Propiedades del conjunto de Cantor.

José Mateos Cortes.

INTRODUCCION

La mayoría de los cursos y libros que hablan del conjunto de Cantor lo tratan en forma puramente geométrica. Se empieza presentando su construcción geométrica y, a partir de la geometría, se deducen sus propiedades más importantes. No consideramos que esta forma de presentarlo sea mala. De hecho es muy ilustrativa y los argumentos que se usan son muy claros. Este trabajo nace de las preguntas: ¿Es posible hacer un tratamiento riguroso del conjunto de Cantor? ¿Es posible dar este tratamiento riguroso sin sufrir demasiado?

En esta tesis damos una respuesta positiva a la primera pregunta y damos una respuesta satisfactoria a la segunda. Claro, el lector tiene la última palabra para decir si no sufre mucho leyéndola.

En el capítulo 1 damos una construcción análitica del conjunto de Cantor y probamos que es equivalente a la construcción geométrica. Además damos pruebas formales de las propiedades básicas que mencionan la mayoría de los libros. Aquí es oportuno mencionar que la construcción que damos es original. Original en el sentido de que no la encontramos en ningún otro lado, aunque por su naturalidad no dudamos que haya sido desarrollada antes por otras personas.

En el capítulo 2 demostramos que el conjunto de Cantor es un espacio métrico, compacto, no vacío, totalmente disconexo, perfecto y no numerable. La prueba central de este capítulo es la prueba del teorema que nos dice que el conjunto de Cantor es homeomorfo a un producto numerable de copias del espacio discreto $\{0, 2\}$. Como vemos en el capítulo 3, este teorema es muy útil para deducir propiedades topológicas del conjunto de Cantor.

El capítulo 3 está dedicado a desarrollar los que consideramos los resultados topológicos más importantes del conjunto de Cantor, a saber:

1. Todo espacio métrico compacto es imagen continua del conjunto de Cantor, y

2. Todo espacio métrico, compacto, no vacío, totalmente disconexo y sin puntos aislados es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Capítulo 1

De nuestros cursos de Análisis Matemático y Topología hemos vislumbrado que el conjunto de Cantor juega un papel muy importante en las matemáticas. Usualmente se nos presenta su construcción geométrica y, a partir de ella, desarrollamos algunas de sus propiedades.

En este capítulo vamos a empezar recordando esta construcción geométrica pero vamos a hacer algo más. Vamos a dar las fórmulas exactas que definen a los intervalos que se consideran en la construcción del conjunto de Cantor para, de esta manera, probar sus propiedades formalmente.

CONSTRUCCION GEOMETRICA DEL CONJUNTO DE CANTOR.

Tomamos el intervalo unitario $[0,1]$ de la recta real. Dividimos este intervalo en tres subintervalos iguales. De esta manera obtenemos los siguientes intervalos.

$$\left[0,\tfrac{1}{3}\right],\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right),\left[\tfrac{2}{3},1\right].$$

El primer paso para la construcción del conjunto de Cantor consiste en quitar el subintervalo abierto intermedio, es decir quitamos a $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Sea el conjunto C_1 la unión de los intervalos restantes, o sea $C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$.

El segundo paso consiste en repetir el mismo proceso a cada uno de los intervalos que componen a C_1. En otras palabras, a cada intervalo que compone a C_1 lo dividimos en tres partes iguales generándose los siguientes subintervalos:

$$\left[0,\tfrac{1}{9}\right],\left(\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9}\right),\left[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}\right] \text{ y } \left[\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}\right],\left(\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9}\right),\left[\tfrac{8}{9},1\right]$$

Quitamos ahora los subintervalos abiertos intermedios. Es decir a C_1 le quitamos los intervalos $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. Sea C_2 el conjunto que nos queda, o sea

$$C_2=\left[0,\tfrac{1}{9}\right]\cup\left[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}\right]\cup\left[\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}\right]\cup\left[\tfrac{8}{9},1\right].$$

Repetimos el proceso, es decir, a cada uno de los intervalos que componen a C_2 (que tienen longitud de $\frac{1}{9}$), lo dividimos en tres partes iguales y quitamos los tercios medios. Con esto obtenemos el tercer paso de la construcción que consiste en el conjunto:

$$C_3=\left[0,\tfrac{1}{27}\right]\cup\left[\tfrac{2}{27},\tfrac{3}{27}\right]\cup\left[\tfrac{6}{27},\tfrac{7}{27}\right]\cup\left[\tfrac{8}{27},\tfrac{9}{27}\right]\cup\left[\tfrac{18}{27},\tfrac{19}{27}\right]\cup\left[\tfrac{20}{27},\tfrac{21}{27}\right]\cup\left[\tfrac{24}{27},\tfrac{25}{27}\right]\cup\left[\tfrac{26}{27},1\right]$$

Este proceso se sigue indefinidamente. Es decir, para obtener a C_4, se dividen en tres partes todos los intervalos que componen a C_3 y se quitan los intermedios.

En general, C_{m+1} se construye dividiendo en tres partes iguales a los intervalos que componen a C_m y borrando los intervalos abiertos intermedios.

Figura 1. Ilustración de la construcción de C_1,C_2,C_3 y C_4.

Finalmente el **Conjunto de Cantor**, que durante todo este trabajo se le denotará por la letra C, se define como la intersección de todos los conjuntos C_m. Es decir,

$$C = \bigcap \{C_m : m \in \mathbb{N}\}$$

OBSERVACION 1.1. *El problema con esta construcción, es que C_{m+1} depende de C_m. Entonces, si no hemos construido a C_m no sabemos quién es C_{m+1}. Esto dificulta en gran manera la prueba de las propiedades del conjunto de Cantor. Nuestro primer trabajo, a partir de este momento, será encontrar una fórmula explícita para los C_m.*

Una primera propiedad que podemos observar de los C_m es la siguiente.

