

Chapter 1

Apéndice: Métodos para resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En este apéndice trataremos de las ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir de la forma

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

donde f es una función dada de dos variables. Se le llama solución a cualquier función $y = \phi(x)$, cuya derivada se satisface idénticamente la ecuación (1) y nuestro objetivo es determinar si tales funciones existen y, de ser así, cómo encontrarlas.

El tipo más sencillo de ecuación diferencial de primer orden ocurre cuando f solo depende de x . En este caso,

$$y' = f(x) \quad (2)$$

y se busca una función $y = \phi(x)$ cuya derivada sea la función dada f . De lo aprendido en el cálculo elemental, se sabe que ϕ es una antiderivada de f y se escribe

$$y = \phi(x) = \int_x f(x)dt + c, \quad (3)$$

de donde c es una constante arbitraria. Por ejemplo, si

$$y' = \text{sen}2x,$$

entonces

$$y = \phi(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c.$$

En la ecuación (3) y en todo este apéndice se usa la notación $\int_x f(t)dt$ para denotar una antiderivada de la función f , es decir

$$F(x) = \int_x f(t)dt$$

designa una función representativa de la clase de funciones cuyas derivadas son iguales a f . Todos los miembros de esta clase se incluyen en la expresión $F(x) + c$, donde c es una constante arbitraria.

No se discutirán más las ecuaciones de la forma (2), excepto para hacer notar dos características típicas de las ecuaciones diferenciales de primer orden, en general. Primero, sólo se requiere un proceso de integración para eliminar la derivada de y y obtener la propia y . Segundo, este proceso de integración conduce a una expresión de la solución que comprende una constante arbitraria.

regresemos ahora a considerar la ecuación (1). Desafortunadamente no existe un método general satisfactorio para escribir soluciones de esta ecuación. Por el contrario, se presentarán varios métodos, cada uno de los cuales es aplicable a una cierta clase de ecuaciones de la forma (1).

1.1 El Método de Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

La ecuación diferencial de variables separables es de la forma siguiente:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

donde cada diferencial tiene como coeficiente una función continua de su propia variable, o una constante. Para resolver este tipo de ecuaciones se procede usando la integración directa.

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0.$$

1.1. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIABLES DE VARIABLES SEPARABLES 3

Cuando no pueden separarse las variables de una ecuación y no pueden agruparse en términos, en cada uno de los cuales estén las mismas variables habrá que usar otros métodos para encontrar la solución.

EJEMPLO: Resolver $xyy' = 1 + y^2$, para $y = 3$ cuando $x = 1$ o bien $y(1) = 3$. Reescribiendo

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

separando las variables

$$\frac{y}{1 + y^2} dy = \frac{dx}{x}$$

integrando

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{dx}{x}$$

resulta

$$\frac{1}{2} \ln |1 + y^2| = \ln |x| + \ln |c|$$

Observacion: La constante de integracion no pierde su arbitrariedad, su carácter de cualquier número, si está afectada por funciones. Así, $\ln |c| = c$ porque el logaritmo natural de una constante es también una constante. Usando las propiedades de los logaritmos:

$$\ln |1 + y^2|^{1/2} = \ln |cx|$$

aplicando exponencial:

$$|1 + y^2|^{1/2} = |cx|$$

elevando al cuadrado

$$1 + y^2 = cx^2$$

$\therefore cx^2 - y^2 = 1$, siendo esta la solución general implícita. Aplicando las condiciones iniciales $y(1) = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} c(1) - 9 &= 1 \\ c &= 10 \end{aligned}$$

$\therefore 10x^2 - y^2 = 1$, es la solución particular.

1.2 El Método de Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

La ecuación diferencial homogénea¹ es de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

donde M y N tienen la propiedad de que para toda $t > 0$, la sustitución de x por tx y la de y por ty hace que M y N sean del mismo grado n .

$$\begin{aligned} M(tx,ty) &= t^n M(x,y) \\ N(tx,ty) &= t^n N(x,y), \quad n \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Por ello, este tipo de ecuaciones puede reducirse a ecuaciones de variables separables mediante sustituciones apropiadas. Las ecuaciones diferenciales homogéneas también tienen la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + g(u) = 0 \text{ donde } u = f(x,y)$$

usando sustituciones algebraicas apropiadas, se convierten en ecuaciones de variables separables. Una de las más comunes es:

$$\frac{y}{x} = v \rightarrow y = vx.$$

Ejemplo: Sea la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

usando $y = vx$ y $dy = vdx + xdv$

$$(x^2 + v^2x^2)dx = vx^2(vdx + xdv)$$

dividiendo entre x^2

$$(1 + v^2)dx = v(vdx + xdv)$$

¹Los polinomios homogéneos son aquellos en los que todos los términos son del mismo grado.

1.3. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS 5

separando variables

$$(1 + v^2 - v^2)dx = v x dv$$

$$\frac{dx}{x} = v dv$$

integrando

$$\ln |x| = \frac{v^2}{2} + c$$

como

$$v = \frac{y}{x} \rightarrow \ln |x| = \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + c$$

entonces:

$$\ln |x| = \frac{y^2}{2x^2} + c .$$

1.3 El Método de Ecuaciones Diferenciales Exactas

Dada la función $z = f(x, y)$, se dice que la expresión $dz = f_x dx + f_y dy$ es su diferencial total. Donde f_x y f_y son las derivadas parciales de la función $f(x, y)$, con respecto a cada una de las dos variables independientes; además, suponemos que estas derivadas parciales son continuas en una región \mathfrak{R} del plano xy .

Si tomamos el lado derecho de la expresión y lo igualamos a cero, entonces la igualdad $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta \leftrightarrow el primer miembro es una diferencial total.

