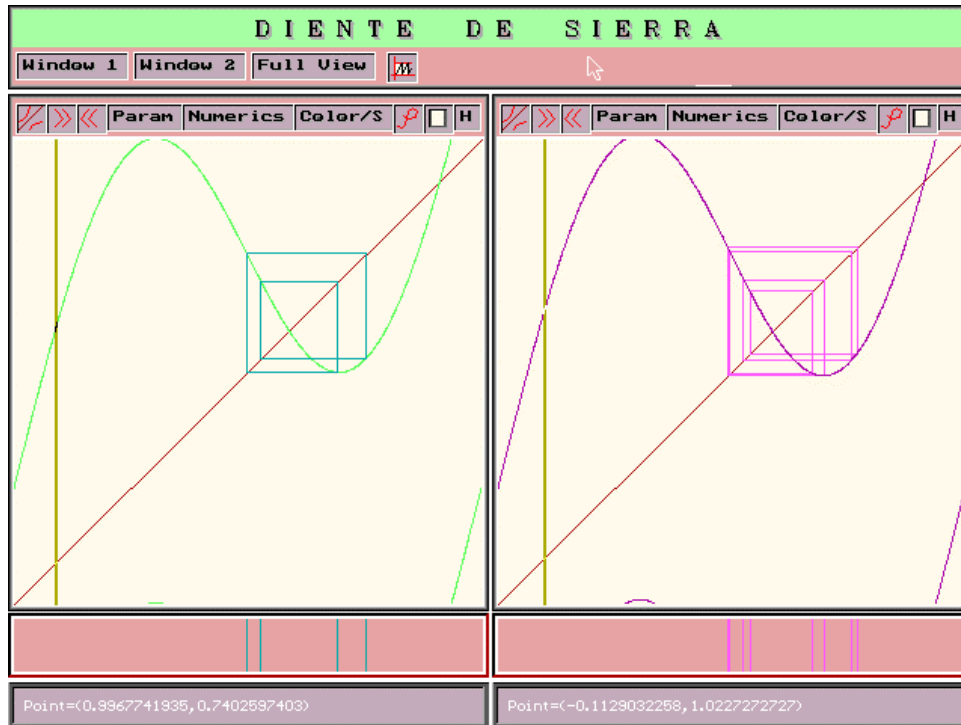


Fig. 4.2: Gráficas con los parámetros:

$a=0.25$	$b=0.475$	Izquierda: Órbita de Periodo 4
$a=.25$	$b=.4825$	Derecha: Órbita de Periodo 8

Observamos que fijando el parámetro a con un determinado valor y variando b la dinámica del sistema cambia pues, de acuerdo a las figuras 4.1 y 4.2, tenemos un punto fijo y luego se obtiene: una órbita periódica de periodo 2, una de periodo 4, una de periodo 8, y así sucesivamente. Conduciéndonos a pensar que al ir aumentando el parámetro b seguirán apareciendo órbitas cuyos periodos son potencias crecientes de 2.

Obsérvese que la variación del parámetro b , necesaria para la transición de un punto fijo a una órbita de periodo 2 es un determinado valor, pero de la órbita de periodo 2 a la de periodo 4 dicho valor se reduce, y lo mismo sucede al pasar de ésta última a la órbita de periodo 8. ¿Acaso, la longitud del intervalo del parámetro b para los cuales se tiene un punto fijo, es más grande que la longitud del intervalo donde encontramos órbitas de periodo 2, y a su vez éste intervalo es más grande que aquel para el cual encontramos órbitas de periodo 4, y así sucesivamente? ¿Existirá alguna relación en los tamaños de estos?

Al pasar de uno a otro de estos intervalos, se encuentra una órbita de tamaño el doble a la anterior, ¿Qué pasa con la órbita anterior? ¿Desaparece? ¿Porqué la dinámica cambia de esa manera?

Un recurso útil para observar estos cambios cualitativos, consiste en hacer diagramas de bifurcación. Para ello pasemos al escenario gráfico **Bifurcations**.

En el eje vertical de los diagramas de éste escenario se grafican las órbitas de la función cuyos parámetros se refieren en el eje horizontal. En la parte superior de este escenario

aparece un concepto importante en la detección de sistemas sensibles a condiciones iniciales, conocido como número de Lyapounov.

Fijemos el parámetro $a=0.25$ como lo hemos hecho en los diagramas anteriores y variemos el parámetro b en el rango $[0.35, 0.4825]$, el diagrama obtenido será el de la Fig. 4.3:

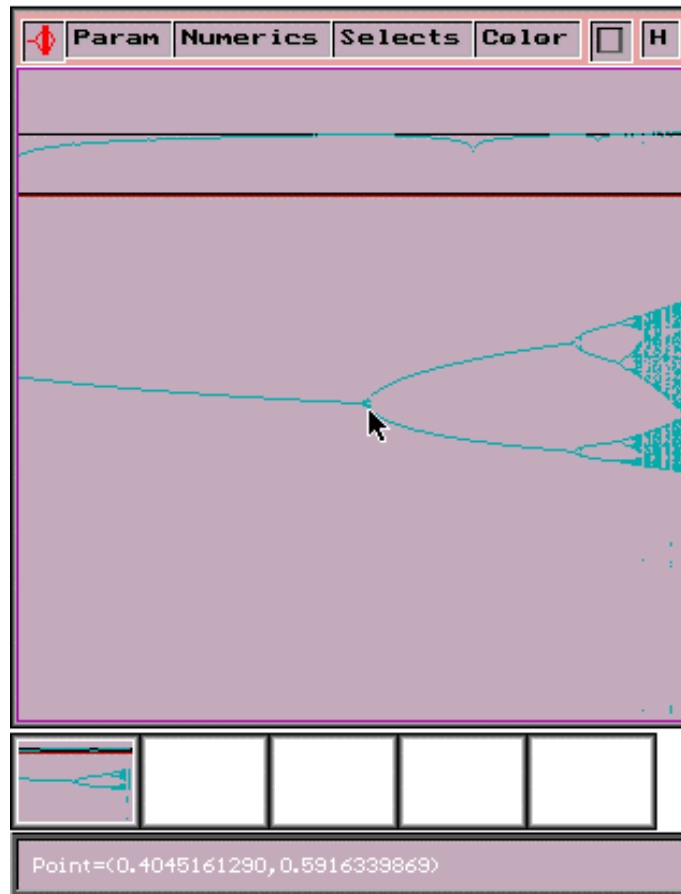


Fig. 4.3: Diagrama de Bifurcación con $a=0.25$ y $b \in [0.35, 0.4825]$

Observamos como va cambiando la dinámica, y efectivamente la longitud del intervalo del parámetro b donde podemos encontrar puntos fijos es mayor que la longitud del intervalo en donde podemos encontrar órbitas periódicas de periodo 2, y la longitud del intervalo en donde podemos encontrar órbitas de periodo 4 es todavía más pequeño que esta última, y así sucesivamente.

Una pregunta interesante, y muy importante para el estudio cualitativo de familias de sistemas dinámicos, es: ¿Cual es el valor donde cambia la dinámica?.

El valor del parámetro donde cambia la dinámica se conoce como **valor de bifurcación**.

En el diagrama de bifurcaciones, recordemos que el valor donde cambia de punto fijo a periodo 2, es aproximadamente **0.4040238474**

En el formato de doble ventana seleccionamos el escenario **Torus Dynamics**, en una de ellas grafiquemos la primera iterada y en la otra la segunda iterada. Hacemos tres comparaciones con valores del parámetro (**b**) cercanos e igual al valor de bifurcación:

- Uno menor que el valor de bifurcación (Fig. 4.4),
- El valor de bifurcación (Fig. 4.5) y,
- Otro mayor al valor de bifurcación(Fig. 4.6).

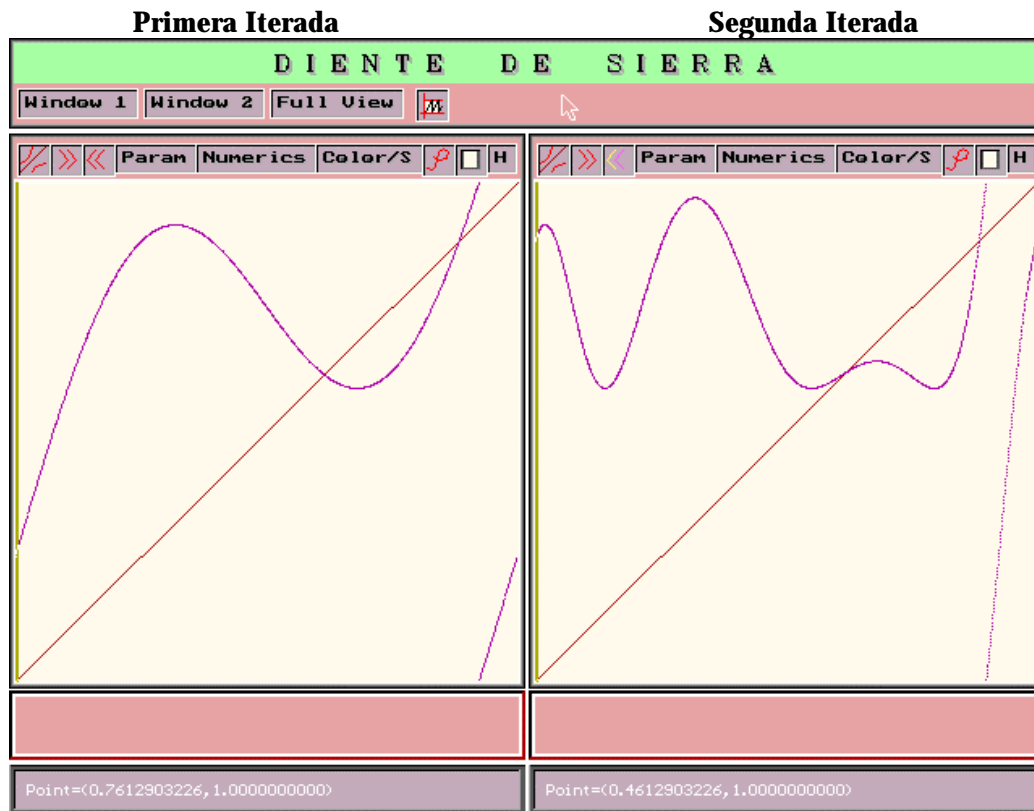


Fig. 4.4: Considerando un valor del parámetro menor al valor de bifurcación, **b=0.38**