PROPOSICION 1.2. *C_m es la unión de 2^m intervalos cerrados y ajenos.*

Demostración. Haremos esta prueba por inducción matemática. Claramente C_1 está formado por $2 = 2^1$ intervalos cerrados y ajenos. Supongamos ahora que C_m esta formado por 2^m intervalos cerrados y ajenos. Sabemos que C_{m+1} se obtiene de C_m a partir de dividir cada uno de los intervalos cerrados que conforman a C_m en tres partes iguales y retirar el de en medio. Entonces de cada intervalo de C_m obtenemos dos intervalos. De modo que C_{m+1} tiene el doble de intervalos que C_m. Puesto que C_m tiene 2^m, tenemos que C_{m+1} está formado por $22^m = 2^{m+1}$ intervalos cerrados y ajenos.

De acuerdo con la proposición anterior los intervalos que conforman a C_m son 2^m. Entonces una manera práctica de numerarlos será tomando el conjunto de índices $j \in \{0, 1, 2, ..., 2^m - 1\}$.

Durante todo este trabajo denotaremos con el símbolo $\mathbb{N}^*$ el conjunto de los números naturales incluyendo al cero. Ahora vamos a dar una manera de construir el extremo izquierdo del j-ésimo intervalo de C_m. Para esto haremos una construcción general de unos números a_j, para las $j \in \mathbb{N}^*$.

CONSTRUCCION 1.3. Sea $j \in \mathbb{N}^*$. Si $j = 0$, definimos $a_0 = 0$. Si $j \neq 0$ entonces escribimos a j en su notación binaria, es decir:

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m.$$

donde $b_m = 1$ y $b_i \in \{0, 1\}$. Definimos

$$a_j = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3 + ... + 2b_m \cdot 3^m.$$

En otras palabras, podemos expresar la construcción así:
dada $j \in \mathbb{N}$, la escribimos en su notación binaria, los unos los transformamos en doses y se piensa en el número correspondiente como un número escrito en base tres.

Por ejemplo si $j = 10$, entonces en notación binaria, $j = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$. Por construcción $a_j = a_{10} = 0 \cdot 3^0 + \; 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 = 6 + 2\,(27) = 6 + 54 = 60$.

LEMA 1.4. $a_{2^m} = 2 \cdot 3^m$ *para cada* $m \in \mathbb{N}^*$.

Demostración. Como

$$2^m = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + ... + 1 \cdot 2^m.$$

Calculando a_{2^m} tenemos lo siguiente:

$$a_{2^m} = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3^m = 2 \cdot 3^m.$$

El siguiente teorema nos da una manera muy fácil y útil de calcular a_j. En él mostramos que la función a_j tiene algunas propiedades de linealidad.

TEOREMA 1.5. *Sea $j \in \mathbb{N}$. Expresamos a j en su notación binaria, esto es:*

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m. \textit{ Entonces}$$
$$a_j = a_{(b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m)} = b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_{2^1} + ... + b_m \cdot a_{2^m}$$

Demostración. Sea $j \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario y, lo expresamos en su notación binaria, esto es:
$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m$. (estamos suponiendo que $b_m = 1$).

Por definición $a_j = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + ... + 2b_m \cdot 3^m$. Por el lema 1.4, $b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_2 + ... + b_m \cdot a_{2^m} = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + ... + 2b_m \cdot 3^m$.

Así,

$$a_{(b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \ldots + b_m \cdot 2^m)} = b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_{2^1} + \ldots + b_m \cdot a_{2^m}.$$

Esto completa la prueba del teorema.

A manera de ilustración, calcularemos a_j para los primeros números.

EJEMPLO.

Expresando los siguientes números en su notación binaria tenemos:

$$\begin{gathered}
a_0 = 0 \\
a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 = 2. \\
a_2 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 = 0 + 6 = 6. \\
a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 = 2 + 6 = 8. \\
a_4 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 18. \\
a_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 20. \\
a_6 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 24. \\
a_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 26. \\
a_8 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 54. \\
a_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 56. \\
a_{10} = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 60.
\end{gathered}$$

La siguiente tabla resume estos resultados.

j	a_j
0	0
1	2
2	6
3	8
4	18
5	20
6	24
7	26
8	54
9	56
10	60

Los siguientes lemas nos serán útiles para encontrar una expresión analítica para los conjuntos C_m.

LEMA 1.6. $a_j + 1 < a_{j+1}$ *para cada* $j \in \mathbb{N}^*$.

Demostración. Si j es un número natural par, su primer cifra en notación binaria es cero y entonces j se representa así:

$$j = 0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + ... + b_m \cdot 2^m.$$

Entonces

$$a_j = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + 2b_2 \cdot 3^2 + ... + 2b_m \cdot 3^m.$$

Como

$$j + 1 = 1 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + ... + b_m \cdot 2^m$$

Calculando a_{j+1} obtenemos:

$$a_{j+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + ... + 2b_m \cdot 3^m.$$

Observemos que a_j y a_{j+1} sólo difieren en el primer sumando, que en a_j es 0 y en a_{j+1} es 2.
De manera que $a_{j+1} = 2 + a_j$ y entonces

$$a_{j+1} > 1 + a_j.$$

En el caso de que j es impar, la escritura en notación binaria de j tiene un uno en la cifra de las unidades. De manera que j es de la forma

$$j = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + ... + 1 \cdot 2^i + 0 \cdot 2^{i+1} + b_{i+2} \cdot 2^{i+2} + ... + b_m \cdot 2^m$$