Es decir: Si $df = f_x dx + f_y dy \rightarrow f_x dx + f_y dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta y $f_x = M(x, y)$, $f_y = N(x, y)$. Encontrar la solución de una ecuación diferencial exacta es hallar una función $f(x, y)$ tal que su diferencial total sea exactamente la ecuación diferencial dada. Usando la notación de la diferenciación parcial, tenemos:

$$M = \frac{\delta f}{\delta x}, \quad N = \frac{\delta f}{\delta y}$$

si volvemos a derivar estas igualdades, pero cada una con respecto a la otra variable:

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}, \quad \frac{\delta N}{\delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$$

por el cálculo sabemos que si las derivadas parciales son continuas entonces:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$$

esto significa que:

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

por lo tanto, si la ecuación es exacta se cumple esta condición. Por esto estableceremos el siguiente teorema.

TEOREMA: Sean las funciones M , N , M_y y N_x continuas en la región simplemente conexa $\mathfrak{R} : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Entonces la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

es una ecuación diferencial exacta en \mathfrak{R} si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (2)$$

en cada punto de \mathfrak{R} . Esto es, existe una función Ψ que satisface las ecuaciones

$$\Psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \Psi_y(x, y) = N(x, y) \quad (3)$$

si y sólo si M y N satisfacen la ecuación

$$M_y(x, y) = N_x(x, y). \quad (4)$$

La demostración de este teorema se hace en dos partes. Primero demostraremos que si hay una función Ψ tal, que la ecuación (3) sea cierta, entonces se concluye que se satisface la ecuación (2). Calculando N_x y M_y de la ecuación (3) se obtiene

$$M_y(x, y) = \Psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y) = \Psi_{yx}(x, y) \quad (5)$$

Supuesto que M_y y N_x son continuas, se deduce que Ψ_{xy} y Ψ_{yx} también lo son. Esto garantiza su igualdad² y se llega a la ecuación (2)

²Se requiere la hipótesis de continuidad ya que, de otra manera Ψ_{xy} y Ψ_{yx} no serían siempre iguales.

1.3. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS 7

Ahora demostraremos que si M y N satisfacen la ecuación (2), entonces la (1) es exacta. La demostración consiste en elaborar una función Ψ que satisfaga las ecuaciones (3). Integrando la primera de las ecuaciones (3) con respecto a x , manteniendo y constante, se obtiene

$$\Psi(x, y) = \int_x M(t, y) dt + h(y) \quad (6)$$

La función h es una función arbitraria. Ahora debemos demostrar que siempre es posible elegir $h(y)$ tal que $\Psi_x = N$. De la ecuación (6)

$$\begin{aligned} \Psi_y(x, y) &= \frac{\delta}{\delta y} \int_x M(t, y) dt + h'(y) \\ &= \int_x M_y(t, y) dt + h'(y) \end{aligned}$$

haciendo Ψ_y igual a N despejando $h'(y)$ resulta

$$h'(y) = N(x, y) - \int_x M_y(t, y) dt \quad (7)$$

Para determinar $h(y)$ de (7) es esencial que, independientemente de su apariencia, el miembro del lado derecho de la ecuación $\Psi(x, y) = c$ sea solo una función de Y . Para establecer este hecho, podemos derivar la cantidad en cuestión con respecto a x , obteniendo

$$N_x(x, y) - M_y(x, y),$$

que se anula de acuerdo con la ecuación (4). Entonces, a pesar de su forma aparente, el miembro del lado derecho de la ecuación (7) realmente no depende de x , y una sola integración dará $h(y)$. Sustituyendo $h(y)$ en la ecuación (6) obtenemos, como soluciones de las ecuaciones (5),

$$\Psi(x, y) = \int_x M(t, y) dt + \int_x \left[N(x, s) - \int_x M_s(t, s) dt \right] ds \quad (8)$$

Debe notarse que esta prueba contiene un método para el cálculo de $\Psi(x, y)$ que, en consecuencia, sirve para resolver la ecuación diferencial original (1). Sin embargo, generalmente, es mejor llevar a cabo todo

8CHAPTER 1. APÉNDICE: MÉTODOS PARA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIF

este proceso cada vez que se necesite, en lugar de tratar de aprenderse el resultado que se da en la ecuación (8). También cabe notar que la solución se obtiene en forma implícita. Al igual que la sección puede o no ser factible encontrar la solución explícitamente.

Para resolver una ecuación diferencial usando este método, primero vemos si es exacta. Después aplicamos la definición

$$f_x = M(x, y) \quad \text{o} \quad f_y = N(x, y)$$

integrados con respecto a x o con respecto a y

$$f = \int M dx \quad \text{o} \quad f = \int N dy$$

al resultado lo derivamos con respecto a y o con respecto a x

$$f_x = \frac{\delta}{\delta y} \int M dx \quad \text{o} \quad f_y = \frac{\delta}{\delta x} \int N dy$$

igualamos el nuevo resultado a N o a M , e integramos por última vez la ecuación.

EJEMPLO: Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy)dy = 0$$

primero revisaremos si es exacta

$$\begin{aligned} M &= 6xy - 2y^2, & N &= 3x^2 - 4xy, \\ M_y &= 6x - 4y, & N_x &= 6x - 4y. \end{aligned}$$

es exacta porque $M_y = N_x$, ahora nos preguntamos si existirá una función f tal que

$$f_x = M(x, y) \quad \text{y} \quad f_y = N(x, y),$$

por definición; tomemos cualquiera de las dos igualdades, por ejemplo:

$$f_x = M(x, y) \rightarrow f_x = 6xy - 2y^2$$

1.4. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON FACTORES INTEGRANTES 9

integrando respecto a x tenemos

$$\begin{aligned} \int f_x &= \int (6xy - 2y^2) dx \\ f &= 3x^2y - 2xy^2 + f(y) \end{aligned}$$

la constante arbitraria de integración será una función de y , puesto que y funge como constante en esta integral. Derivando con respecto a y :

$$f_y = 3x^2 - 4xy + f'(y)$$

sabemos que $f_y = N(x, y)$ por definición, entonces:

$$f_y = 3x^2 - 4xy$$

como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$3x^2 - 4xy + f'(y) = 3x^2 - 4xy \rightarrow f'(y) = 0$$

integrando: $f(y) = c$.