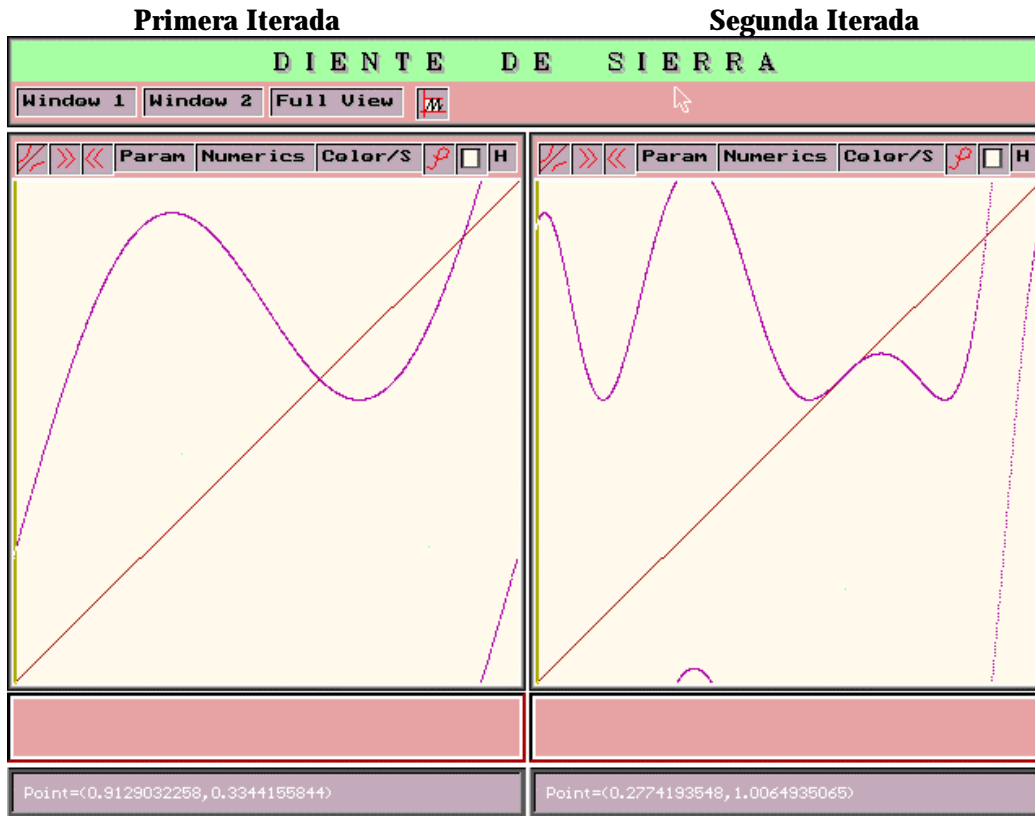


Fig. 4.5: Considerando el valor del parámetro de bifurcación, $b=0.4045161290$

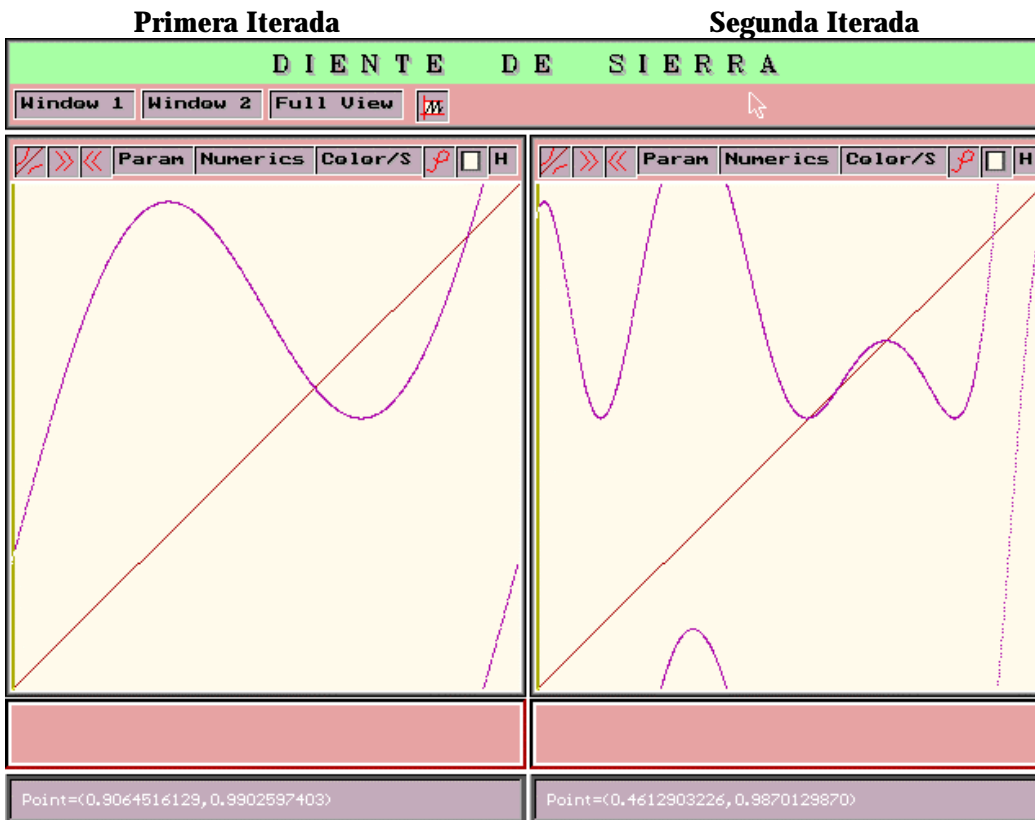


Fig. 4.6: Considerando un valor del parámetro mayor al valor de bifurcación, $b=0.435$

En la **primera iterada** (ventana izquierda) para el valor del parámetro (**b**) menor al valor de bifurcación (Fig. 4.4), hay un punto fijo que es estable; en el valor de bifurcación (Fig. 4.5) la pendiente es igual a **-1**, y para el valor del parámetro mayor al valor de bifurcación (Fig. 4.6) el punto fijo se hace inestable.

En la **segunda iterada** (ventana derecha) la situación es la siguiente: primero se tiene un punto fijo estable (Fig. 4.4); en el valor de bifurcación la pendiente del punto fijo es **1** (Fig. 4.5) y, después, se vuelve inestable (Fig. 4.6) apareciendo dos puntos fijos estables; estos puntos fijos de la segunda iterada corresponden a la órbita de periodo 2 de la función.

Este tipo de bifurcación se conoce como **bifurcación de doblamiento de periodo**. La segunda iterada sufre una bifurcación que se conoce como **bifurcación de tenedor**.

Dado que nuestra familia de funciones es biparamétrica, nos cuestionamos: ¿Para que valores de los parámetros **a** y **b** se tiene éste tipo de bifurcación?

La respuesta a tal cuestión es la siguiente:

Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, si se satisface que $b^2 - (k - a)^2 = (1/p^2)$, entonces la familia clásica sufre un bifurcación de éste tipo. Ver referencias [2] y [4]

4. 2 Cambio Cualitativo Tangente

Consideremos los siguientes valores de los parámetros para la función de Arnold:

Fig. 4.7	a=0.25	b=0.35
Fig. 4.8	a=0.35	
Fig. 4.9	a=0.4	

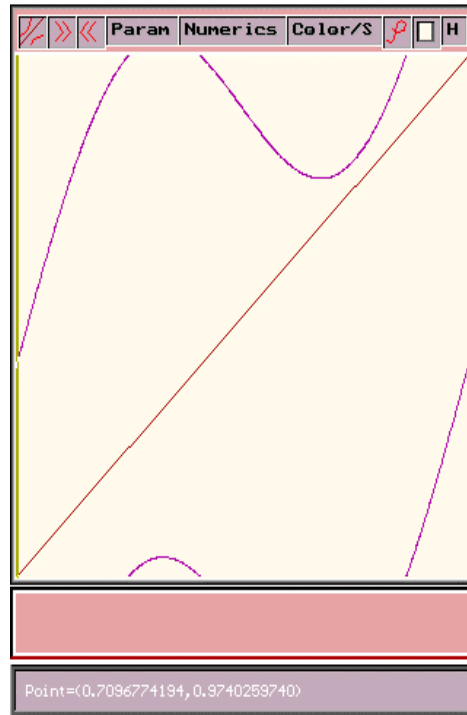


Fig. 4.7: Gráfica con el parámetro:

a=0.4	b=0.35
-------	--------

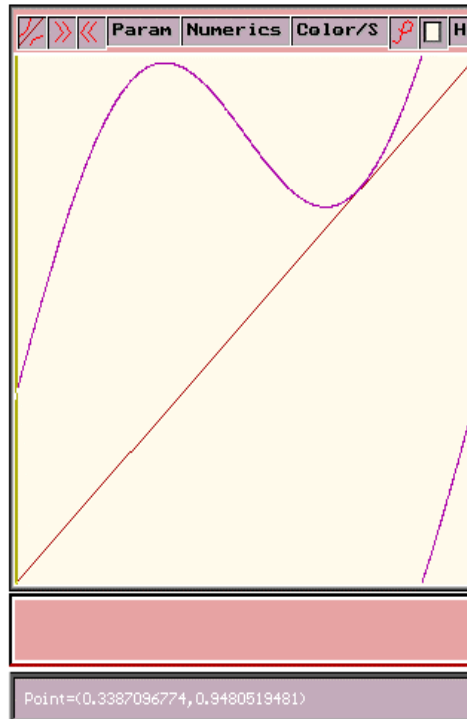


Fig. 4.8: Gráfica con el parámetro:

a=0.35	b=0.35
--------	--------



Fig. 4.9: Gráfica con el parámetro:

a=0.25	b=0.35
--------	--------

Observamos que también, fijando el parámetro **b** con un determinado valor y variando el parámetro **a**, la dinámica del sistema también cambia: De acuerdo a las imágenes, primero no se tiene ningún punto fijo (Fig. 4.7) y posteriormente aparece un punto fijo estable (Fig. 4.8).

En la Fig. 4.7 la curva no interseca a la diagonal, pero a medida que disminuimos el valor del parámetro **a**, logramos que la curva interseque a la diagonal, obteniendo así primero un punto fijo (Fig. 4.8) y luego dos puntos fijos (Fig. 4.9), uno estable y el otro inestable.

Observemos el correspondiente diagrama de bifurcación. Para ello será necesario el escenario gráfico **Bifurcations**.

Fijemos el parámetro **b=0.35** y variemos el parámetro **a** en el rango **[0.25, 0.4]**, el diagrama obtenido se muestra en la Fig. 4.10:

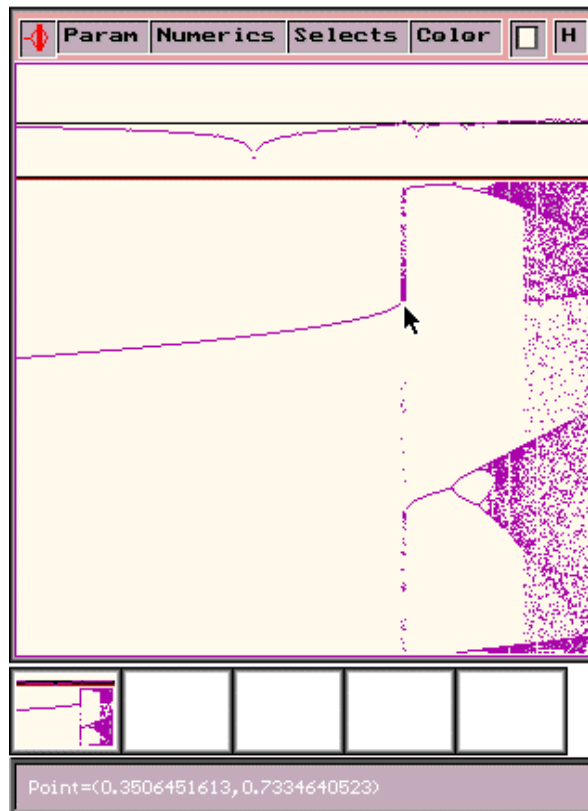


Fig. 4.10: Diagrama de Bifurcación con $b=0.35$ y $a \in [0.25, 0.4]$

El valor de bifurcación encontrado aproximadamente es **0.3506451613**.

En el valor de bifurcación la gráfica de la función es tangente a la diagonal (pendiente igual a uno), razón por la cual a este tipo de bifurcación se conoce como **Bifurcación Tangente**.

Este ejemplo sugiere un criterio para determinar la existencia de bifurcaciones tangentes: Es necesario que la pendiente en algún punto de la curva sea, en valor absoluto, igual a uno.

Dado que nuestra familia de funciones es biparamétrica, nos cuestionamos: ¿Para que valores de los parámetros a y b se tiene éste tipo de bifurcación?

La respuesta a tal cuestión es la siguiente:

Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, si se satisface que $b = |a - k|$, entonces la familia clásica sufre un bifurcación de éste tipo. Ver referencias [2] y [4]

5. Cálculo de la Constante de Feigenbaum

Fijemos el parámetro $a=0.25$, y variemos el parámetro b en el rango $[0.2532466181, 0.7564308012]$.

El diagrama obtenido es el de la Fig. 5.1:

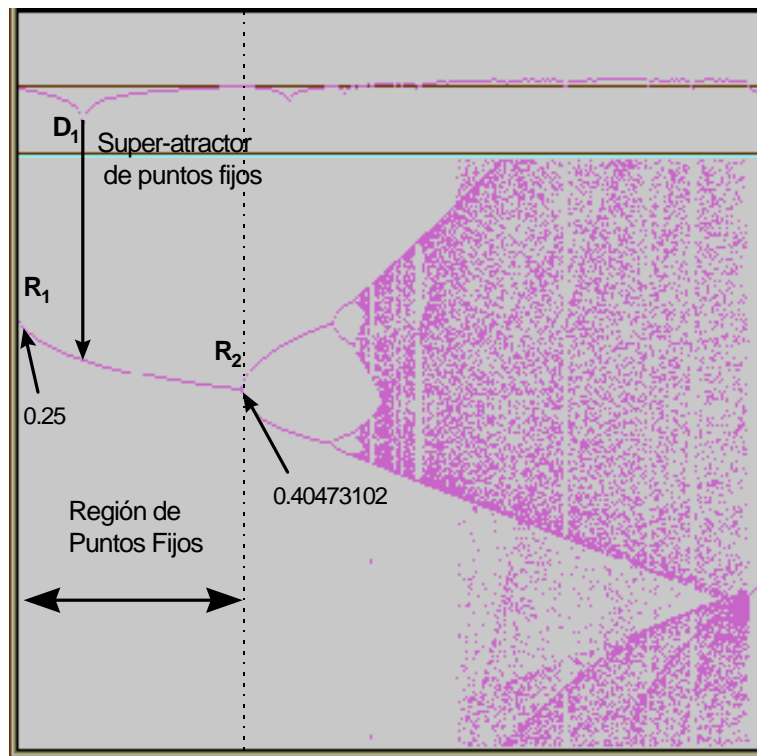


Fig. 5.1: Diagrama de Bifurcación con a fijo y b variable

Como podemos ver, para b entre 0.25 y 0.40473102 existe un único punto fijo atractor, al aproximarse a un cierto valor límite R_2 , este punto fijo se convierte en un repulsor, apareciendo una órbita periódica atractora de periodo 2.