Por supuesto que podría ocurrir que no hubiera ningún 0; en ese caso $i = m$. De todas maneras $i \geq 0$.
Por definición:

$$a_j = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3^i + 0 \cdot 2 \cdot 3^{i+1} + 2b_{i+2} \cdot 3^{i+2} + ... + 2b_m \cdot 3^m.$$

Además

$$j + 1 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + ... + 0 \cdot 2^i + 1 \cdot 2^{i+1} + b_{i+2} \cdot 2^{i+2} + ... + b_m \cdot 2^m.$$

Por lo que

$$a_{j+1} = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + ... + 0 \cdot 2 \cdot 3^i + 1 \cdot 2 \cdot 3^{i+1} + 2b_{i+2} \cdot 3^{i+2} + ... + 2b_m \cdot 3^m.$$

Como la última parte de las dos sumas coincide (la de a_j y la de a_{j+1}), para probar el lema sólo tenemos que mostrar que:

$$(2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + ... + 2 \cdot 3^i + 0 \cdot 3^{i+1}) + 1 < 0 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + ... + 0 \cdot 3^i + 2 \cdot 3^{i+1}.$$

La suma de la izquierda es igual a

$$1 \cdot 3^{i+1}$$

De manera que sólo tenemos que probar que $3^{i+1} < 2 \cdot 3^{i+1}$. Y claramente esta desigualdad es cierta.
Esto concluye la prueba.

LEMA 1.7. *Para toda $j \in \mathbb{N}^*$, $3a_j = a_{2j}$.*

Demostración. Sea

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m.$$

Multiplicando por 2 obtenemos

$$2j = 2\left(b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m\right) = b_0 \cdot 2^1 + b_1 \cdot 2^2 + ... + b_m \cdot 2^{m+1}.$$

Calculemos a_{2j}.

$$\begin{aligned} a_{2j} &= 0 \cdot 3^0 + 2b_0 \cdot 3^1 + 2b_1 \cdot 3^2 + ... + 2b_m \cdot 3^{m+1}. \\ &= 3\left(2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + ... + 2b_m \cdot 3^m\right) = 3a_j. \end{aligned}$$

Por consiguiente $a_{2j} = 3a_j$.

LEMA 1.8. *Para cada* $j \in \mathbb{N}^*$, $3a_j + 2 = a_{2j+1}$.

Demostración. Escribimos

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_m \cdot 2^m,$$

entonces

$$\begin{aligned} 2j + 1 &= \left(b_0 \cdot 2^1 + b_1 \cdot 2^2 + ... + b_m \cdot 2^{m+1}\right) + 1 \\ &= 1 \cdot 2^0 + b_0 \cdot 2^1 + b_1 \cdot 2^2 + ... + b_m \cdot 2^{m+1}. \end{aligned}$$

Ya podemos calcular a_{2j+1}, con esto obtenemos

$$\begin{aligned} a_{2j+1} &= 2 \cdot 3^0 + 2b_0 \cdot 3^1 + 2b_1 \cdot 3^2 + ... + 2b_m \cdot 3^{m+1} \\ &= 2 + 3\left(2b_0 + 2b_1 \cdot 3^1 + ... + 2b_m \cdot 3^m\right) = 2 + 3a_j. \end{aligned}$$

Por tanto $a_{2j+1} = 3a_j + 2$.

Ahora ya estamos listos para dar una definición analítica de los conjuntos C_m. Provisionalmente los llamaremos B_m.

DEFINICION 1.9. *La forma analítica para cada* B_m *con* $m \in \mathbb{N}$ *es*:

$$B_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j + 1}{3^m}\right].$$

donde a_j *es como en la construcción* 1.3.

EJEMPLO.

$B_1 = \left[\frac{a_0}{3}, \frac{a_0+1}{3}\right] \cup \left[\frac{a_1}{3}, \frac{a_1+1}{3}\right] = \left[\frac{0}{3}, \frac{0+1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{2+1}{3}\right] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$

Ahora demostraremos que la forma analítica en que se obtienen los extremos de un B_m es equivalente a la forma geométrica para obtener los extremos de C_m en el conjunto de Cantor. Es decir, $B_m = C_m$.

TEOREMA 1.10. *Para toda* $m \in \mathbb{N}$, $B_m = C_m$.

Demostración. Haremos esta demostración por inducción matemática. Con el ejemplo que acabamos de ver comprobamos que $B_1 = C_1$.

Ahora supongamos que $B_m = C_m$. Es decir, supongamos que

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m}\right]$$

Del Lema 1.6 se deduce que los intervalos $\left[\frac{a_0}{3^m}, \frac{a_0+1}{3^m}\right]$, $\left[\frac{a_1}{3^m}, \frac{a_1+1}{3^m}\right]$, ..., $\left[\frac{a_{2^m-1}}{3^m}, \frac{a_{2^m-1}+1}{3^m}\right]$ son ajenos entre sí. De acuerdo con la construcción geométrica, estos intervalos son los que tenemos que dividir en tres partes iguales para obtener a C_{m+1}.