\therefore la solución es:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy^2 + c$$

o

$$3x^2y - 2xy^2 + c = 0 \text{ o bien } 3x^2y - 2xy^2 = c.$$

La comprobación se reduce a encontrar el diferencial total de la función solución. Obtenemos el mismo resultado, si en vez de tomar la ecuación

$$f_x = M(x, y), \text{ tomamos } f_y = N(x, y).$$

1.4 El Método de Ecuaciones Diferenciales con Factores Integrantes

Si existe una función $F(x, y)$ tal que

$$F(x, y)Mdx + F(x, y)Ndy = 0$$

es exacta, entonces $F(x, y)$ se llama factor de integración de la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$.

Conviene notar que una ecuación diferencial no exacta puede tener varios factores de integrantes. El método para encontrar el factor integrante $F(x, y)$ puede ser por inspección de la ecuación diferencial suponemos una función que luego se prueba por el teorema de la sección anterior.

EJEMPLO: Hallar el factor de integración de la ecuación:

$$3ydx + 4xdy = 0.$$

$$\begin{aligned} M &= 3y & N &= 4x \\ M_y &= 3 & N_x &= 4 \end{aligned}$$

como $M_y \neq N_x$, no es exacta.

Observemos que es de variables separables y su solución es $x^3y^4 = c$, pero debemos encontrar su factor integrante.

Sea $F(x, y) = x^2y^3$ sugerido por la forma de la solución, entonces

$$3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy = 0$$

donde $M = 3x^2y^4$ y $N = 4x^3y^3$, entonces

$$\begin{aligned} M_y &= 12x^2y^3 = N_x, \text{ ya que es exacta,} \\ f_x &= 3x^2y^4 \\ f &= x^3y^4 + f(y), \\ f_y &= 4x^3y^3 + f'(y) = 4x^3y^3 \\ f'(y) &= 0 \\ f(y) &= c \\ \therefore x^3y^4 &= c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos usar la siguiente regla: Si la ecuación diferencial es de la forma $pydx + qxdy = 0$, donde $p, q \in \mathfrak{R}$ entonces

$$F(x, y) = x^{p-1}y^{q-1}$$

1.4. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON FACTORES INTEGRANTES 11

si la ecuación diferencial es de la forma $ydx - xdy = 0$ entonces $\frac{1}{y^2}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{xy}$ son posibles factores integrantes³.

1.4.1 Factores de Integración Dependientes de una sola Variable

El problema, cuando la ecuación no es exacta, es el de encontrar un factor de integración. Este está determinado por la condición

$$(FM)_y = (FN)_x$$

$$F_y M - F_x N + (M_y - N_x)F = 0. \quad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial en F y el problema de encontrar sus soluciones no es en general fácil. Esto parece indicar que se nos complicó la vida, efectivamente esto es así salvo en algunos casos particulares como el que veremos a continuación.

Si la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ tiene un factor de integración F dependiente únicamente de x , entonces

$$F(x) = A \exp \int \left(\frac{M_y - N_x}{N} \right) dx \quad (2)$$

y si $\frac{M_y - N_x}{N} = 0$ entonces (2) es un factor de integración.

Demostración: Si F solo es función de x entonces

$$F_y = 0, F_x = dF/dx$$

y la ecuación (1) toma la forma

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

³Nota: Si el factor depende de las variables x e y los posibles factores integrantes pueden ser de la forma

$$c_1 x^n y^m, c_1 x^n + c_2 y^m, c_1 e^{x^n y^m}, c_1 e^{x^n + y^m}, \text{sen}(x^n + y^m), \text{cos}(y^n + x^m), \text{etc...}$$

donde c_1, c_2, n y m son reales.

12CHAPTER 1. APÉNDICE: MÉTODOS PARA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES D

cuya solución general está dada por la ecuación (2).

Si $\frac{M_y - N_x}{N} = 0$ entonces sustituyendo (2) en (1) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & -A(M_y - N_x) \exp \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \\
 & + A(M_y - N_x) \exp \int \frac{M_y - N_x}{N} dx = 0 \\
 & 0 = 0
 \end{aligned}$$

por lo tanto (2), para cualquier constante A , es un factor de integración de $Mdx + Ndy = 0$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy &= 0 \\
 \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x} \\
 F(x) &= A \exp \int \frac{1}{x} dx = Ax
 \end{aligned}$$

tomando $A = 1$ y multiplicando por $F(x)$ tenemos

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + xy)dy = 0$$

que es una ecuación exacta que tiene como solución la familia de curvas

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c.$$

Análogamente si la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ tiene un factor de integración F dependiente únicamente de y , entonces

$$F(y) = A \exp \int \frac{M_x - N_y}{M} dy \tag{3}$$

y si $\frac{M_x - N_y}{M} = 0$ entonces (3) es un factor de integración.

1.5 El Método de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales deberán cumplir con estas características:

- a) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado
- b) Cada coeficiente depende solamente de la variable dependiente x (o constante)

La forma general de una ecuación de lineal de 1er orden es:

$$y' + f(x)y = r(x)$$

si $r(x)$ es idénticamente igual a cero, entonces la ecuación se llama lineal homogénea (no en el sentido de polinomio homogéneo, sino como nombre que da el álgebra lineal a las ecuaciones igualadas a cero); si $r(x) \neq 0$, entonces es lineal no homogénea. Los métodos de solución son los siguientes:

- i) Si $r(x) = 0$ entonces es de variables separables, y la solución es $y = ce^{-\int f(x)dx}$.
- ii) Si $r(x) \neq 0$ entonces hay que usar el método de factor integrante o el método de variación de parámetros, y la solución es $y = e^{-\int f(x)dx} \left(\int e^{\int f(x)dx} r(x) dx + c \right)$.

Vamos a obtener la solución para $r(x) \neq 0$, usando el método del factor integrante y el de variación de parámetros.

- a) Método del factor integrante. Buscaremos un factor que nos convierta la ecuación diferencial $y' + f(x)y = r(x)$ en exacta y la resolveremos por el método de las exactas.