Al continuar aumentando b , van apareciendo nodos similares $R_3, R_4, R_5, R_6, \dots$; en cada uno de los cuales ocurre una bifurcación del conjunto atractor existente anterior. Veamos las Figs. 5.2 y 5.3:

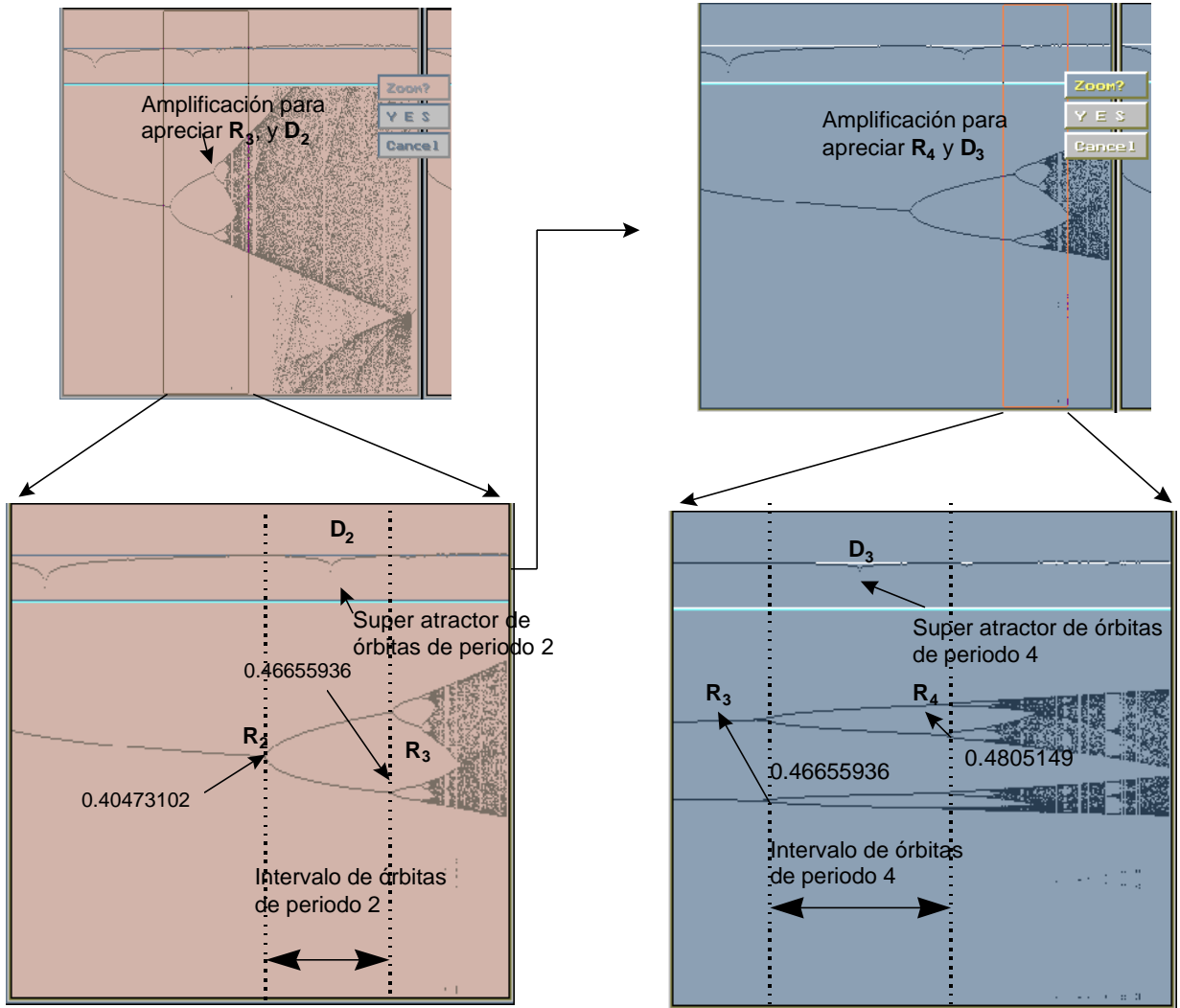


Fig. 5.2: Localización de Nodos D_2 , R_3 , D_3 y R_4

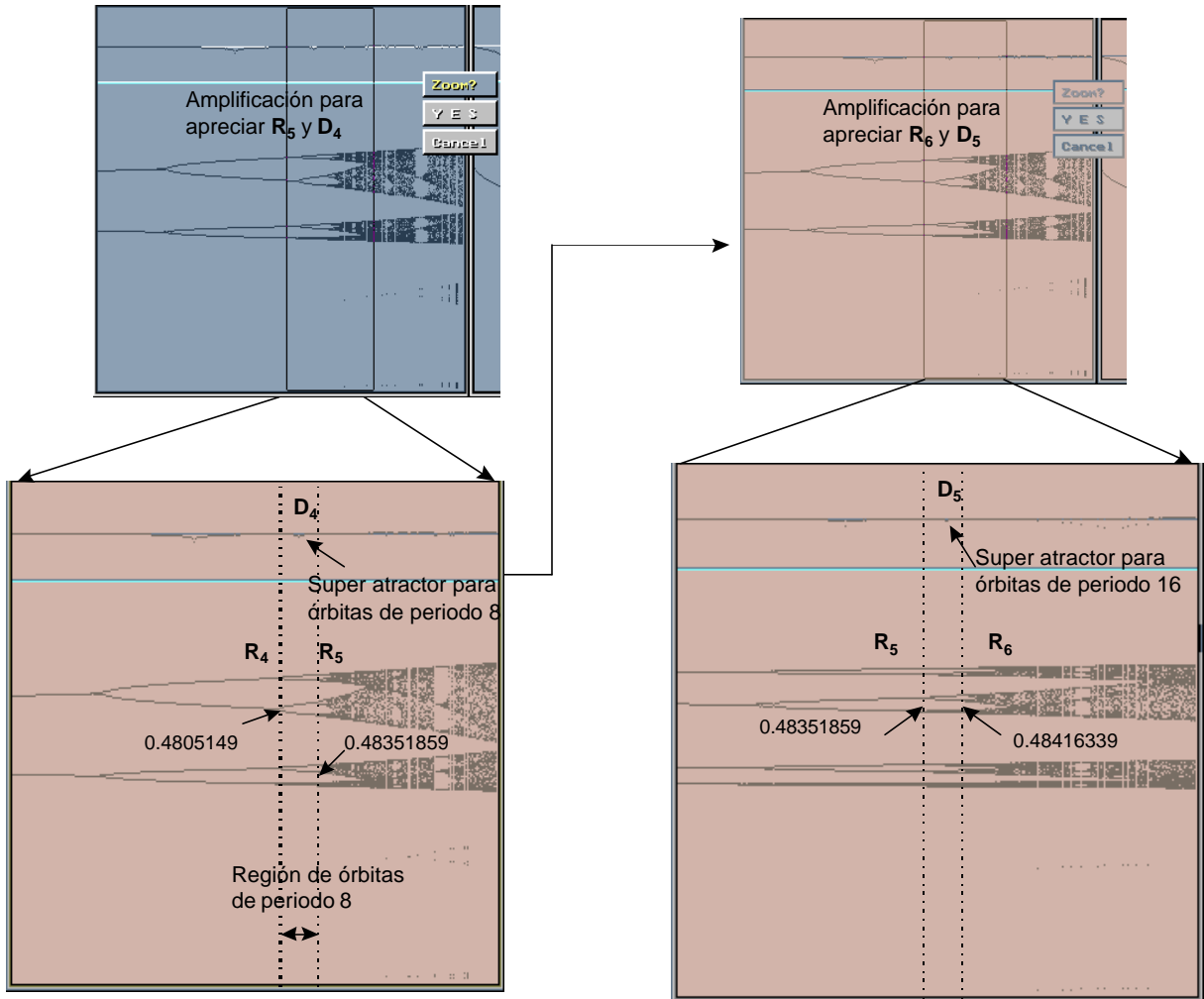


Fig. 5.3: Localización de Nodos D_4 y R_5

Se origina una secuencia de bifurcaciones límites (R_2 , R_3 , etc.) convergiendo a un valor menor que 0.5 y, a partir de este valor el sistema posee un comportamiento caótico.

Entre cada uno de estos límites existe un valor para b llamado super-atractor. Tal nombre se debe a tener la propiedad de que, todos los puntos de su cuenca de atracción convergen a la órbita atractora con mayor rapidez, que todos los demás puntos de las cuencas de atracción de las otras órbitas atractoras.

Determinando tales valores super-atractoros D_i 's:

- D_1 comprendido entre R_1 y R_2 ,
- D_2 entre R_2 y R_3 , y
- así sucesivamente;

Para localizar los puntos de bifurcación, procedemos de la manera siguiente:

- 1) Elegimos una condición inicial aleatoria,
- 2) Elegimos una longitud de paso de 0.00000001 ,
- 3) Realizamos 30 000 iteraciones, y

	<u>0.7238399938</u> , <u>0.5135689693</u> , <u>0.7238399938</u> , <u>0.5135689693</u> , <u>0.7238399938</u> , <u>0.5135689693</u>		
0.46655935	0.7238400029, 0.5135689641, 0.7238400029, 0.5135689641, 0.7238400029, 0.5135689641, 0.7238400029, 0.5135689641, 0.7238400029	''	- 0.00034300143
0.46655936	0.513568959, 0.7238400119, 0.5135689589, 0.7238400119, 0.513568959, 0.7238400119, 0.5135689589, 0.7238400119, 0.513568959, 0.7238400119, 0.5135689589, 0.7238400119, 0.513568959, 0.7238400119, 0.5135689589	Punto de Bifurcación: Finalización de órbitas de periodo 2 e inicio de órbitas de periodo 4	- 0.00034287192
0.46655937	0.723840021, 0.5135689538, 0.723840022, <u>0.5135689539</u> , <u>0.723840021</u> , <u>0.5135689538</u> , <u>0.723840022</u> , 0.5135689539, 0.723840021, 0.5135689538, 0.723840022, 0.5135689539 0.723840021, 0.5135689538, 0.723840021	Orbitas periódicas de periodo 4	- 0.00034274243
.....	''	
.....		
.....		
.....		
0.48051488	0.6845621584, 0.4940940687, 0.7619209522, <u>0.5327533446</u> , <u>0.6845621584</u> , <u>0.4940940687</u> , <u>0.7619209522</u> , 0.5327533446, 0.6845621584, 0.4940940687, 0.7619209522, 0.5327533446, 0.6845621589, 0.4940940686, 0.7619209524	''	- 0.00017014304
0.48051489	0.5327533507, 0.6845621448, 0.4940940623, 0.7619209654, 0.5327533507, 0.6845621448, <u>0.4940940623</u> , <u>0.7619209654</u> , <u>0.5327533507</u> , <u>0.6845621448</u> , 0.4940940623, 0.7619209654, 0.5327533508, 0.6845621446, 0.4940940624, 0.7619209653, 0.5327533507, 0.6845621448	''	- 0.00016973226
0.4805149	0.7619209784, 0.5327533568, 0.6845621309, <u>0.494094056</u> , <u>0.7619209784</u> , <u>0.5327533569</u> , <u>0.6845621307</u> , 0.4940940561, 0.7619209784, 0.5327533568, 0.6845621309, 0.494094056, 0.7619209784, 0.5327533569, 0.6845621307	Punto de bifurcación: Finalización de órbitas de periodo 4 e inicio de órbitas de periodo 8	- 0.00016932167
0.48051491	0.4940940498, 0.7619209914, 0.5327533627, <u>0.6845621172</u> , <u>0.4940940497</u> , <u>0.7619209916</u> , <u>0.532753363</u> , <u>0.6845621167</u> , <u>0.4940940498</u> , <u>0.7619209914</u> , <u>0.5327533627</u> , 0.6845621172, 0.4940940497, 0.7619209916, 0.532753363, 0.6845621167, 0.4940940498, 0.7619209914	Orbitas Periódicas de Periodo 8	- 0.00016891127
0.48051492	0.6845621028, 0.4940940435, 0.7619210044, <u>0.5327533688</u> , <u>0.6845621033</u> , <u>0.4940940434</u> , <u>0.7619210047</u> , <u>0.5327533691</u> , <u>0.6845621028</u> , <u>0.4940940435</u> , <u>0.7619210044</u> , 0.5327533688, 0.6845621033, 0.4940940434, 0.7619210047, 0.5327533691, 0.6845621028, 0.4940940435	''	- 0.00016850105
.....	''	
.....		