Tomemos uno de estos intervalos, digamos el $\left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m}\right]$ al dividirlo en tres partes iguales obtenemos los subintervalos:

$$\left[\frac{3a_j}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+1}{3^{m+1}}\right], \left(\frac{3a_j+1}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+2}{3^{m+1}}\right) \; y \; \left[\frac{3a_j+2}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+3}{3^{m+1}}\right].$$

Le quitamos el de en medio y de esta manera podemos decir que obtenemos a los intervalos que conforman a C_{m+1} a partir de C_m, esto es:

$$C_{m+1} = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left(\left[\frac{3a_j}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+1}{3^{m+1}}\right] \cup \left[\frac{3a_j+2}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+3}{3^{m+1}}\right]\right).$$

Aplicando el Lema 1.7 y el Lema 1.8 tenemos lo siguiente:

$$C_{m+1} = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left(\left[\frac{a_{2j}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2j}+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2j+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2j+1}+1}{3^{m+1}} \right] \right)$$

$$= \left[\frac{a_{2\cdot 0}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2\cdot 0}+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2\cdot 0+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2\cdot 0+1}+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2\cdot 1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2\cdot 1}+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2\cdot 1+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2\cdot 1+1}+1}{3^{m+1}} \right] \cup ...$$
$$\cup \left[\frac{a_{2(2^m-1)}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2(2^m-1)}+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2(2^m-1)+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2(2^m-1)+1}+1}{3^{m+1}} \right]$$

$$= \left[\frac{a_0}{3^{m+1}}, \frac{a_0+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_1}{3^{m+1}}, \frac{a_1+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_2}{3^{m+1}}, \frac{a_2+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_3}{3^{m+1}}, \frac{a_3+1}{3^{m+1}} \right] \cup ...$$
$$\cup \left[\frac{a_{2^{m+1}-2}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2^{m+1}-2}+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2^{m+1}-1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2^{m+1}-1}+1}{3^{m+1}} \right]$$

$$= \bigcup_{j=0}^{2^{m+1}-1} \left[\frac{a_j}{3^{m+1}}, \frac{a_j+1}{3^{m+1}} \right] = B_{m+1}.$$

Por consiguiente, hemos demostrado que la construcción geométrica y la construcción analítica de C_m coinciden para toda $m \in \mathbb{N}$. Por lo cual, ya tenemos derecho a escribir:

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right].$$

Si al leer la Definición 1.9, usted dudó que el último extremo derecho de C_m es igual a 1 para cada $m \in \mathbb{N}$. En la observación siguiente mostramos que esta afirmación es verdadera.

OBSERVACION 1.11. En efecto, como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{m-1} = 2^m - 1.$$

Aplicándole la función tenemos:

$$\begin{aligned} a_{2^m-1} &= 1\cdot 2\cdot 3^0 + 1\cdot 2\cdot 3^1 + 1\cdot 2\cdot 3^2 + ... + 1\cdot 2\cdot 3^{m-1} \\ &= 2\left(3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{m-1}\right) = 3^m - 1. \end{aligned}$$

$$\frac{a_{2^m-1}+1}{3^m} = \frac{3^m-1+1}{3^m} = \frac{3^m}{3^m} = 1.$$

Y esto vale para cada $m \in \mathbb{N}$.

Ahora que ya tenemos una expresión analítica para los intervalos que componen a C_m, estamos en posibilidades de dar pruebas formales de algunas de sus propiedades. Varias de ellas son muy claras de la construcción geométrica.

PROPOSICION 1.12. *Los intervalos que componen a C_m tienen longitud de $\frac{1}{3^m}$.*

Demostración. Ya sabemos que

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^{m+1}}\right].$$

Sea $k \in \{0, 1, ..., 2^m - 1\}$. Por el Lema 1.6 los intervalos de C_m son ajenos entre sí y, el k-ésimo intervalo tiene longitud igual a

$$l\left(\left[\frac{a_k}{3^m}, \frac{a_k+1}{3^m}\right]\right) = \frac{a_k+1}{3^m} - \frac{a_k}{3^m} = \frac{1}{3^m}.$$

PROPOSICION 1.13. *La suma de las longitudes de los intervalos que componen a C_m es igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^m$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ y su correspondiente C_m, es decir:

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m}\right].$$

Por la Proposición 1.1 cada C_m tiene 2^m intervalos cerrados y por la Proposición 1.12 los intervalos que componen a C_m tienen longitud de $\frac{1}{3^m}$. Entonces la suma total de las longitudes es igual a:

$$\underbrace{\frac{1}{3^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{3^m}}_{2^m\ veces}=\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{2^m\ veces}}{3^m}=\frac{2^m}{3^m}=\left(\frac{2}{3}\right)^m$$

PROPOSICION 1.14. *$C_{m+1}\subset C_m$ para cada $m\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Sabemos que

$$C_{m+1}=\bigcup_{j=0}^{2^{m+1}-1}\left[\frac{a_j}{3^{m+1}},\frac{a_j+1}{3^{m+1}}\right].$$

Dada $x\in C_{m+1}$ entonces existe $k\in\{0,1,\ldots,2^{m+1}-1\}$ tal que $x\in\left[\frac{a_k}{3^{m+1}},\frac{a_k+1}{3^{m+1}}\right]$. Aplicando el Lema 1.7 y el Lema 1.8 obtenemos que para toda j se cumple:

$$\frac{a_j}{3^m}=\frac{3a_j}{3^{m+1}}=\frac{a_{2\cdot j}}{3^{m+1}}.$$

$$\frac{a_j+1}{3^m}=\frac{3a_j+3}{3^{m+1}}=\frac{3a_j+2+1}{3^{m+1}}=\frac{a_{2\cdot j+1}+1}{3^{m+1}}.$$

Ahora bien, por hipótesis

$$\frac{a_k}{3^{m+1}}\leq x\leq\frac{a_k+1}{3^{m+1}}.$$

PRIMER CASO. Si k es un número par entonces k es de la forma $k=2\cdot i$. Como $0\leq k\leq 2^{m+1}-2$, entonces $0\leq i\leq 2^m-1$. Como

$$\frac{a_i}{3^m}=\frac{a_{2\cdot i}}{3^{m+1}}\leq x\leq\frac{a_{2\cdot i}+1}{3^{m+1}}=\frac{a_{2\cdot i}}{3^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}<\frac{a_i}{3^m}+\frac{1}{3^m}=\frac{a_i+1}{3^m}$$

Concluimos que

$$x\in\left[\frac{a_i}{3^m},\frac{a_i+1}{3^m}\right]\subset\bigcup_{j=0}^{2^m-1}\left[\frac{a_j}{3^m},\frac{a_j+1}{3^m}\right]=C_m.$$

Por tanto $x\in C_m$.