El hecho de que la solución general de la ecuación diferencial homogénea correspondiente es $y = ce^{-\int f(x)dx}$, sugiere la posibilidad de que un factor para la no homogénea sea de la forma $e^{\int f(x)dx}$.

Vamos a probarlo. Multiplicando la ecuación por este factor, tenemos:

$$e^{\int f(x)dx} y' + f(x) y e^{\int f(x)dx} = r(x) e^{\int f(x)dx}$$

observando que el primer miembro de la ecuación, vemos que esta y en un término, su derivada y' en otro y la exponencial que acompaña a y' , realmente se puede expresar como la derivada de un producto de funciones:

$$\frac{d}{dx} e^{\int f(x)dx} y .$$

Entonces: $\frac{d}{dx} e^{\int f(x)dx} y = r(x) e^{\int f(x)dx}$ integrando con respecto a x :

$$e^{\int f(x)dx} y = \int r(x) e^{\int f(x)dx} dx + c$$

despejando y :

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left(\int e^{\int f(x)dx} r(x) dx + c \right)$$

que es la solución general ya indicada y satisface a la ecuación lineal.

Como $e^{\int f(x)dx}$ nos llevó a la solución propuesta, es el factor de integración que convierte en exacta a la ecuación diferencial lineal no homogénea.

Ejemplo: Dada la ecuación diferencial:

$$dy + (3x^2y - x^2)dx = 0$$

ver si es lineal y resolverla por medio del factor integrante.

Se acomoda según la fórmula indicada: $y' + f(x)y = r(x)$, quedando:

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2$$

1.5. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES 15

como es lineal con $f(x) = 3x^2$ y $r(x) = x^2$, su factor integrante tiene la forma:

$$F(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

multiplicando la ecuación, tenemos:

$$e^{x^3} dy + e^{x^3} (3x^2 y - x^2) dx = 0$$

como:

$$\begin{aligned} M &= e^{x^3} (3x^2 y - x^2) & N &= e^{x^3} \\ M_y &= 3x^3 e^{x^3} & N_x &= 3x^2 e^{x^3} \end{aligned}$$

ya que es exacta, entonces:

$$\begin{aligned} f_x &= e^{x^3} 3x^2 - e^{x^3} x^2 \\ f &= ye^{x^3} - \frac{1}{3} e^{x^3} + f(y) \\ f_y &= e^{x^3} + f'(y) = e^{x^3} \\ f'(y) &= 0 \text{ y } f(y) = c \end{aligned}$$

por lo tanto $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$.

Aplicando directamente la fórmula obtenida mediante el factor de integración, llegamos a la misma solución:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3x^2 dx} \left[\int e^{\int 3x^2 dx} (x^2) dx + c \right] \\ y &= e^{-x^3} \left[\int e^{x^3} x^2 dx + c \right] \\ y &= e^{-x^3} \left[\frac{1}{3} e^{x^3} + c \right] \\ y &= \frac{1}{3} + ce^{-x^3}. \end{aligned}$$

b) Método de variación de parámetros. Es un procedimiento bastante usual en matemáticas introducir cambio

de variables, hacer sustituciones o remplazar funciones por otras más sencillas que faciliten el proceso operativo.

Sabemos que la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de 1er orden

$$y' + f(x)y = 0, \text{ es: } y = ce^{-\int f(x)dx}$$

como nos interesa una solución general para la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y' + f(x)y = r(x),$$

vamos a realizar la siguiente variación de parámetros en la solución general de la homogénea:

$$\text{sea } c = u(x) \text{ y } v = e^{-\int f(x)dx},$$

entonces $y(x) = u(x)v(x)$ será una solución de la no homogénea, siempre y cuando podamos encontrar una función $u(x)$ tal que dicha solución satisfaga a la ecuación. Si es la solución, lo cual vamos a suponer de momento, entonces derivandola y sustituyendola en la ecuación homogénea, tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= uv' + u'v && \text{entonces} \\ uv' + u'v + fuv &= r \\ u'v + (v' + fv)u &= r \end{aligned}$$

como v es la solución de la homogénea, el paréntesis se hace idénticamente cero, ya que siempre que sustituimos la raíz o solución de una ecuación, esta se hace cero. Obtenemos entonces: $u'v = r$ de donde $u' = \frac{r}{v}$

integrandola, $u = \int \frac{r}{v} dx + c$. La función u existe porque $v \neq 0$ es solución, entonces $y = uv$ es solución de la lineal no homogénea y toma este aspecto:

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left(\int \frac{r(x)}{e^{-\int f(x)dx}} dx + c \right)$$

1.5. EL MÉTODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES 17

o sea $y = e^{-\int f(x)dx} \int e^{\int f(x)dx} r(x) dx + c$, que es a donde queríamos llegar.

EJEMPLO: Resolver por variación de parámetros:

$$y' = 2y + x.$$

Veamos que $y' - 2y = x$ es lineal, donde $f(x) = -2$, $r(x) = x$. La ecuación diferencial homogénea correspondiente es $y' - 2y = 0$ que tiene como solución: $y = ce^{2x}$.

Tomando $c = u(x)$, $v(x) = e^{2x}$ y sabiendo que la función u esta dada por

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{r(x)}{v(x)} dx + c \text{ entonces} \\ u &= \int \frac{x}{e^{2x}} dx + c = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c \end{aligned}$$

como la solución de la homogénea es $y = vx$, entonces:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c\right)e^{2x} \quad y \\ y &= -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}. \end{aligned}$$

Aplicando directamente la fórmula obtenida mediante el factor de integración, llegamos a la misma solución.

$$\begin{aligned} y &= e^{\int -2dx} \left(\int e^{-\int -2dx} x dx + c \right) \\ y &= e^{2x} \left(\int e^{-2x} x dx + c \right) \\ y &= e^{2x} \left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c \right) \\ y &= -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}. \end{aligned}$$

1.6 La transformada de Laplace

Entre los conceptos de gran utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales están las transformadas integrales. Una transformada integral es una relación de la forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t)f(t)dt \quad (1)$$

en donde una función f se transforma en otra F , por medio de una integral. Se dice que la función F es la transformada de f y la función K se llama núcleo de la transformación. La idea general es usar la relación (1) para transformar un problema para f en un problema más sencillo para F . Haciendo una selección apropiada del núcleo K y de los límites de integración α y β , a menudo es posible simplificar radicalmente un problema que implique una ecuación diferencial lineal. Se usan varias transformaciones integrales, siendo cada una apropiada para ciertos tipos de problemas.