0.48351857	0.5401258119, 0.669509458, 0.4965188667, <u>0.7570938344</u> , <u>0.5240554765</u> , <u>0.701251992</u> , <u>0.4902373692</u> , <u>0.7698780045</u> , <u>0.5401258119</u> , <u>0.6695094579</u> , <u>0.4965188668</u> , 0.7570938344, 0.5240554765, 0.7012519921, 0.4902373692, 0.7698780045, 0.5401258119, 0.669509458	''	3.0176342e-05
0.48351858	0.7698780195, 0.5401258227, 0.6695094344, <u>0.4965188691</u> , <u>0.7570938298</u> , <u>0.5240554613</u> , <u>0.7012520209</u> , <u>0.4902373621</u> , <u>0.7698780195</u> , <u>0.5401258227</u> , <u>0.6695094344</u> , 0.4965188691, 0.7570938298, 0.5240554613, 0.7012520209	''	2.5669298e-05
0.48351859	0.490237355, 0.7698780345, 0.5401258335, 0.669509411, 0.4965188714, 0.7570938253, 0.5240554462, 0.7012520496, 0.490237355, 0.7698780346, 0.5401258336, 0.6695094108, 0.4965188715, 0.7570938251, 0.5240554459, 0.7012520501, 0.490237355, 0.7698780345, 0.5401258335, 0.669509411, 0.4965188714, 0.7570938253, 0.5240554462, 0.7012520496, 0.490237355, 0.7698780346, 0.5401258336, 0.6695094108, 0.4965188715, 0.7570938251, 0.5240554459, 0.7012520501, 0.490237355, 0.7698780345, 0.5401258335	Punto de bifurcación: Finalización de órbitas de periodo 8 e inicio de órbitas de periodo 16	2.1229040e-05
0.4835186	0.701252079, 0.4902373479, 0.7698780496, <u>0.5401258443</u> , <u>0.6695093874</u> , <u>0.4965188738</u> , <u>0.7570938207</u> , <u>0.524055431</u> , <u>0.7012520785</u> , <u>0.4902373479</u> , <u>0.7698780497</u> , <u>0.5401258444</u> , <u>0.6695093872</u> , <u>0.4965188739</u> , <u>0.7570938205</u> , <u>0.5240554308</u> , <u>0.701252079</u> , <u>0.4902373479</u> , <u>0.7698780496</u> , 0.5401258443, 0.6695093874, 0.4965188738, 0.7570938207, 0.524055431, 0.7012520785, 0.4902373479, 0.7698780497, 0.5401258444, 0.6695093872, 0.4965188739, 0.7570938205, 0.5240554308, 0.701252079, 0.4902373479, 0.7698780496	Orbitas Periódicas de Periodo 16	1.6882999e-05
0.48351861	0.5240554155, 0.7012521081, 0.4902373408, <u>0.7698780646</u> , <u>0.5401258551</u> , <u>0.669509364</u> , <u>0.4965188761</u> , <u>0.7570938162</u> , <u>0.5240554159</u> , <u>0.7012521072</u> , <u>0.4902373408</u> , <u>0.7698780648</u> , <u>0.5401258553</u> , <u>0.6695093636</u> , <u>0.4965188763</u> , <u>0.7570938158</u> , <u>0.5240554155</u> , <u>0.7012521081</u> , <u>0.4902373408</u> , 0.7698780646, 0.5401258551, 0.669509364, 0.4965188761, 0.7570938162, 0.5240554159, 0.7012521072, 0.4902373408, 0.7698780648, 0.5401258553, 0.6695093636, 0.4965188763, 0.7570938158, 0.5240554155, 0.7012521081, 0.4902373408	''	1.2649305e-05
.....	''	
.....	''	
.....	''	
0.48416337	0.5417331523, 0.6662270986, 0.4975995213, <u>0.7549017122</u> , <u>0.520967948</u> , <u>0.7073659632</u> , <u>0.4904703532</u> , <u>0.7694430596</u> , <u>0.5388880565</u> , <u>0.6717607932</u> , <u>0.4949307077</u> , <u>0.7603493344</u> ,	''	-3.8142746e-05

	<u>0.5272092421</u> , <u>0.6948389482</u> , <u>0.4894651367</u> , <u>0.7714897221</u> , <u>0.5417331523</u> , <u>0.6662270987</u> , <u>0.4975995213</u> , <u>0.7549017122</u> , <u>0.5209679482</u> , <u>0.7073659631</u> , <u>0.4904703532</u> , <u>0.7694430596</u> , <u>0.5388880567</u> , <u>0.6717607929</u> , <u>0.4949307079</u> , <u>0.7603493342</u> , <u>0.5272092417</u> , <u>0.6948389488</u> , <u>0.4894651367</u> , <u>0.7714897222</u> , <u>0.5417331523</u> , 0.6662270986, 0.4975995213		
0.48416338	<u>0.7714897385</u> , <u>0.5417331654</u> , <u>0.6662270706</u> , <u>0.4975995275</u> , <u>0.7549016998</u> , <u>0.5209679244</u> , <u>0.7073660094</u> , <u>0.4904703526</u> , <u>0.7694430615</u> , <u>0.5388880492</u> , <u>0.6717608051</u> , <u>0.4949306937</u> , <u>0.7603493633</u> , <u>0.5272092667</u> , <u>0.6948388973</u> , <u>0.489465129</u> , <u>0.7714897385</u> , <u>0.5417331654</u> , <u>0.6662270707</u> , 0.4975995275, 0.7549016998, 0.5209679244, 0.7073660094, 0.4904703525, 0.7694430616, 0.5388880493, 0.6717608048, 0.4949306938, 0.7603493631, 0.5272092664, 0.6948388979, 0.489465129, 0.7714897385, 0.5417331654, 0.6662270706, 0.4975995275	''	2.1067693e-05
0.48416339	<u>0.4894651212</u> , <u>0.7714897549</u> , <u>0.5417331786</u> , <u>0.6662270425</u> , <u>0.4975995337</u> , <u>0.7549016873</u> , <u>0.5209679008</u> , <u>0.7073660558</u> , <u>0.490470352</u> , <u>0.7694430633</u> , <u>0.5388880418</u> , <u>0.6717608172</u> , <u>0.4949306797</u> , <u>0.7603493924</u> , <u>0.5272092915</u> , <u>0.6948388461</u> , <u>0.4894651213</u> , <u>0.7714897548</u> , <u>0.5417331785</u> , <u>0.6662270427</u> , <u>0.4975995336</u> , <u>0.7549016875</u> , <u>0.520967901</u> , 0.7073660553, 0.4904703519, 0.7694430635, 0.538888042, 0.6717608166, 0.4949306799, 0.7603493919, 0.5272092909, 0.6948388472, 0.4894651212, 0.7714897549, 0.5417331786, 0.6662270425, 0.4975995337, 0.7549016873, 0.5209679008, 0.7073660558, 0.490470352, 0.7694430633, 0.5388880418, 0.6717608172, 0.4949306797, 0.7603493924, 0.5272092915, 0.6948388461, 0.4894651213, 0.7714897548, 0.5417331785, 0.6662270427, 0.4975995336, 0.7549016875, 0.520967901, 0.7073660553, 0.4904703519, 0.7694430635, 0.538888042, 0.6717608166, 0.4949306799, 0.7603493919, 0.5272092909, 0.6948388472, 0.4894651212	Punto de Bifurcación: Finalización de órbitas de periodo 16 e inicio de órbitas de periodo 32	0.00011811303
0.4841634	<u>0.6948387963</u> , <u>0.4894651135</u> , <u>0.7714897712</u> , <u>0.5417331917</u> , <u>0.6662270144</u> , <u>0.4975995399</u> , <u>0.7549016748</u> , <u>0.5209678772</u> , <u>0.7073661021</u> , <u>0.4904703514</u> , <u>0.7694430652</u> , <u>0.5388880344</u> , <u>0.6717608291</u> , <u>0.4949306656</u> , <u>0.7603494213</u> , <u>0.5272093161</u> , <u>0.6948387951</u> , <u>0.4894651136</u> , <u>0.7714897712</u> , <u>0.5417331916</u> , <u>0.6662270147</u> , <u>0.4975995398</u> , <u>0.754901675</u> , <u>0.5209678774</u> , <u>0.7073661016</u> , <u>0.4904703513</u> , <u>0.7694430654</u> , <u>0.5388880347</u> , <u>0.6717608285</u> , <u>0.4949306659</u> , <u>0.7603494208</u> , <u>0.5272093155</u> , <u>0.6948387963</u> , <u>0.4894651135</u> , <u>0.7714897712</u> , <u>0.5417331917</u> , 0.6662270145, 0.4975995399, 0.7549016748,	Orbitas Periódicas de Periodo 32	6.7758028e-05

	0.5209678772, 0.7073661021, 0.4904703514, 0.7694430652, 0.5388880344, 0.6717608291, 0.4949306656, 0.7603494213, 0.5272093161, 0.6948387951, 0.4894651136, 0.7714897712, 0.5417331916, 0.6662270147, 0.4975995398, 0.754901675, 0.5209678774, 0.7073661016, 0.4904703513, 0.7694430654, 0.5388880347, 0.6717608285, 0.4949306659, 0.7603494208, 0.5272093155, 0.6948387963		
0.48416341	0.5272093405, 0.6948387447, 0.4894651059, <u>0.7714897875</u> , <u>0.5417332048</u> , <u>0.6662269865</u> , <u>0.497599546</u> , <u>0.7549016625</u> , <u>0.5209678537</u> , <u>0.707366148</u> , <u>0.4904703507</u> , <u>0.7694430672</u> , <u>0.5388880272</u> , <u>0.6717608407</u> , <u>0.4949306518</u> , <u>0.7603494499</u> , <u>0.5272093404</u> , <u>0.6948387449</u> , <u>0.4894651058</u> , <u>0.7714897876</u> , <u>0.5417332048</u> , <u>0.6662269865</u> , <u>0.497599546</u> , <u>0.7549016625</u> , 0.5209678537, 0.7073661482, 0.4904703507, 0.7694430671, 0.5388880272, 0.6717608408, 0.4949306517, 0.76034945, 0.5272093405, 0.6948387447, 0.4894651059, 0.7714897875, 0.5417332048, 0.6662269865, 0.497599546, 0.7549016625, 0.5209678537, 0.707366148, 0.4904703507, 0.7694430672, 0.5388880272, 0.6717608407, 0.4949306518, 0.7603494499, 0.5272093404, 0.6948387449, 0.4894651058, 0.7714897876, 0.5417332048, 0.6662269865, 0.497599546, 0.7549016625, 0.5209678537, 0.7073661482, 0.4904703507, 0.7694430671, 0.5388880272, 0.6717608408, 0.4949306517, 0.76034945, 0.5272093405	''	-1.317656e-05
.....
...
.....
...			
.....			
...			

Calcularemos la constante de Feigenbaum de dos maneras distintas:

5.1. Mediante los Valores en los Puntos de Bifurcación

Si d_n esta definido por:

$$d_n = (R_n - R_{n-1}) / (R_{n+1} - R_n)$$

converge cuando n es grande. Encontrando la llamada constante de Feigenbaum $d=4.6692...$

n	R_n	d_n
---	-------	-------

1	0.25	-
2	0.40473102	2.502590559604
3	0.46655936	4.43037961985
4	0.4805149	4.646139244
5	0.48351859	4.6583281633772
6	0.48416339	-

5.2 Mediante los Valores de los Super Atractores

Se observa que d_n , definido por:

$$d_n = (D_n - D_{n-1}) / (D_{n+1} - D_n)$$

también converge cuando n es grande. Encontrando nuevamente la constante de Feigenbaum $d=4.6692\dots$

n	D_n	d_n
1	0.2955538834	-
2	0.435948302	3.713969838095
3	0.4737500650	4.54278851836
4	0.4820713335	4.669201585558
5	0.4838534944	4.669201484054
6	0.4842351787	-

6. Lenguas de Arnold

Las Lenguas de Arnold del “Sube y baja”, nos proveen de un mapa en el espacio de parámetros útil para entender la dinámica de éste oscilador: Estas lenguas son regiones que agrupan a todos aquellos conjuntos de parámetros del sistema para los cuales el oscilador tiene un mismo tipo de sincronización.