SEGUNDO CASO. Si k es un número natural impar entonces k es de la forma $k = 2 \cdot i + 1$. Como $1 \leq k \leq 2^{m+1} - 1$, $0 \leq \frac{k-1}{2} \leq \frac{2^{m+1}-2}{2} = 2^m - 1$. Entonces $0 \leq i \leq 2^m - 1$.

Por el Lema 1.6, $a_{2i} + 1 < a_{2i+1}$. De manera que $a_{2i} < a_{2i+1}$.

Entonces

$$\frac{a_i}{3^m} = \frac{a_{2i}}{3^{m+1}} < \frac{a_k}{3^{m+1}} \leq x \leq \frac{a_k + 1}{3^{m+1}} = \frac{a_{2i+1} + 1}{3^{m+1}} = \frac{a_i + 1}{3^m}.$$

Por tanto $x \in \left[\frac{a_i}{3^m}, \frac{a_i+1}{3^m}\right] \subset C_m$.

Esto termina la prueba de que $C_{m+1} \subset C_m$.

Ahora demostraremos que tanto el extremo izquierdo como el extremo derecho de cada uno de los intervalos que componen a C_m pertenecen al conjunto de Cantor.

LEMA 1.15. *Si $0 \leq k \leq 2^m - 1$ entonces $\frac{a_k}{3^m} \in C_n$* y *$\frac{a_k+1}{3^m} \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dada $m \in \mathbb{N}$, consideremos a su correspondiente C_m, esto es:

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j + 1}{3^m}\right].$$

Sea $k \in \{0, 1, 2, ..., 2^m - 1\}$. Los extremos que corresponden a k-ésimo intervalo son

$$\frac{a_k}{3^m}, \frac{a_k + 1}{3^m} \in C_m$$

Por la Proposición 1.14

$$C_m \subset C_{m-1} \subset C_{m-2} \subset ...$$

Así, por lo anterior, los extremos izquierdo y derecho son elementos de $C_{m-1}, C_{m-2}, ..., C_1$. Ahora veremos que estos extremos también están en los C_n siguientes.

Sabemos que (Lema 1.7)

$$\frac{a_k}{3^m} = \frac{a_{2k}}{3^{m+1}} = \frac{a_{4k}}{3^{m+2}} = \frac{a_{8k}}{3^{m+3}} = ...$$

Como $0 \leq k < 2^m$, entonces $0 \leq 2k < 2^{m+1}$. Así que $0 \leq 4k < 2^{m+2}$, entonces $0 \leq 8k < 2^{m+3}$ y así sucesivamente.

Entonces

$\frac{a_k}{3^m}$ es un extremo para $C_{m+1}, C_{m+2}, C_{m+3}, ...$

Por otra parte, por el Lema 1.8,

$$\frac{a_k + 1}{3^m} = \frac{a_{2k} + 1}{3^{m+1}} = \frac{a_{2(2k+1)+1} + 1}{3^{m+2}} = \frac{a_{2(2(2k+1)+1)+1} + 1}{3^{m+3}} = ...$$

Como $0 \leq k \leq 2^m - 1$, entonces $0 \leq 2k + 1 \leq 2^{m+1} - 1$. De aquí que $0 \leq 2(2k+1) + 1 \leq 2^{m+2} - 1$ y así sucesivamente.

Entonces $\frac{a_k+1}{3^m}$ también es un extremo para $C_{m+1}, C_{m+2}, C_{m+3}, ...$

Esto termina la prueba del lema.

La siguiente proposición nos dice que el conjunto de Cantor es un conjunto denso en sí mismo.

PROPOSICION 1.16. *Sea $\varepsilon > 0$. Si $x \in C$ entonces existe $y \neq x$ tal que $|x - y| < \varepsilon$* y $y \in C$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\left(\frac{1}{3}\right)^m \to 0$ cuando $m \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$.

Por hipótesis, $x \in C$ entonces $x \in C_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. En particular, $x \in C_N$ por lo cual, existe $k \in \{0, 1, ..., 2^N - 1\}$ tal que $x \in \left[\frac{a_k}{3^N}, \frac{a_k+1}{3^N}\right]$.

Por el Lema 1.15, $\frac{a_k}{3^N} \in C$ y $\frac{a_k+1}{3^N} \in C$. Elegimos $y = \frac{a_k}{3^N}$ o $y = \frac{a_k+1}{3^N}$ para que $y \neq x$. Entonces

$$|x - y| \leq \left|\frac{a_k + 1}{3^n} - \frac{a_k}{3^n}\right| = \frac{1}{3^N} < \varepsilon.$$

Esto termina la prueba de la proposición.

A continuación daremos una caracterización de los elementos del conjunto de Cantor, que dice que $x \in C$ si y sólo si a x lo podemos expresar como una serie infinita de ceros y doses divididos entre potencias de tres.