Esta transformada se define como sigue. Sea $f(t)$ dada para $t \geq 0$, y supongamos que f satisface ciertas condiciones que van a enunciarse un poco después. Entonces la transformada de Laplace de f , la cual denotamos por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o por $F(s)$ se define por medio de la ecuación

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (2)$$

esta transformación hace uso del núcleo $K(s, t) = e^{-st}$ y está asociada particularmente con las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Siendo particularmente útil en la resolución de problemas con términos no homogéneos de naturaleza discontinua o impulsiva. Tales problemas son relativamente difíciles de resolver por medio de los métodos que se estudiaron con anterioridad, los cuales comprenden la reunión de soluciones válidas en intervalos diferentes.

En virtud de que la transformada de Laplace se define por una integral sobre el intervalo desde cero al infinito, es conveniente mencionar primero algunos hechos básicos acerca de tales integrales. En primer lugar, una integral sobre un intervalo no acotado se conoce como integral impropia, definiéndose como límite de integrales sobre intervalos

finitos de la siguiente forma

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt, \quad (3)$$

donde A es un número real positivo. Si la integral desde a hasta A existe para cada $A > a$, y si el límite indicado $A \rightarrow \infty$ existe, entonces se dice que la integral impropia es convergente a ese valor límite. En caso contrario, se dice que la integral diverge \mathbb{R} que no existe.

Antes de discutir la posible existencia de $\int_a^{\infty} f(t)dt$, resulta conveniente definir ciertos términos. Se dice que una función f es seccionalmente continua sobre un intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ si el intervalo puede partirse en un número finito de puntos $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ de forma tal que:

- i) f sea continua sobre cada subintervalo abierto $t_{i-1} < t < t_i$;
- ii) f tienda a un límite finito, conforme se tiende hacia los puntos extremos de cada subintervalo, desde su interior.

En otras palabras, f es seccionalmente continua sobre $\alpha \leq t \leq \beta$ si es continua allí excepto por un número finito de discontinuidades por salto. Si f es seccionalmente continua sobre $\alpha \leq t \leq \beta$ para todo $\beta > \alpha$, entonces se dice que f es seccionalmente continua sobre $t \geq \alpha$.

Si f es seccionalmente continua sobre el intervalo $a \leq t \leq A$, entonces puede demostrarse que $\int_a^A f(t)dt$ existe. Por lo tanto, si f es seccionalmente continua para $t \geq a$, entonces $\int_a^A f(t)dt$ existe para cada $A > a$. Sin embargo, el hecho de que sea seccionalmente continua no asegura que la integral impropia $\int_a^{\infty} f(t)dt$, sea convergente. Si f no puede integrarse fácilmente en términos de funciones elementales, la definición de convergencia de $\int_a^{\infty} f(t)dt$ puede ser difícil de aplicar. Con frecuencia, la forma más conveniente para probar la convergencia o divergencia de una integral impropia es por medio del siguiente teorema de comparación, que es análogo a un teorema similar para las series infinitas.

TEOREMA 1: Si f es seccionalmente continua para $t \geq a$, si $|f(t)| \leq g(t)$ cuando $t \geq M$ para alguna M constante positiva y si $\int_M^{\infty} g(t)dt$

converge, entonces $\int_a^\infty f(t)dt$ también converge. Por otra parte, si $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$, si $\int_M^\infty g(t)dt$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(t)dt$ también diverge.

La demostración de este resultado del cálculo, no se dará aquí; sin embargo, se hace plausible, comparando las áreas representadas por $\int_M^\infty g(t)dt$ y $\int_M^\infty |f(t)| dt$.

Regresemos ahora a la consideración de la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o bien, $F(s)$, la cual se define mediante la ecuación (2), siempre que la integral impropia converja. En general, el parámetro s puede ser complejo, pero para nuestro estudio sólo necesitaremos considerar valores reales de s . De acuerdo con lo dicho anteriormente acerca de las integrales, la función f debe satisfacer ciertas condiciones para que la transformada de Laplace F exista. Las más sencillas y útiles de estas condiciones se enuncian en el siguiente teorema.

TEOREMA 2: Suponga que:

- i) f se seccionalmente continua sobre el intervalo $0 \leq t \leq A$ para cualquier A positiva.
- ii) $|f(t)| \leq Ke^{at}$ cuando $t \geq M$. En esta desigualdad K, a y M son constantes reales, K y M necesariamente positivas.

Entonces, la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, que se define por la ecuación (2), existe para $s > a$.

Para establecer este teorema es necesario demostrar únicamente que la integral de la ecuación (2) converge para $s > a$. Descomponiendo la integral impropia en dos partes, tenemos:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (4)$$

La primera integral del segundo miembro de la ecuación (4) existe, por la hipótesis (i) del teorema; por lo tanto, la existencia de $F(s)$ depende de la convergencia de la segunda integral. Por hipótesis (ii) tenemos, para $t \geq M$,

$$|e^{-st} f(t)| \leq Ke^{-st} e^{at} = Ke^{(a-s)t},$$

y de esta manera, por el teorema 1, $F(s)$ existe siempre que $\int_M^\infty e^{(a-s)t} dt$ converja, lo que demuestra el teorema 2.

1.6.1 Solución de Problemas con Valores Iniciales

En esta sección demostraremos cómo usar la transformada de Laplace para resolver problemas con valores iniciales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. La utilidad de la transformada de Laplace a este respecto, se basa principalmente en el hecho de que la transformada de f' se relaciona, en una forma simple, con la transformada de f . Dicha relación claramente se indica en el siguiente teorema.