La sincronización la entenderemos como la existencia de un abierto de tiempos iniciales, para los cuales la correspondiente sucesión de fases de disparo converge a una sucesión periódica en la circunferencia. Si no hay sincronización, todas las sucesiones de fases, serán aperiódicas, excepto, posiblemente, las que tienen tiempos iniciales en un conjunto de medida cero.

6.1 Número de Rotación

Una herramienta matemática para detectar órbitas periódicas es el número de rotación, que podemos interpretar como el “avance” promedio, en fase, de los disparos. Cuando este número es racional implica la existencia de órbitas periódicas y, por ende, de sincronización.

Deseamos investigar cuando este tipo de osciladores tiene respuesta sincronizada o bien cuando posee respuesta aperiódica, así como los distintos tipos de sincronía y aperiodicidad que pueden presentarse y las condiciones que lo determinan.

Consideremos los valores de los parámetros siguientes:

a	b
0.5	0.0

En este caso obtenemos apartir de la condición inicial **0.2** la imagen siguiente:

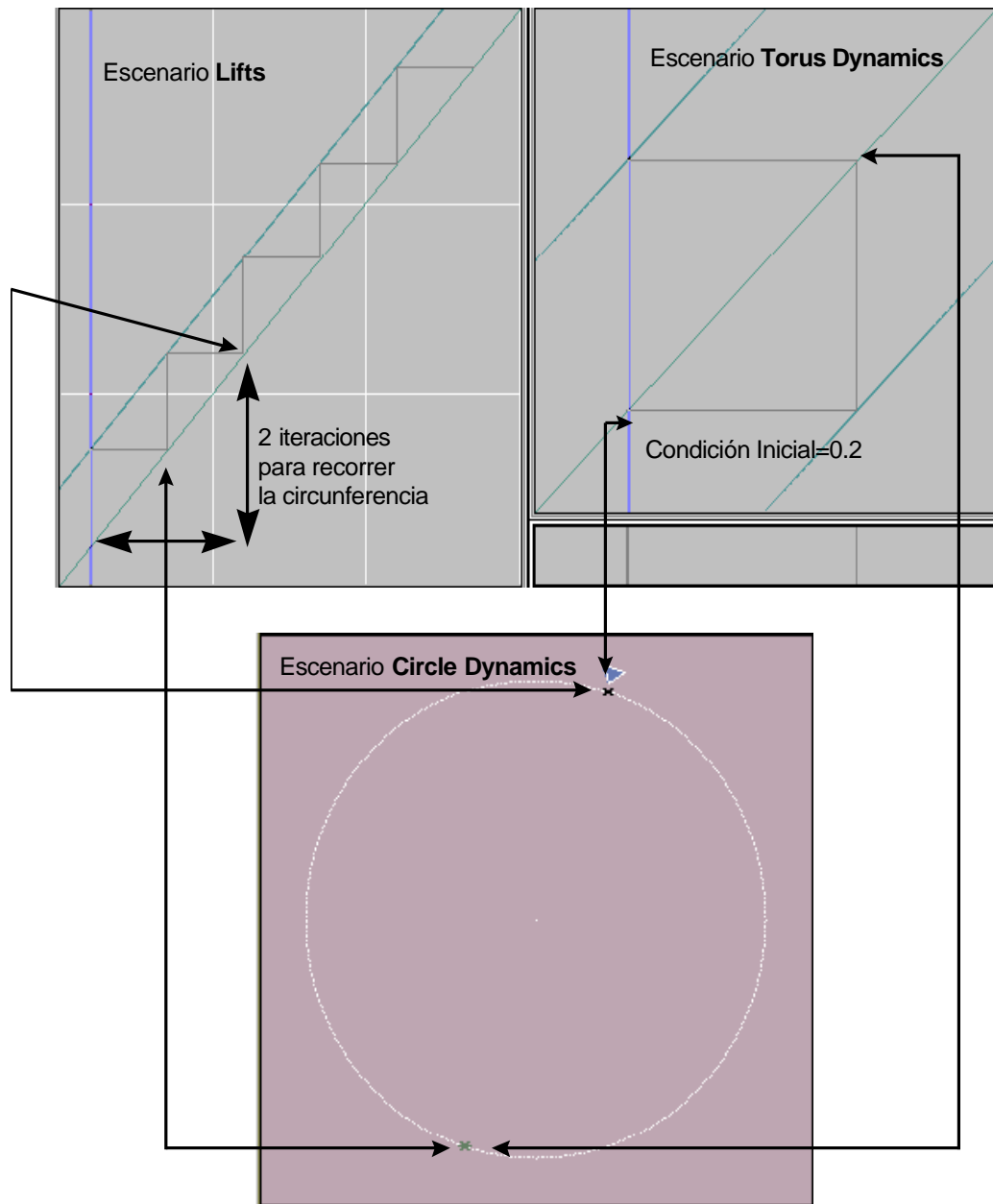


Fig. 6.1: Órbita de Periodo 2, en distintos escenarios

Podemos ver que la órbita se cierra con sólo 2 iteraciones, recorriendo a la circunferencia una sola vez. En este caso cada iteración recorre a la circunferencia en un arco con longitud $(0.5)2\pi = (1/2) 2\pi$.

Todas las órbitas, independientemente de la condición inicial, tendrán un recorrido igual a la anterior. Hecho que podemos ver al hacer un barrido de condiciones iniciales, como muestra la fig. 6.2:

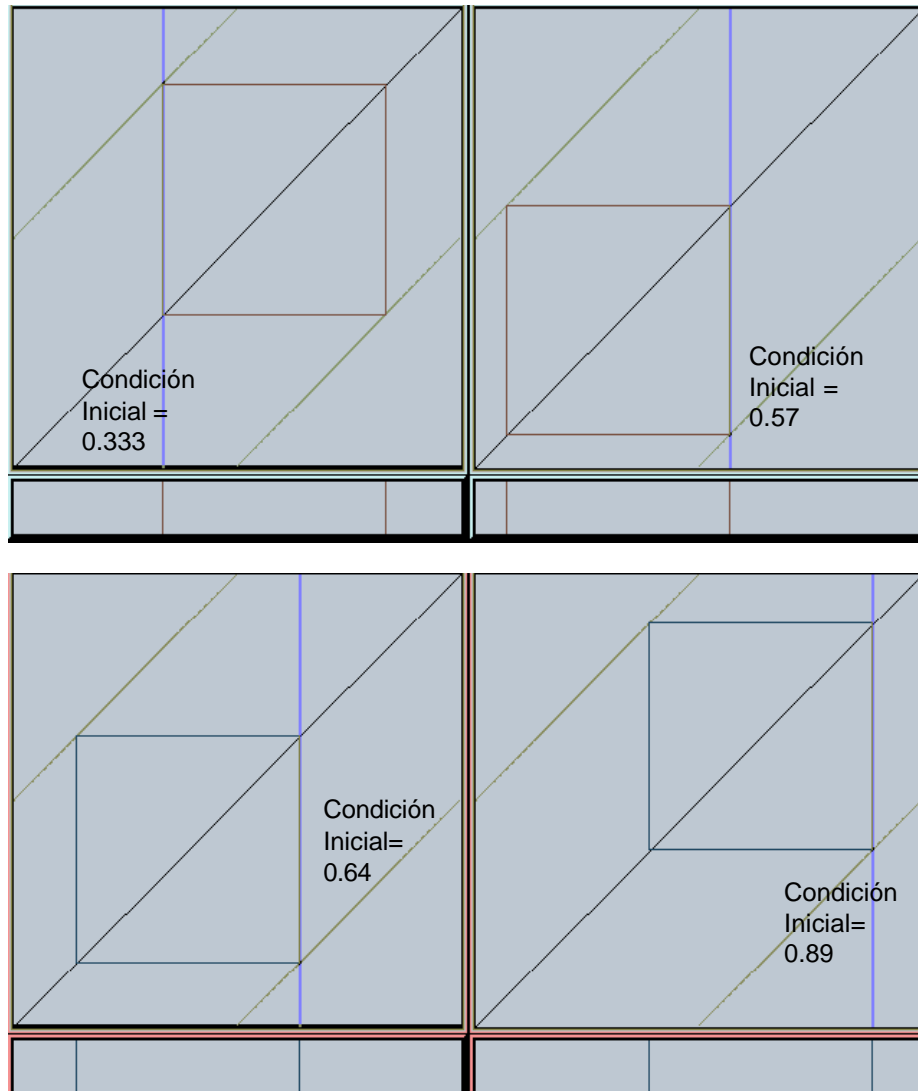


Fig. 6.2: Barrido de condiciones iniciales con $a=0.5$ y $b=0.0$

En general cuando tenemos una rotación de un ángulo $(m/n)2\pi$, n determina el periodo de sus órbitas y m determina el orden en que son recorridas (i. e. el número de vueltas que da la órbita al círculo para regresar al punto de partida).

En el último ejemplo nos pudimos dar cuenta que la existencia de una órbita con rotación $1/2$, le imponen un orden determinado a todas las demás órbitas. Siendo este número un candidato a ser el invariante necesitado. Pues es de esperarse que a través de dicho invariante, podamos asociar a un homeomorfismo la rotación correspondiente, sin recurrir a la geometría de las órbitas.

Tal invariante es conocido como el número de rotación, que en el caso de homeomorfismo es independiente de las condiciones iniciales.

Definido por:

$$r(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)/n \pmod{1}}{n}$$

La cual expresa el promedio de la suma de las iteraciones realizadas entre la cantidad de ellas.

Consideramos ahora los valores de los parámetros siguientes:

a	b
0.5	0.055

Realizando 150 iteraciones a partir de las condiciones iniciales **0.738710** y **0.783871** obtenemos la Fig. 6.3:

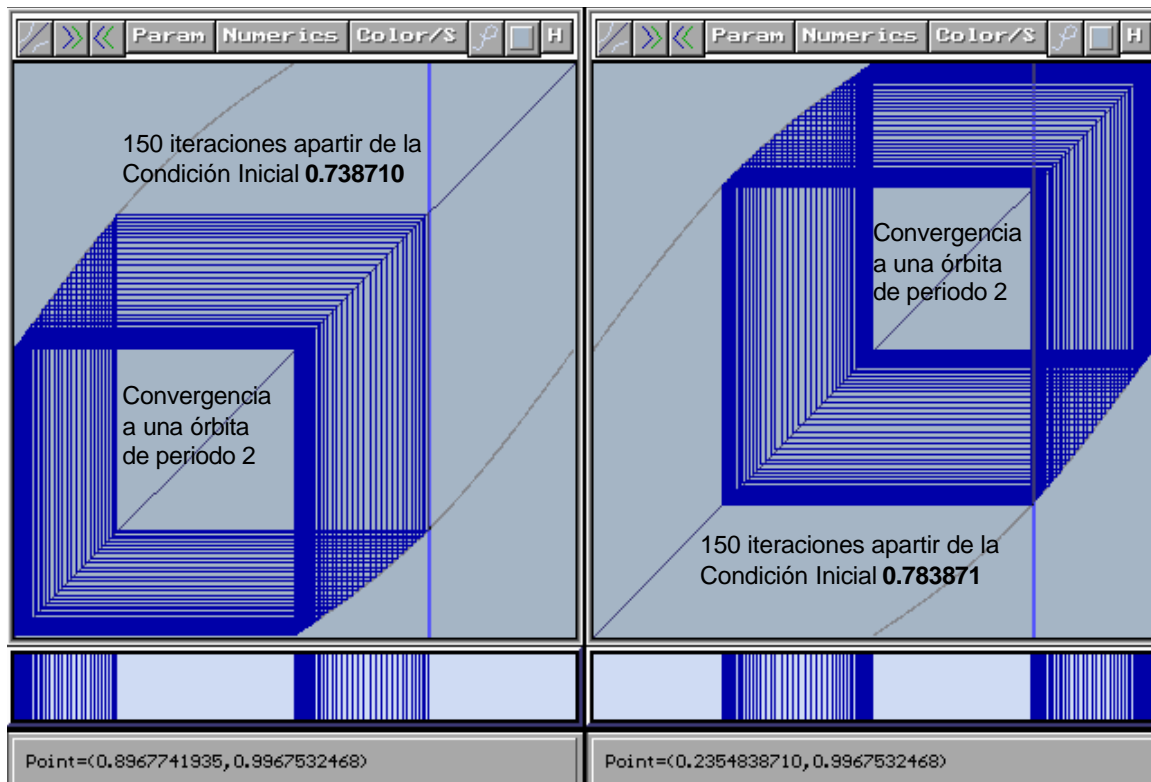


Fig. 6.3: 150 iteraciones, convergiendo a la misma órbita

Los resultados obtenidos de estas 150 iteraciones son:

Condición Inicial	Iteraciones : Valores Obtenidos						Promedio
0: 0.73871	1	1.183848324	2	1.734165447	3	2.179437433	
	4	2.729119835	5	3.174592482	6	3.723533746	
	7	4.169292457	8	4.717371055	9	5.163522854	
	10	5.710601783	11	6.157278372	12	6.703205683	
	13	7.150565878	14	7.695176474	15	8.143407406	
	16	8.686526441	17	9.135842766	18	9.677290895	
	19	10.12793121	20	10.66753172	21	11.11975155	
	22	11.65733901	23	12.11140017	24	12.64682996	
	25	13.10298672	26	13.63614418	27	14.09462766	
	28	14.62543573	29	15.08643853	30	15.61486255	
	31	16.07852604	32	16.60457501	33	17.07098129	

34	17.59470554	35	18.06387517	36	18.58536101
37	19.05725642	38	19.57661878	39	20.05115216
40	20.56852632	41	21.04557025	42	21.56110391
43	22.04050285	44	22.55434904	45	23.03593027
46	23.54824167	47	24.03182466	48	24.54274933
49	25.02815322	50	25.53783162	51	26.02488072
52	26.5334439	53	27.02197138	54	27.52954005
55	28.01939026	56	28.52607448	57	29.01710404
58	29.5230034	59	30.01508165	60	30.52028569
61	31.01329443	62	31.51788331	63	32.01171628
64	32.51576148	65	33.0103236	66	33.51388868
67	34.00909519	68	34.51223655	69	35.00801206
70	35.51077967	71	36.00705733	72	36.50949537
73	37.00621595	74	37.50836348	75	38.0054746
76	38.50736611	77	39.00482148	78	39.5064874
79	40.00424614	80	40.50571332	81	41.00373937
82	41.50503148	83	42.00329301	84	42.50443092
85	43.0028999	86	43.50390198	87	44.00255369
88	44.50343614	89	45.00224879	90	45.50302589
91	46.00198028	92	46.50266459	93	47.00174382
94	47.50234643	95	48.00153559	96	48.50206624
97	49.00135222	98	49.50181951	99	50.00119075
100	50.50160223	101	51.00104855	102	51.5014109
103	52.00092334	104	52.50124242	105	53.00081307
106	53.50109405	107	54.00071598	108	54.5009634
109	55.00063047	110	55.50084835	111	56.00055518
112	56.50074704	113	57.00048888	114	57.50065783
115	58.0004305	116	58.50057927	117	59.00037909
118	59.50051009	119	60.00033382	120	60.50044918
121	61.00029395	122	61.50039553	123	62.00025885
124	62.5003483	125	63.00022794	126	63.5003067
127	64.00020071	128	64.50027008	129	65.00017675
130	65.50023782	131	66.00015564	132	66.50020942
133	67.00013705	134	67.50018441	135	68.00012068
136	68.50016239	137	69.00010627	138	69.500143
139	70.00009358	140	70.50012592	141	71.00008241
142	71.50011088	143	72.00007256	144	72.50009764
145	73.0000639	146	73.50008598	147	74.00005627
148	74.50007571	149	75.00004955	150	75.50006667

38.2933033

0.783871

1	1.23011182	2	1.784682958	3	2.230983742
4	2.785591616	5	3.231961164	6	3.78660827
7	4.233056826	8	4.787745459	9	5.234284979
10	5.789017081	11	6.235661551	12	6.7904385
13	7.237204314	14	7.792026655	15	8.238933069
16	8.793800154	17	9.240869823	18	9.795779348
19	10.24303897	20	10.79798637	21	11.24546742
22	11.80044512	23	12.24818475	24	12.80318117
25	13.2512232	26	13.80622158	27	14.25461765
28	14.80959451	29	15.25840538	30	15.8133287
31	16.2626256	32	16.81745263	33	17.26731872
34	17.82199341	35	18.27252512	36	18.8269752
37	19.27828349	38	19.8324173	39	20.28462841
40	20.8383317	41	21.29158731	42	21.84472032
43	22.29917663	44	22.85157196	45	23.3073975

46	23.85885943	47	24.31623105	48	24.86653709
49	25.32563418	50	25.87453965	51	26.33553645
52	26.88278263	53	27.34583924	54	27.89116502
55	28.35641785	56	28.89957435	57	29.36712727
58	29.90789356	59	30.37781107	60	30.916009
61	31.38831241	62	31.92381811	63	32.3984854
64	32.93123557	65	33.40820475	66	33.93819716
67	34.41737235	68	34.94466088	69	35.42592008
70	35.95060584	71	36.43380914	72	36.95602935
73	37.44102675	74	37.96094328	75	38.4475813
76	38.96537018	77	39.45349718	78	39.96933971
79	40.45880969	80	40.97288567	81	41.46356089
82	41.97604361	83	42.46779611	84	42.97884919
85	43.47156149	86	43.98133692	87	44.47490219
88	44.98353947	89	45.47786125	90	45.98548721
91	46.48047889	92	46.987208	93	47.48279216
94	47.98872718	95	48.48483484	96	48.99006761
97	49.48663745	98	49.9912498	99	50.48822747
100	50.99229205	101	51.48962942	102	51.9932107
103	52.4908652	104	52.99402022	105	53.49195425
106	53.99473348	107	54.49291383	108	54.99536182
109	55.49375921	110	55.99591532	111	56.49450391
112	56.99640285	113	57.49515987	114	57.99683224
115	58.49573761	116	58.99721041	117	59.49624645
118	59.99754346	119	60.49669458	120	60.99783677
121	61.49708923	122	61.99809506	123	62.49743678
124	62.99832253	125	63.49774285	126	63.99852284
127	64.49801237	128	64.99869923	129	65.49824972
130	65.99885456	131	66.49845873	132	66.99899135
133	67.49864278	134	67.9991118	135	68.49880486
136	68.99921787	137	69.49894758	138	69.99931127
139	70.49907326	140	70.99939352	141	71.49918393
142	71.99946594	143	72.49928139	144	72.99952972
145	73.4993672	146	73.99958588	147	74.49944277
148	74.99963534	149	75.49950932	150	75.99967889

38.65967443

Como puede observarse ambas órbitas convergen a una órbita periódica de periodo 2.

Realizando 10000 iteraciones obtenemos:

Con condición inicial 0: 0.73871, un promedio de 0.75065

Con condición inicial 0: 0.783871, un promedio de 2501.248645

6.2 Sincronización

Nos planteamos ahora la cuestión: ¿Como encontramos valores de parámetros para que el sistema tenga una órbita de periodo 3?

Necesitamos para ello pasemos el escenario gráfico **Tongues**, grafiquemos las lenguas con sincronización (3:1) y (3:2). Ver Fig. 6.4

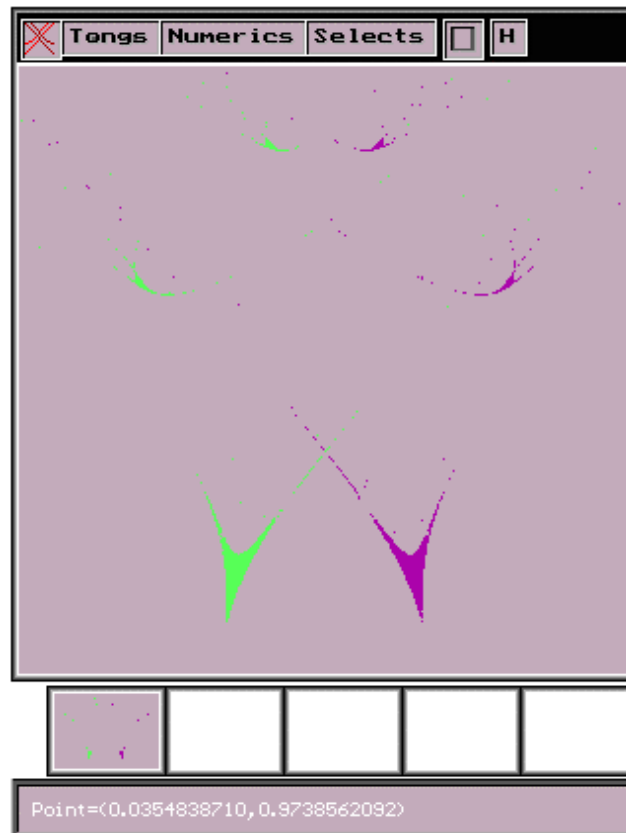


Fig. 6.4: Diagrama de las regiones de sincronización (3:1) y (3:2)

Cualquier punto que elijamos en cualquiera de las Lenguas (llamadas también regiones de Sincronización) tendrá una órbita estable de periodo 3. Se puede ver fácilmente esto haciendo lo siguiente:

Sitúese con el mouse sobre alguna de las Lenguas, el valor indicado en la barra de estado mostrará el valor que se selecciona al hacer "clic" con el botón derecho del mouse. Si en la otra ventana de visualización se tiene al escenario gráfico **Torus Dynamics**, y además se han enlazado los parámetros de las ventanas, al abrir la opción de parámetros se observará que posee los parámetros que fueron indicados. Se procede a realizar la gráfica del toro con los parámetros establecidos.

¿Cuál es la diferencia entre las órbitas de una y otra lengua, si ambas son de periodo 3?

Para responder a tal cuestión, necesitaremos el escenario gráfico **Lifts** para compara los levantamientos de las órbitas de periodo 3. Ver Figs. 6.5 y 6.6

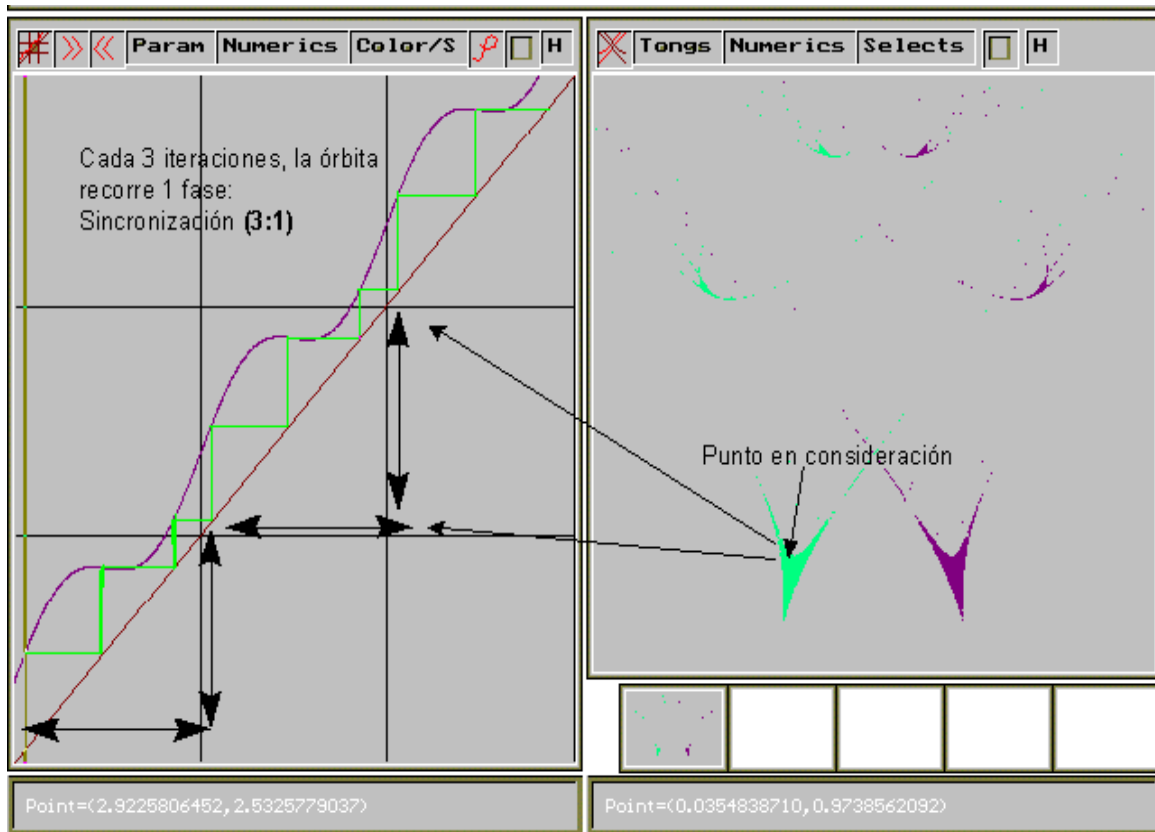


Fig. 6.5: Gráfica con sincronización (3 : 1)