TEOREMA 1.17. *$x \in C$ si y sólo si existe una sucesión $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ con cada $e_m \in \{0, 2\}$ tal que*

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}$$

Demostración.
$(\Rightarrow)$. Sea $x \in C$, por la definición de C tenemos que $x \in C_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Haremos una construcción general de unos números $e_m^{(n)}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq m \leq n$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_n$, entonces existe $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ tal que $x \in \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}\right]$.

Escribimos al número natural k en notación binaria, esto es:

$$k = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + ... + b_r \cdot 2^r \text{ con } b_r = 1$$

Como

$$2^r \leq b_r \cdot 2^r + ... + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 = k$$

y $k \leq 2^n - 1$, por transitividad se obtiene

$$2^r \leq 2^n - 1 < 2^n$$

Por tanto, $r < n$.

Completando con ceros, si hace falta, escribimos al número natural k como lo siguiente:

$$k = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + ... + b_{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

Calculando a_k,

$$a_k = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + 2b_2 \cdot 3^2 + ... + 2b_{n-1} 3^{n-1}$$

(nótese que los ceros que pudimos haber añadido no afecta a la definición de a_k).

Así

$$\frac{a_k}{3^n} = \frac{2b_0}{3^n} + \frac{2b_1}{3^{n-1}} + \frac{2b_2}{3^{n-2}} + ... + \frac{2b_{n-1}}{3} \qquad (*)$$

Definimos

$$e_n^{(n)} = 2b_0,\ e_{n-1}^{(n)} = 2b_1,\ e_{n-2}^{(n)} = 2b_2, ..., e_1^{(n)} = 2b_{n-1}$$

(observemos que cada $e_m^{(n)}$ es igual a 0 ó a 2).

Observemos que las $e_m^{(n)}$ que estamos definiendo dependen de m, de x y de n. En realidad queremos que sólo dependan de m y de x. Esto es lo que vamos a probar a continuación.

AFIRMACION. $e_m^{(n)}$ no depende de n.

En efecto, recordando la construcción geométrica para C, (ya vimos en el Teorema 1.10 que la construcción geométrica y la analítica son equivalentes) sabemos que

$$C_{n+1} \cap \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}\right] = \left[\frac{a_{2k}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k}+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_{2k+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1}+1}{3^{n+1}}\right]$$

Entonces $x \in \left[\frac{a_{2k}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k}+1}{3^{n+1}}\right]$ o $x \in \left[\frac{a_{2k+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1}+1}{3^{n+1}}\right]$.

De manera que ahora ya estamos en posibilidades de calcular $e_m^{(n+1)}$.

En el caso en que $x \in \left[\frac{a_{2k}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k}+1}{3^{n+1}}\right]$.

Como $a_{2k} = 2b_0 \cdot 3^1 + 2b_1 \cdot 3^2 + 2b_2 \cdot 3^3 + ... + 2b_{n-1} \cdot 3^n$

Entonces, por definición

$$e_{n+1}^{(n+1)} = 0,\ e_n^{(n+1)} = 2b_0,\ e_{n-1}^{(n+1)} = 2b_1,\ e_{n-2}^{(n+1)} = 2b_2, ...,\ e_1^{(n+1)} = 2b_{n-1}.$$

De modo que

$$e_n^{(n+1)} = e_n^{(n)}, e_{n-1}^{(n+1)} = e_{n-1}^{(n)}, ..., e_1^{(n+1)} = e_1^{(n)}.$$

Y en el caso en que $x \in \left[\frac{a_{2k+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1}+1}{3^{n+1}}\right]$.

Como $a_{2k+1} = 2 \cdot 3^0 + 2b_0 \cdot 3^1 + 2b_1 \cdot 3^2 + ... + 2b_{n-1} \cdot 3^n$

Entonces

$$e_{n+1}^{(n+1)} = 2,\ e_n^{(n+1)} = 2b_0,\ e_{n-1}^{(n+1)} = 2b_1,\ e_{n-2}^{(n+1)} = 2b_2, ..., e_1^{(n+1)} = 2b_{n-1}.$$

De modo que

$$e_n^{(n+1)} = e_n^{(n)},\ e_{n-1}^{(n+1)} = e_{n-1}^{(n)}, ...,\ e_1^{(n+1)} = e_1^{(n)}.$$

Por tanto, en los dos casos $e_m^{(n)} = e_m^{(n+1)}$ para toda $m \in \{1, 2, ..., n\}$.
Similarmente, $e_m^{(n)} = e_m^{(n+2)} = e_m^{(n+3)} = ...$ para toda $m \in \{1, 2, ..., n\}$.
Entonces a $e_m^{(n)}$ tenemos derecho a llamarlo simplemente e_m.

Lo que sigue es probar que:

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\left(\frac{1}{3}\right)^m \to 0$ cuando $m \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$. Demostraremos que:

$$0 \leq x - \sum_{m=1}^{n} \frac{e_m}{3^m} < \varepsilon$$

Sea $k \in \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}$ tal que $x \in \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}\right]$, por $(*)$ tenemos que:

$$0 \leq x - \sum_{m=1}^{n} \frac{e_m}{3^m} = x - \sum_{m=1}^{n} \frac{e_m^{(n)}}{3^m} = x - \frac{a_k}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^N} < \varepsilon$$

Esto concluye la prueba de que

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}.$$

$(\Leftarrow)$ Ahora estamos suponiendo que

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m},$$

donde cada $e_m \in \{0,2\}$, demostraremos que $x \in \bigcap \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Esto es equivalente a probar que $x \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. O lo que es lo mismo probar que existe
$j \in \{0,1,...,2^n-1\}$ tal que $x \in \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n}\right]$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Vamos a proponer los coeficientes de la notación binaria del número j como:

$$b_0 = \frac{e_n}{2},\ b_1 = \frac{e_{n-1}}{2}, ...,\ b_{n-1} = \frac{e_1}{2}.$$

Es claro que, $b_i \in \{0,1\}$ para $i = 0,1,...,n-1$. Probaremos que, si

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

entonces $j \in \{0,1,...,2^n-1\}$.