TEOREMA 3: Suponga que f es continua y que f' es seccionalmente continua en cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponga además que existen constantes k, a y M tales que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Entonces existe $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ para $a, s > y$, se tiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \quad (1)$$

Para demostrar este teorema, consideremos la integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt.$$

Considerando a t_1, t_2, \dots, t_n como los puntos en el intervalo $0 \leq t \leq A$ donde f' es discontinua; obtenemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f'(t) dt$$

integrando por partes cada término del segundo miembro obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^A \\ &+ s \int_0^{t_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Como f es continua, las contribuciones de los términos integrados en t_1, t_2, \dots, t_n se anulan. Cambiando las integrales, se obtiene

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

Cuando $A \rightarrow \infty$, $e^{-sA}f(A) \rightarrow 0$ siempre que $s > a$. Por lo tanto, para $s > a$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

lo que demuestra el teorema.

Si f' y f'' satisfacen las mismas condiciones que se impusieron para f y f' respectivamente, el teorema 3, entonces se deduce que la transformada de Laplace de f'' también existe para $s > a$ y ésta dada por

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \quad (2)$$

De hecho, siempre que la función f y sus derivadas satisfagan condiciones apropiadas, puede obtenerse una expresión para la transformada de la n -ésima derivada de $f^{(n)}$ por aplicaciones sucesivas de este teorema. El resultado se da en el siguiente corolario.

COROLARIO: Suponga que las funciones $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas y que $f^{(n)}$ es seccionalmente continua en cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponga, además, que existen las constantes K, a y M , tales que

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, \dots, |f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$$

para $t \geq M$. Entonces $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe, para $s > a$ y esta dada por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0). \quad (3)$$

Mostremos ahora cómo puede usarse la transformada de Laplace para resolver problemas con valores iniciales. Consideraremos primero la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (4)$$

y las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (5)$$

Este simple problema se resuelve fácilmente por los métodos descritos anteriormente. La ecuación característica es

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0, \quad (6)$$

y por consiguiente, la solución general de la ecuación (4) es

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}. \quad (7)$$

Las condiciones iniciales (5), requieren que $c_1 + c_2 = 1$, $-c_1 + 2c_2 = 0$; por lo tanto, $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = \frac{1}{3}$, por lo que la solución del problema con valores iniciales (4) y (5) es

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \quad (8)$$

Por medio de la transformada de Laplace, resolvamos ahora el problema dado. Para hacer esto hay que suponer que el problema tienen una solución $y = \phi(t)$, la cual, con sus dos primeras derivadas, satisface las condiciones del corolario. Tomando entonces la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (4), obtenemos

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \quad (9)$$

donde, para escribir la transformada de una suma como la suma de las transformadas, se usó la linealidad de la transformada. Empleando el corolario que se acaba de enunciar podemos expresar $\mathcal{L}\{y''\}$ y $\mathcal{L}\{y'\}$ en términos de $\mathcal{L}\{y\}$, la ecuación (9) toma entonces la forma

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0,$$

ó

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0, \quad (10)$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Sustituyendo $y(0)$ y $y'(0)$ en la ecuación (1) con base en las condiciones iniciales (5), y despejando $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)}. \quad (11)$$

Así se obtuvo, una expresión de la transformada de Laplace $Y(s)$, de la solución $y = \phi(t)$ del problema con valores iniciales dado. Para determinar la función ϕ debemos encontrar la función cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, como se da en la ecuación (11).

En el presente caso podemos hacerlo más fácilmente, desarrollando en fracciones parciales el segundo miembro de la ecuación (11). Así, encontramos que

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1}. \quad (12)$$

Si $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \end{aligned}$$

Finalmente se deduce que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tiene la transformada $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$; de modo semejante, $\frac{2}{3}e^{-t}$ tiene la transformada $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$. De aquí, por la linealidad de la transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

tiene la transformada (12). Esta es la misma solución que por supuesto, se obtuvo antes de forma diferente.

Aun cuando en este sencillo problema, el uso de la transformada de Laplace no ofrece ventajas particulares; podemos señalar las características esenciales del método de la transformada. En primer lugar, se encontró la transformada $Y(s)$ de la función desconocida $y = \phi(t)$ resolviendo una ecuación algebraica la ecuación (10) en lugar de la ecuación diferencial. En seguida, se encontró automáticamente la solución que satisface tanto las condiciones iniciales (5) como la ecuación diferencial (4). Así, no fue necesario determinar los valores apropiados para las constantes arbitrarias que aparecen en la solución general. También se observa que el coeficiente de $Y(s)$ en la ecuación (1) es precisamente el polinomio que también aparece en la ecuación característica (6); de hecho, esto sucede siempre. En virtud de que el uso del desarrollo en fracciones parciales de $Y(s)$, para determinar $\phi(t)$ requiere que se factorice este polinomio, la aplicación de las transformadas de Laplace no evita la necesidad de encontrar las raíces de la

ecuación característica. Para ecuaciones de orden superior al segundo, esto puede ser un problema algebraico difícil, particularmente si las raíces son irracionales o complejas.

La principal dificultad que se presenta al resolver problemas con valores iniciales, para la técnica de la transformada, lo constituye el problema de determinar la función $y = \phi(t)$ correspondiente a la transformada $Y(s)$. Esto se conoce como el problema de inversión de la transformada de Laplace; $\phi(t)$ se llama transformada inversa correspondiente a $Y(s)$ y el proceso de determinar $\phi(t)$ a partir de $Y(s)$, se conoce como "invertir la transformada". Usaremos también la notación $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ para denotar la transformada inversa de $Y(s)$. Existe una fórmula general para la transformada inversa de Laplace, pero su uso requiere conocimientos sobre la teoría de las funciones de la variable compleja.