a=0.348387	b=0.179739
------------	------------

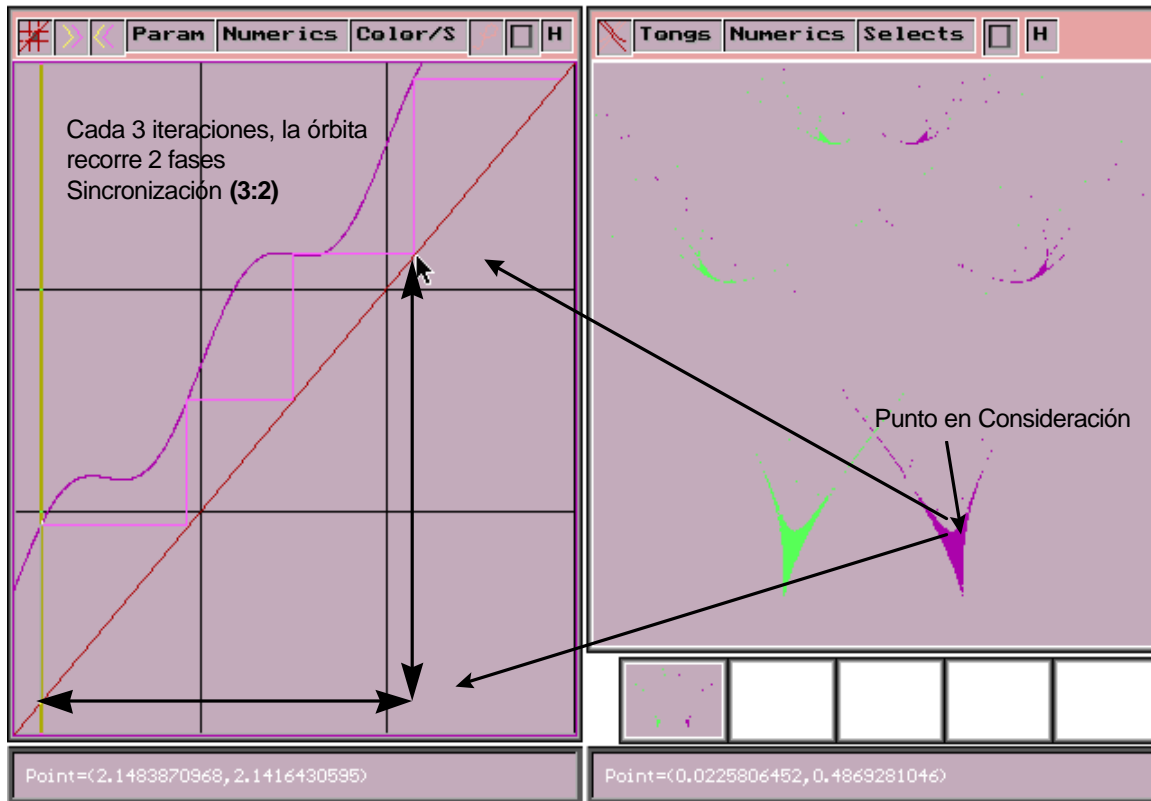


Fig. 6.6: Gráfica con sincronización (3 : 2)

a=.641935	b=.183007
-----------	-----------

En estas gráficas podemos ver cuantos ciclos del forzamiento deben darse hasta que se repita la fase de disparo. En la Fig. 6.5 se necesita un ciclo completo y en la Fig. 6.6 dos ciclos; este número, que es uno de los parámetros de la sincronización, se conoce como la **envolvencia** de la órbita.

Ahora, podemos decir que la sincronización es la suma de periodicidad y envolvencia. Usaremos la siguiente notación: **Sincronización = (Periodo : Envolvencia)** La relación entre sincronización y número de rotación es ahora clara:

$$\text{No. de Rotación} = \text{Envolvencia/Periodo}$$

6.3 Coexistencia de Sincronizaciones

Otro aspecto interesante de las lenguas es que estas se intersectan (dos a dos), lo que implica, en la región donde se intersectan, la existencia de dos órbitas periódicas estables: este es el fenómeno de biestabilidad que se ilustró en el ejemplo de la **sección 1.3**.

En la Fig. 6.7 se ilustran las lenguas de periodo 3, en donde podemos comprobar que efectivamente los valores de los parámetros del ejemplo de la sección 1.3 (**a=0.5, b=0.675**) se encuentran en la intersección de las lenguas.

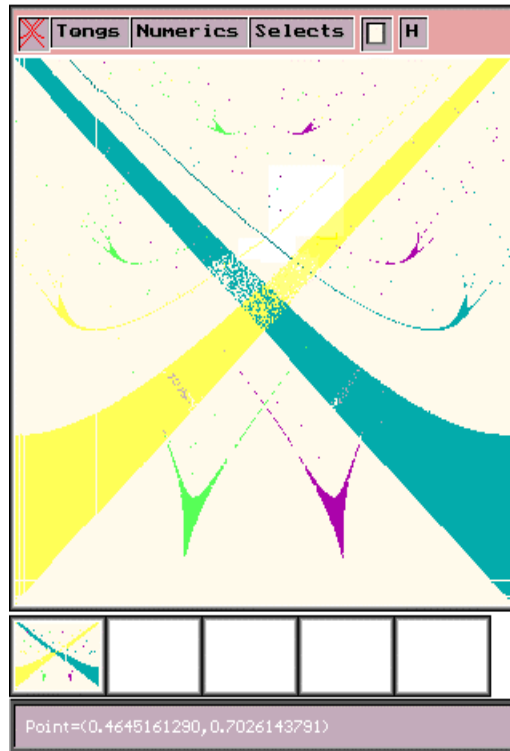


Fig. 6.7: Sincronizaciones de periodo 3

Hagamos una amplificación en la región que contendrá el punto de parámetros para el ejemplo anterior, ver Fig. 6.8:

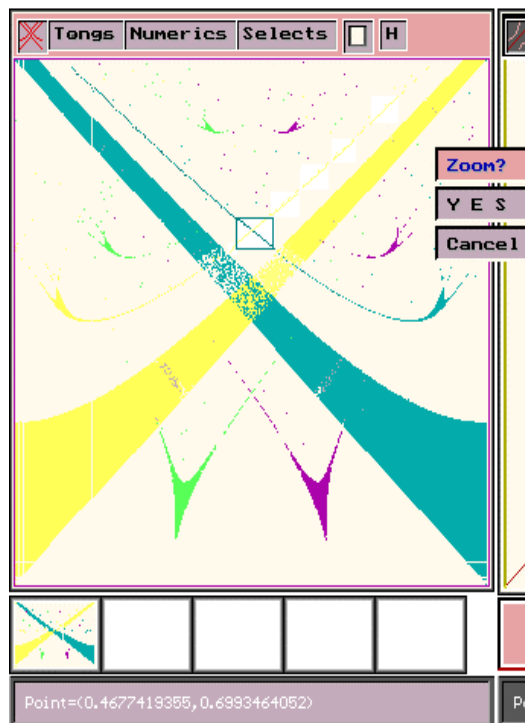


Fig. 6.8: Región a amplificar para observar con mayor detalle el valor de los parámetros en consideración

Llevando a cabo la amplificación en la región indicada por el cuadro, tendremos la Fig. 6.9:

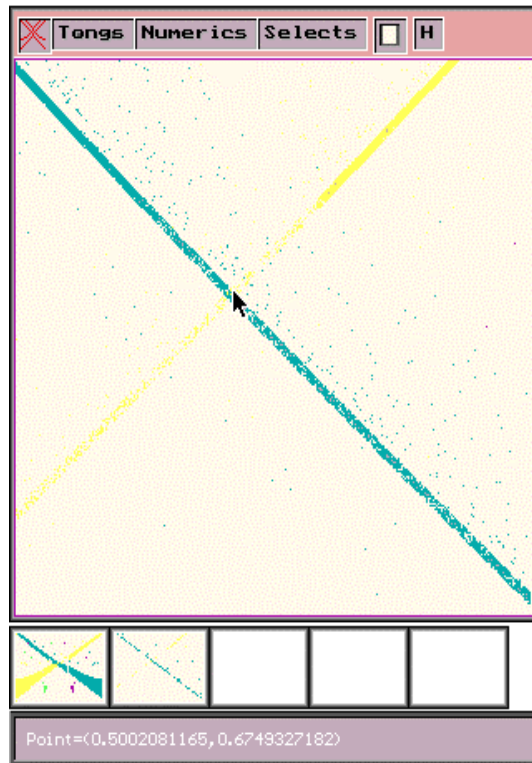


Fig. 6.9: Región Amplificada de la Región de interés

El cursor está indicando el punto de parámetros elegidos, mostrando que se encuentra en la intersección de las lenguas **(3:1)** y **(3:2)**.

Conclusiones

En este trabajo se exponen resultados tanto teóricos como numéricos acerca de la dinámica de funciones de la circunferencia, en particular sobre la familia clásica, también llamada familia de Arnold. Tal familia es originada por un tipo de osciladores de integración y disparo, conocidos con el nombre de osciladores geométricos de diente de sierra.

Dentro de los resultados teóricos se han generalizado conceptos y proposiciones del tema de sincronización, a partir de generalizar resultados para levantamientos de cualquier grado entero. Estos resultados se exhibieron en el segundo capítulo.

En la parte computacional, el sistema de software DIENTE DE SIERRA fue fundamental para obtener los resultados teóricos mencionados y exhibir gráficamente la riqueza que poseen este tipo de sistemas.

Este software es uno de los primeros que se desarrollan para fines de estudio e investigación de funciones de la circunferencia y osciladores de integración y disparo.

Apéndice

Algunos conceptos y resultados que se mencionan en el transcurso de la tesis, secundarios en aquel momento, se discuten con mayor detenimiento aquí.

1. Espacios Topológicos

Definición 1.1: Sea X un conjunto y \mathcal{L} una familia de subconjuntos de X . Diremos que \mathcal{L} es una topología de X si:

1. $X \in \mathcal{L}$,
2. Si $U, V \in \mathcal{L}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{L}$ y $U \cup V \in \mathcal{L}$,
3. Si $\{V_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}$ entonces $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{L}$.

Consecuentemente:

- $\emptyset \in \mathcal{L}$ (Pues $\emptyset \in \mathcal{L}$ y como $[\emptyset = \emptyset] \in \mathcal{L}$ entonces $\emptyset \in \mathcal{L}$)
Si $V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{L}$ ($n \geq 1$) entonces $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{L}$.

Definición 1.2: Un espacio topológico es una pareja $(X; \mathcal{L})$ en donde X es un conjunto y \mathcal{L} una topología de X .

Definición 1.3: Si \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son dos topologías de un conjunto X , diremos que \mathcal{L}_1 es más chica que \mathcal{L}_2 (o \mathcal{L}_2 más grande que \mathcal{L}_1), denotado por $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$, si cualquier elemento de \mathcal{L}_1 está en \mathcal{L}_2 .

Proposición 1.1: Sea X un conjunto y T una familia de subconjuntos de X . Entonces, la intersección \mathcal{L} de todas las topologías de X que contienen a T es una topología, y es la más chica que contiene a T . (\mathcal{L} recibe el nombre de topología generada por T).

En particular, la intersección de cualquier colección de topologías de X , es una topología de X .

Definición 1.4: Sea $(X; \mathcal{L})$ un espacio topológico. Entonces:

1. $V \subset X$ es abierto si $V \in \mathcal{L}$; cerrado si $X \setminus V \in \mathcal{L}$.
2. $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subset X$ si todo abierto que contiene a x contiene un punto de A distinto de x .
3. $V \subset X$ es una vecindad de $x \in X$, si existe un abierto W tal que $x \in W \subset V$.

Proposición 1.2: Sea $(X; \mathcal{L})$ un espacio topológico. Si $A \subset X$ es abierto si y solo si A es vecindad de cada uno de sus puntos.

Definición 1.5: Sea $(X; \mathcal{L})$ espacio topológico y $A \subset X$. Definimos:

1. $C_A = \overline{A}$ es cerrado y $A \subset C_A$.
2. $A^\circ = \text{Int} A$. (A° es la cerradura de A).
3. $A^a = \text{Der} A$ es punto de acumulación de A . (A^a es el conjunto derivado de A).