En efecto, por hipótesis, sabemos $e_m \leq 2$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$b_m \cdot 2^m \leq 2^m \text{ para } m = 0,1,...,n-1.$$

De modo que $j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + ... + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \leq 2^0 + 2^1 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Por consiguiente $j \in \{0,1,...,2^n-1\}$.

Además,

$$\frac{a_j}{3^n} = \frac{2b_0 \cdot 3^0 + ... + 2b_{n-1} \cdot 3^{n-1}}{3^n} = \frac{e_n}{3^n} + \frac{e_{n-1}}{3^{n-1}} + ... + \frac{e_1}{3^1} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} = x =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \leq \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_n}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + ...$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_n}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\right) \\
&= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_n}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\right) \\
&= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_n}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{a_j+1}{3^n}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{a_j}{3^n} \leq x \leq \frac{a_j + 1}{3^n}$$

Por tanto,

$$x \in \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j + 1}{3^n} \right] \subset \bigcup_{i=0}^{2^n - 1} \left[\frac{a_i}{3^n}, \frac{a_i + 1}{3^n} \right] = C_n.$$

Como esta construcción es para una n fija pero arbitraria, concluimos, $x \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $x \in C$.

Esto termina la prueba del teorema.

Capítulo 2

En este capítulo desarrollaremos las propiedades topológicas elementales del conjunto de Cantor. Para esto es muy conveniente ver que el conjunto de Cantor es homeomorfo al producto numerable de copias del espacio $\{0, 2\}$, donde $\{0, 2\}$ está dotado de la topología discreta. Una vez que se de este homeomorfismo podremos obtener una serie de resultados topológicos interesantes.

DEFINICION 2.1. Dada una familia $\{(X_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de espacios topológicos. Definimos

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_n \in X_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$$

Sea β la familia de subconjuntos de X de la forma:

$$U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times ...$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i \in \tau_i$ para cada $i \leq n$. Como se ve en los cursos elementales de topología, β constituye la base de una topología τ para X. Es decir, τ está definida por:

$$\tau = \{U \subset X : U \text{ es la unión de elementos de } \beta\}$$

Si cada τ_n, está dada por una métrica d_n (con $d_n(x, y) \leq 1$ para cada $x, y \in X_n$). Definimos

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

por la siguiente fórmula

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ y $y = (y_1, y_2, y_3, ...)$. Es fácil comprobar que d es una métrica para X.

En la siguiente proposición demostraremos que, la topología τ coincide con la topología inducida por d en X. De esta manera podremos realizar más fácilmente las pruebas de la continuidad de algunas funciones que definiremos a lo largo de este capítulo.

PROPOSICION 2.2. *La topología inducida por d en X es la τ que definimos usando a β.*

Demostración. Denotaremos por τ a la topología para X usando β y, por τ_o a la topología para X inducida por d. Demostraremos que τ y τ_o son iguales.

Sea $U \in \tau$, entonces U se expresa como la unión de elementos de β, es decir: existe un $\gamma \subset \beta$ tal que

$$U = \bigcup \{A : A \in \gamma\}$$

Sea $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in U$, entonces existe un $A \in \gamma$ tal que $x \in A \subset U$. Como $A \in \beta$ entonces A es de la forma

$$A = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times ...$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i \in \tau_i$ para cada $i \leq n$. Como $x_i \in U_i \in \tau_i$ y τ_i se define usando a d_i, existe $r_i > 0$, tal que $B_{r_i}(x_i) \subset U_i$.

Para mostrar que $U \in \tau_o$, es suficiente con que demostremos que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$. Proponemos $r = mín\left\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2^2}, ..., \frac{r_n}{2^n}\right\}$.

Dada $y = (y_1, y_2, y_3, ...) \in B_r(x)$, por la definición de d se tiene que

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} < r$$

Para cada $j = 1, 2, ..., n$ se obtiene lo siguiente

$$\frac{d_j(x_j, y_j)}{2^j} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} < r \leq \frac{r_j}{2^j}$$

Por lo cual,

$$\frac{d_j(x_j, y_j)}{2^j} < \frac{r_j}{2^j} \text{ entonces } d_j(x_j, y_j) < r_j, \text{ de modo que } y_j \in B_{r_j}(x_j) \subset U_j$$

Por tanto, $y \in A$.

Hemos probado entonces que $B_r(x) \subset A \subset U$. Entonces $B_r(x) \subset U$. Esto termina la prueba de que $U \in \tau_o$.

Ahora tomemos $U \in \tau_o$. Sea $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ un punto cualquiera de U. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$. Proponemos A_x como:

$$A_x = B_{\frac{r}{2}}(x_1) \times B_{\frac{r}{2}}(x_2) \times ... \times B_{\frac{r}{2}}(x_N) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times ...$$

Entonces $A_x \in \beta$. Dada $y = (y_1, y_2, y_3, ...) \in A_x$ entonces $y_i \in B_{\frac{r}{2}}(x_i)$ para toda $1 \leq i \leq N$. Entonces

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} = \frac{d_1(x_1, y_1)}{2^1} + ... + \frac{d_N(x_N, y_N)}{2^N} + \frac{d_{N+1}(x_{N+1}, y_{N+1})}{2^{N+1}} + ...$$

$$< \frac{r}{2^2} + \frac{r}{2^3} + ... + \frac{r}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + ...$$

$$= \frac{r}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{N-1}}\right) + \frac{1}{2^{N+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right)$$

$$< \frac{r}{2^2}(2) + \frac{1}{2^{N+1}}(2) = \frac{r}{2} + \frac{1}{2^N} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Entonces $y \in B_r(x)$. Por tanto $A_x \subset B_r(x)$. Como $B_r(x) \subset U$, tenemos que $A_x \subset U$. Por tanto, $U \in \tau$.