En la solución del problema con valores iniciales (4) y (5) no se considero si puede haber otras funciones, además de la dada en la ecuación (8), que también tengan la transformada (12). De hecho, puede demostrarse que, si f es una función continua con la transformada de Laplace F , entonces no existe otra función continua que tenga la misma transformada. En otras palabras, existe esencialmente una correspondencia uno a uno entre las funciones y sus transformadas de Laplace.

1.6.2 Funciones Escalón

1.6.3 Una Ecuación Diferencial con una Función Discontinua

1.6.4 Funciones de Impulso

1.6.5 La Integral de Convolución

1.6.6 Consideraciones Generales y Tabla de Transformadas

1.7 Ejercicios:

Hallar la Solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de variables separables:

1) $y' = 4x - 6$

2) $y' = 1 - 7x^2$

3) $y' = 8 + 2x - 3x^2$

4) $y' = x^4 - \frac{1}{x^2} + x$

5) $y' = \frac{9x^2 - 6}{x^2}$

6) $y' = (4 + 3x)^4$

7) $y' = e^{-3x} + 2x$

8) $y' = 2 \cos 5x$

9) $\frac{ds}{dt} = -sent$

10) $\frac{ds}{dt} = \ln t + 4t$

11) $\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{s}$

12) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y}$

$$13) y' = \frac{3x^2 \sqrt{16 + y^2}}{y}$$

$$14) y' = \frac{x^3 \sqrt{x^4 - 1}}{y^3}$$

$$15) y' = e^{x-y}$$

$$16) y' = 4e^{x+y}$$

$$17) y' = \frac{y}{1 + x^2}$$

$$18) y' = \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$19) y' = \frac{\cos^2 x}{y}$$

$$20) y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

En los ejercicios siguientes, hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas usando el método de variables separables.

$$1) y' = 4 - 9x^2 - 6x^5 \text{ para } y(1) = 2$$

$$2) y' = \frac{6x - 12}{x^2} \text{ para } y(1) = 20$$

$$3) y' = e^{4x} - 5 \operatorname{sen} x \text{ para } y(0) = 5$$

$$4) \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} t \text{ para } r(\pi) = 5$$

$$5) \frac{dr}{dt} = 2 \operatorname{sen} t - e^{-t} \text{ para } r(0) = 4$$

$$6) y' = \frac{x}{y} \text{ para } y(1) = 0$$

$$7) y' = \frac{x \sqrt{x^2 - 1}}{y} \text{ para } y(-1) = 1$$

$$8) y' = \ln x - 9x^2 \text{ para } y(1) = 7$$

$$9) y' = e^x \cos^2 y \text{ para } y(0) = \frac{\pi}{4}$$

10) $y' = \frac{e^{-x}}{\operatorname{sen} y}$ para $y(1) = 0$

11) $y' = \frac{y^2}{1+x^2}$ para $y(1) = -\frac{4}{\pi}$

12) $y' = e^{3x+2y}$ para $y(0) = 0$

13) $y' = \frac{\cos^2 x}{y^2}$ para $y(\pi) = -1$

14) $y' = \frac{y}{1-x^2}$ para $y(0) = 1$

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de ecuaciones diferenciales homogéneas:

1) $xy' = y - x$

2) $xy' = y + x$

3) $(x - y)dx + (x - y + 1)dy = 0$

4) $y' = \frac{y^2 + x^2}{2xy}$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

6) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy$

7) $x(x + y)dy = (x^2 + y^2)dx$

8) $xy' - y = x^2e^x$

9) $xy' = x^2 \operatorname{sen} x + y$

10) $(y + x)y' = x - y$

11) $(7x + 2y)y' = -2x - 7y$

12) $(3y^2 + x^2)y' = -2x - 7y$

13) $(2xy + x^2 + 3y^2)y' + (y^2 + 2xy + 3x^2) = 0$

14) $y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}$

15) $x^2 - y^2 = xyy'$

16) $x + xy' = y$

17) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x + y - 4}$

18) $(x^2 + 2xy)y' = -3x^2 - y^2 - 2xy$

Encontrar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas usando el método de ecuaciones diferenciales homogéneas:

1) $(3xy^2 + x^3)y' = 3y^3 + x^2y$ para $y(1) = 2$

2) $(3xy^2 - x^3)y' = 3y^3 - x^2y$ para $y(1) = 0$

3) $y' = \frac{y - x + 8}{y - x - 1}$ para $y(1) = -2$

4) $y' = \frac{y - x - 2}{y - x + 7}$ para $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

5) $(y - x)y' + y = 0$ para $y(0) = 1$

6) $x^2y' = y^2 + xy$ para $y(1) = 1$

7) $(x^2 + xy \operatorname{sen} \frac{y}{x})y' = y^2 \operatorname{sen} \frac{y}{x}$ para $y(1) = \frac{\pi}{2}$

8) $[1 - 2(x + y)]y' + x + y + 1 = 0$ para $y(1) = 0$

9) $x \cos \frac{y}{x} y' = y \cos \frac{y}{x} - x \operatorname{sen} \frac{y}{x}$ para $y(1) = \frac{\pi}{2}$

10) $(xy \cos \frac{y}{x} + x^2 \operatorname{sen} \frac{y}{x})y' = y^2 \cos \frac{y}{x}$ para $y(1) = \frac{\pi}{2}$

Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas; si lo son, resolverlas.