Proposición 1.3: Sean A y B subconjuntos arbitrarios de un espacio topológico X, entonces:

1. $\overset{\circ}{A^i} = \overset{\circ}{A}$;
 $X^i = X$,
2. $A \cup A^i$, A^i es cerrado.
3. Si A es cerrado, entonces $A = A^i$, $A^{i^i} = A^i$ y $A^i = A \cup A^a$.
4. $x \in A^i$, toda vecindad de x interseca a A.
5. A es cerrado si y solo si $A \cap A^a = \emptyset$.
6. Si $A \cap B = \emptyset$, $A^a \cap B^a = \emptyset$ y $A^i \cap B^i = \emptyset$, en particular $(A \setminus B)^a \cap A^a \setminus B^a$ y $(A \setminus B)^i \cap A^i \setminus B^i = \emptyset$.
7. $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$ y $(A \cup B)^i = A^i \cup B^i$.
8. Si para cada $x \in X$, f_x^a es cerrado, entonces A^a es cerrado.
9. $A^a \setminus B^a \cap (A \setminus B)^a$;
 $A^i \setminus B^i \cap (A \setminus B)^i$; siendo $C^0 = X \setminus C$;
10. $A^{0a} \setminus B^{0a} \cap (A^0 \setminus B^0)^a$;
 $A^{0i} \setminus B^{0i} \cap (A^0 \setminus B^0)^i$.

Definición 1.6: Sea $(X; \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in A$ es un punto interior de A, si A es vecindad de x, i.e. existe V abierto tal que $x \in V \subseteq A$.

Notación:

i. $A^\circ = \text{int}(A)$,

ii. $\text{Fr}(A) = \text{Frontera de } A = A^i \setminus A^\circ$, que es también cerrado.

El interior de A es el conjunto de puntos interiores de A. Cumpliendo:

1. $(A \setminus B)^\circ = A^\circ \setminus B^\circ$.
2. $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.

Definición 1.7: Sea $(X; \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces:

1. A es fronterizo si $A^\circ = \emptyset$.
2. A es denso en ninguna parte si A^i es fronterizo.
3. A es un dominio cerrado si $A = A^{0i}$.
4. A es un dominio abierto si A° es un dominio cerrado.
5. A es denso en sí mismo si $A \cap A^a = \emptyset$.
6. A es perfecto si A es cerrado y denso en sí mismo.

Proposición 1.4:

1. A fronterizo y B denso en ninguna parte, entonces $A \cup B$ es fronterizo.
2. A y B densos en ninguna parte, entonces $A \cup B$ lo es.
3. A es denso en ninguna parte (fronterizo) y $B \cap A = \emptyset$ B es denso en ninguna parte (fronterizo).

4. $(A \cup B)^{\text{cl}} = A^{\text{cl}} \cup B^{\text{cl}}$.
5. A y B densos en sí mismos, entonces $A \cup B$ lo es.
6. A denso en sí mismo, entonces A^{cl} es perfecto.
7. Si para toda $x \in X$, f_x es cerrado y A denso en sí mismo, entonces A^{cl} es perfecto.

Definición 1.8: Sea $(X; \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto de X , τ_A es una base de τ_A , si para cada $x \in A$ y cada $V \in \tau$ que contiene a x , existe $W \in \tau$ tal que $x \in W \subseteq V$.

Definición 1.9: Sea $(X; \tau)$ un espacio topológico y $S \subseteq \tau$. Diremos que S es una sub-base de τ , si la familia de intersecciones de las subfamilias finitas no vacías de S es una base de τ .

Ejemplos:

- El intervalo $(a; b)$, con $a; b \in \mathbb{Q}$ es una base de la topología usual de \mathbb{R} .
- Los conjuntos $f_x = \{x > a\}$ y $f_x = \{x < a\}$ constituyen una sub-base de la topología usual de \mathbb{R} .

1.1 Subespacios y Topologías Relativas

Definición 1.10:

1. Sea $(X; \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$.
2. Sea $\tau_A = \{C \cap A \mid C \in \tau\}$ y para algún $V \in \tau$; $C = V \setminus A$.

Proposición 1.5: Sea $(X; \tau)$ un espacio topológico y $A; B \subseteq X$ tal que $B \subseteq A \subseteq X$, entonces:

1. $(A; \tau_A)$ es un espacio topológico. Donde $(\tau_A)_B = \tau_B$.
2. B es τ_A -cerrado, si y solo si $B = C \cap A$ donde C es τ -cerrado.

Definición 1.11: Sean $(X_1; \tau_1)$ y $(X_2; \tau_2)$. X_2 es sub-espacio de X_1 , si $X_2 \subseteq X_1$ y $\tau_2 = (\tau_1)_{X_2}$.

Definición 1.12: Dos subconjuntos A, B de un espacio $(X; \tau)$ están τ -separados si:

$$A \cap B^{\text{cl}} = A^{\text{cl}} \cap B = \emptyset.$$

($C \subseteq X$ y C^{cl} cumplen la definición 1.15).

- $A \cup B$ es una τ -separación de un subconjunto $Y \subseteq X$ si A y B son no vacíos, están τ -separados y $Y = A \cup B$.

- Un subconjunto $Y \subseteq X$ es τ -conexo si no admite ninguna τ -separación.

2. Teoría de Grupos

Definición 2.1: Un conjunto no vacío G sobre el cual se ha definido una operación binaria \pm se le llama grupo con respecto a esta operación, si $a; b; c \in G$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(a \pm b) \pm c = a \pm (b \pm c)$, (ley asociata)

2. Existe $u \in G$, tal que $a \pm u = u \pm a = a$, (existencia de elemento neutro) y
3. Para cada $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$, tal que $a \pm a^{-1} = a^{-1} \pm a = u$. (existencia del simétrico)

Proposición 2.1: Propiedades de los Grupos:

1. Si $a; b; c \in G$, de $a \pm b = b \pm c$ (también de $b \pm a = c \pm a$), se sigue $b = c$.
2. Con $a; b \in G$, cada una de las ecuaciones $a \pm x = b$ y $y \pm a = b$ tiene solución única.
3. Para todo $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
4. Para cualesquiera $a; b \in G$, $(a \pm b)^{-1} = b^{-1} \pm a^{-1}$.
5. Para cualesquiera $a; b; \dots; p; q \in G$, se tiene:

$$(a \pm b \pm \dots \pm p \pm q)^{-1} = q^{-1} \pm p^{-1} \pm \dots \pm b^{-1} \pm a^{-1}.$$

Para cualquier $a \in G$ y cualquier $m \in \mathbb{Z}^+$, se define:

- $a^m = a \pm a \pm \dots \pm a$, de m factores.
 - $a^0 = u$, el elemento neutro de G .
 - $a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1} \pm a^{-1} \pm \dots \pm a^{-1}$, de m factores.
6. Para todo $a \in G$, (i) $a^m \pm a^n = a^{m+n}$ y (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$, con $m; n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.2: Si el grupo G , satisface la propiedad de conmutatividad, es conocido como aditivo o abeliano.

Definición 2.3: Se entiende por orden de un grupo G , el número de elementos del conjunto G .

Definición 2.4: Si existe $n \in \mathbb{Z}^+$ mínimo, para el cual $a^n = u$, lo llamaremos orden de un elemento $a \in G$.

Definición 2.5: Un conjunto no vacío G sobre el cual se ha definido una operación binaria \pm se le llama semi-grupo con respecto a esta operación, si $\forall a; b; c \in G$ se cumplen las siguientes propiedades 1 y 2 de la definición de grupo, pero no la 3er. propiedad.

3. Conjuntos Invariantes, Puntos Recurrentes y Puntos No Errantes

Definición 3.1: Se dice que un conjunto D es invariante bajo f si $f(D) \subseteq D$.

Si D es invariante, entonces al iterar cualquier punto de D , caerá siempre en D . Si tanto D como D^c son subconjuntos invariantes, entonces la órbita de cualquier punto de D , estará contenida en D .

Si f es una biyección, como en nuestro caso, entonces D y D^c son invariantes si y sólo si $f(D) = D$.

Proposición 3.1: Tanto el w -límite Q como su complemento son conjuntos invariantes.

Existen 2 tipos de órbitas:

1) Las formadas por puntos aislados o sea que cumplen:

$$Q \setminus Q^a = \{ \}; \text{ y}$$

2) Los que todos sus puntos son de acumulación, es decir cumplen:

$$Q \setminus Q^a = Q$$

Si observamos esto desde el punto de vista dinámico, tenemos que un punto que se encuentra en una órbita del primer tipo nunca vuelve a acercarse al lugar donde se encontraba y, al contrario, un punto de una órbita del segundo tipo, al iterar la función, eventualmente se acerca tanto como se desee al punto de partida. Motivando la siguiente definición:

Definición 3.2:

a) p es recurrente bajo f si dada cualquier vecindad de p , V , existe un entero $n \neq 0$ tal que $f^n(p) \in V$.

b) Denotaremos por $R(f)$ al conjunto de puntos recurrentes de f .

En términos de esta definición, hay dos tipos de órbitas: las formadas por puntos recurrentes y las formadas por puntos no-recurrentes. Estableciendo la proposición siguiente:

Proposición 3.2: $R(f)$ y su complemento son conjuntos invariantes.

Para los homeomorfismos intransitivos, f manda cada componente conexa del complemento del ternario de Cantor en otra componente conexa del mismo conjunto y que las iteradas de éstas nunca regresan a la original.

Así vemos, que un punto que no está en el cantor, no sólo es no-recurrente, sino que hay una vecindad de él, que al iterarla, nunca se vuelve a intersectar con la original.

Definición 3.3:

a) Se dice que p es un punto errante si existe una vecindad de p , V , tal que para todo entero $n \neq 0$, se cumple que: $f^n(V) \cap V = \{ \}$.

b) Al conjunto de puntos que no son errantes se les denota por $E(f)$.

Proposición 3.3: $E(f)$ y $E^c(f)$ son invariantes.

El conjunto de puntos recurrentes y de puntos no errantes son importantes, entre otras cosas, porque "acotan" al ω -límite y al α -límite de las órbitas.

Proposición 3.4: Si f es un homeomorfismo que preserve la orientación, entonces:

$$R(f) \cap [Q \text{ órbita de } f] \cap (Q) \cap [E^c(Q)] \cap E(f)$$

En el caso de homeomorfismos con número de rotación racional, es claro que el conjunto de puntos recurrentes coincide con el conjunto de puntos no errantes y con el conjunto de puntos periódicos.

Si f es un homeomorfismo transitivo, todos los puntos de la circunferencia son recurrentes, cumpliendo también que:

$$R(f) = I(Q) = - (f)$$

Para los homeomorfismos intransitivos, estos 3 conjuntos coinciden y con el ternario de cantor.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Carrillo, J. R. Guzmán, F. Ongay.
Dinámica de las iteraciones de la función de Arnold.
Aportaciones Matemáticas al XXVI Congreso Nacional de la S. M. M., 1994
 - [2] I. E. Díaz Bobadilla.
Sistemas Dinámicos en la Circunferencia.
Tesis Profesional.
U.A.E.M. 1996
 - [3] A. Guzmán.
Dinámica Generada por Homeomorfismos del Circulo.
Tesis Profesional.
U.N.A.M. 1988
 - [4] R. L. Devaney.
An introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Addison Wesley, 1986, USA
 - [5] D. K. Arrowsmith, C. M. Place.
An introduction to Dynamical Systems.
Cambridge University Press, 1990, U. K.
 - [6] M. A. Mendoza.
Dinámica de las Neuronas de Integración y Disparo.
Tesis Profesional.
U.A.E.M. 1998
 - [7] J. Rinzel. Discussion: Electrical Excitability of Cells. Theory and Experiment.
Review of the Hodgkin-Huxley Foundation and Update, 1990.
Review of the Mathematical Biology. Vol 52, num 1/2 pp. 5-23
 - [8] E. Salinas.
Modelación y Simulación de las Oscilaciones del Potencial Eléctrico de una Neurona. 1992.
Tesis de Licenciatura
Facultad de Ciencias, UNAM
 - [9] L. Glass, M. Mackey.
From Clocks to Chaos.
The Rhythms of Life.
Princeton University Press. 1988
 - [10] G. Buzzi Ferraris.
Scientific C++.
Polytechnic of Milan, 1993
 - [11] B. Stroustrup.
The C++ Programming Language.
Second Edition, Addison Wesley, 1991
-

- [12] S. B. Lippman.
C++ Primer.
AT&T Laboratories, 1989.

 - [13] J. D. Smith.
Reusability and Software Construction: C y C++.
John Wiley & Sons, 1990.

 - [14] P. A. Darnell. P. E. Margolis.
Software Engineering in C.
Springer-Verlag (1988).

 - [15] R. Winder.
Developing C++ Software.
John Wiley & Sons (1991).
-