1) $(2x - 5y + 2)dx + (1 + 6y - 5x)dy = 0$

2) $(2xy^3 - 4y + 4x - 3)dx + (3x^2y^2 - 4x)dy = 0$

3) $(16xy - 3x^2)dx + (8x^2 + 2y)dy = 0$

4) $(-20xy^2 + 6x)dx + (3y^2 - 20x^2y)dy = 0$

5) $(e^x + y)dx + (e^y + x)dy = 0$

6) $(y - \frac{x}{y^2}e^{y/x})dx + (x + \frac{1}{x}e^{y/x})dy = 0$

7) $(1 - \frac{y}{x^2}e^{y/x})dx + (1 + \frac{1}{x}e^{y/x})dy = 0$

8) $(1 - \frac{y}{x}e^{y/x})dx + e^{y/x}dy = 0$

9) $y(1 + \cos xy)dx + x(1 + \cos xy)dy = 0$

10) $(6xy^3 + y \operatorname{sen} xy + 1)dx + (9x^2y^2 + x \operatorname{sen} xy)dy = 0$

11) $(y \cosh xy + 2x)dx + (x \cosh xy - 2y)dy = 0$

12) $e^x \cos y dy - x e^x \operatorname{sen} y dy = 0$ para $y(0) = \pi$

13) $[\cos(x + y) - 1]dx + \cos(x + y)dy = 0$ para $y(0) = \frac{\pi}{2}$

14) $e^x \operatorname{sen} y dx + (e^x \cos y + e^y)dy = 0$ para $y(0) = 0$

15) $(2x \operatorname{sen} y + y e^{xy})dx + (x \cos y + e^{xy})dy = 0$ para $y(1) = 1$

16) $(\sqrt{y} + 1)dx + \frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 dy = 0$ para $y(1) = 4$

17) $1 - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + 1 - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = 0$ para $y(0) = -2$

18) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + y dx + x - \frac{1}{2y^{3/2}} dy = 0$ para $y(9) = 1$

19) $\frac{1}{x} + 2x dx + \frac{1}{y} - 1 dy = 0$ para $y(1) = 1$

20) $2x - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + 2y + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} dy = 0$

para $y(1) = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando un factor de integración apropiado:

1) $x^{-2}y^{-5}dx + x^{-3}y^{-4}dy = 0$

2) $x^2 \operatorname{sen} x dx + xy dy = 0$

3) $(y + x + 2)dx + dy = 0$

4) $(e^x + y^2)dx + (xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2)dy = 0$

5) $(xy + y + y^2)dx + (x + 2y)dy = 0$

$$6) (2\operatorname{sen}y - \operatorname{sen}x + \frac{1}{x} \cos x)dx + (\frac{1}{y} \cos x + x \cos y + \frac{x}{y} \operatorname{sen}y)dy = 0$$

$$7) (2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0$$

$$8) (6x^2y^2 - 4y^4)dx + (2x^3y - 4xy^3)dy = 0$$

$$9) \frac{y}{x^2} + 2 dx + \frac{1}{x}(1 + \ln xy)dy = 0$$

$$10) \frac{1}{y^2}(1 + \ln xy)dx + \frac{x}{y^3} - 3 dy = 0$$

$$11) y(1 + \ln xy + 2x)dx + (x - 2y^2)dy = 0$$

$$12) xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}} dx + x^2dy = 0 \text{ para } y(-3) = 0$$

$$13) (4y^2 - 5xy)dx + (6xy - 5x^2)dy = 0 \text{ para } y(1) = 2$$

$$14) (ye^{2y} + x + 1)dx + (ye^{2y} + e^{2y} - x)dy = 0 \text{ para } y(1) = 0$$

$$15) [-y - \cot(x + y)]dx - ydy = 0 \text{ para } y(\pi) = \pi$$

16) Encuentre las soluciones de la ecuación lineal de primer orden $y' + a(x)y = b(x)$ con $a(x)$ y $b(x)$ continua. **Recomendación:** Considere una ecuación exacta equivalente.

17) La ecuación

$$y' + a(x)y = y^n b(x)$$

es conocida con el nombre de ecuación de Bernoulli. Demuestre que mediante la sustitución $y^{-n+1} = v$ se convierte en una ecuación lineal y de primer orden.

18) Resuelva la ecuación $y' + 2xy + xy^4 = 0$.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método ecuaciones diferenciables lineales:

$$1) \frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$$

$$2) \frac{dy}{dx} + y = 2^{2x}$$

$$3) y' + 3x^2y = x^2$$

4) $y' + (\cos x)y = \cos x$

5) $y' - \frac{y}{x} = x^4$

6) $xy' - 2y = 3x^2 + 2x$

7) $xy' + 4y = 9x^5 + 2x^3$

8) $xy' - 3y = 5x^5 + x^2$

9) $xy' + 4y = x^{-3}e^x$

10) $xy' - 3y = x^4 \operatorname{sen} x$

11) $xy' - 5y = x^5 \sec^2 x$

12) $x^2y' + 2xy = e^{3x}$

13) $x^2y' - xy = x^2e^{x^2/2}$

14) $xy' - 2x^2y = e^{x^2}$

15) $y' + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\operatorname{sen} x}$

16) $y' - (\operatorname{senh} x)y = xe^{\cosh x}$

17) $y' - \frac{1}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$

18) $y' + (\ln x)y = \ln x$

19) $y' + (1 + 3x^2)y = 3 + 9x^2$

20) $y' + (\sec x)y = \cos x$

21) $y' + y = e^{-x}$ para $y(0) = -\frac{1}{4}$

22) $y' - (\tan x)y = x \sec x$ para $y(0) = \sqrt{\pi}$

23) $y' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ para $y(0) = 4$

24) $y' + \frac{1}{1+x^2}y = e^{-\tan^{-1} x}$

25) $y' + (\sec x \tan x)y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ para $y(0) = 6$

En cada uno de los problemas use la transformada de Lapace para resolver el problema con valores iniciales dados:

1) $y'' - y' - 6y = 0$ para $y(0) = 1, y'(0) = -1$

2) $y'' + 3y' + 2y = 0$ para $y(0) = 1, y'(0) = 0$

3) $y'' - 2y' + 2y = 0$ para $y(0) = 0, y'(0) = 1$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$ para $y(0) = 0, y'(0) = 1$

5) $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$ para $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1$

6) $y^{iv} - y = 0$ para $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0$

7) $y'' - 2y' - 2y = 0$ para $y(0) = 2, y'(0) = 0$

8) $y'' + \varpi^2 y = \cos 2t$ para $\varpi \neq 4, y(0) = 1, y'(0) = 0$

9) $y'' - 2y' + 2y = \cos t$ para $y(0) = 1, y'(0) = 0$

10) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$ para $y(0) = 0, y'(0) = 1$