Posteriormente demostraremos que C es homeomorfo a $\{0,2\} \times \{0,2\} \times ...$, pero antes probaremos que el conjunto de Cantor es un conjunto compacto.

PROPOSICION 2.3. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, C_m es un conjunto cerrado.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m - 1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j + 1}{3^m} \right].$$

Así que, C_m es la unión de 2^m intervalos cerrados. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Por tanto, C_m es un conjunto cerrado, para cada $m \in \mathbb{N}$.

OBSERVACION 2.4. $C_m \subset [0,1]$ para cada $m \in \mathbb{N}$. En efecto, la Proposición 1.14,

$$C_m \subset C_1 \subset [0,1].$$

PROPOSICION 2.5. *C es un conjunto compacto.*

Demostración. Por el Lema 2.3, C_m es un conjunto cerrado, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por definición

$$C = \bigcap \{C_m : m \in \mathbb{N}\}.$$

Esto es, C es la intersección de conjuntos cerrados, entonces C es un conjunto cerrado. Además, $[0,1]$ es un conjunto compacto. Como $C \subset C_m$ y $C_m \subset [0,1]$ para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $C \subset [0,1]$. Finalmente, como los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos, son compactos, C es un conjunto compacto. Con esto, se concluye la prueba.

En el teorema siguiente, demostraremos que C es un conjunto perfecto, es decir, que C es un conjunto cerrado y denso en sí mismo.

TEOREMA 2.6. *C es perfecto.*

Demostración. Por la Proposición 2.5, C es un conjunto cerrado y por la Proposición 1.16, C es denso en sí mismo.

Podríamos recurrir al teorema que dice que una intersección anidada de compactos no vacíos es no vacía para concluir que C es no vacío.

También podemos recordar que 0 es un extremo de C_1 y que como vimos en el Lema 1.15, $0 \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que $0 \in C$. Esto demuestra la siguiente proposición.

PROPOSICION 2.7. *C es un conjunto no vacío.*

LEMA 2.8. *Si*

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^n} \textit{con } e_m, g_m \in \{0, 2\} \textit{ entonces } e_1 = g_1, e_2 = g_2, ..., \; e_n = g_n.$$

Demostración. Esta prueba se realizará por inducción matemática.
Para $n = 1$, se tiene que probar lo siguiente:

$$\text{Si } \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3} \text{ entonces } e_1 = g_1.$$

Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3} \text{ y, además, } e_1 \neq g_1.$$

Como e_1 y g_1 pueden ser cero o dos, entonces ($e_1 = 2$ y $g_1 = 0$) o ($e_1 = 0$ y $g_1 = 2$). Supongamos, por ejemplo que $e_1 = 2$ y $g_1 = 0$, calculando

$$\left|\frac{e_1 - g_1}{3}\right| - \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leq \left|\frac{e_1 - g_1}{3} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \left|\frac{e_1 - g_1}{3}\right| < \frac{1}{3} + \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right|$$

Pero

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| &\leq \frac{|e_2 - g_2|}{3^2} + \frac{|e_3 - g_3|}{3^3} + \frac{|e_4 - g_4|}{3^4} + ... \\ &\leq \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ...\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\right) = \frac{2}{3^2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Es decir,

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Por tanto } \frac{2}{3} < \frac{1}{3} + \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Así, hemos obtenido $\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$, lo cual es un absurdo. Por tanto,

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3} \text{ implica que } e_1 = g_1.$$

El otro caso, cuando $e_1 = 0$ y $g_1 = 2$, es análogo, ya que $\frac{|e_1 - g_1|}{3} = \frac{|0-2|}{3} = \frac{2}{3}$

Supongamos ahora que la afirmación es cierta para $n = k$, es decir,

$$\text{Si } \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^k} \text{ entonces } e_1 = g_1, e_2 = g_2, ..., e_k = g_k.$$

Demostraremos que entonces se cumple para $n = k + 1$, o sea, Si $\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}}$ entonces $e_1 = g_1, e_2 = g_2, ..., e_{k+1} = g_{k+1}$.

Supongamos entonces que

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Como $\frac{1}{3^{k+1}} < \frac{1}{3^k}$, podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtener que

$$e_1 = g_1, e_2 = g_2, ..., e_k = g_k.$$

Como

$$\left|\frac{e_{k+1} - g_{k+1}}{3^{k+1}}\right| - \left|\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leq \left|\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}}$$

Obtenemos que

$$\left|\frac{e_{k+1} - g_{k+1}}{3^{k+1}}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} + \left|\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right|$$

Supongamos que $e_{k+1} \neq g_{k+1}$, tenemos dos subcasos, es decir, ($e_{k+1} = 2$ y $g_{k+1} = 0$) o ($e_{k+1} = 0$ y $g_{k+1} = 2$); en cualquier caso tenemos

$$\frac{|e_{k+1} - g_{k+1}|}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

Calculando, como lo hicimos en el primer caso de la inducción, tenemos que

$$\frac{2}{3^{k+1}} = \left|\frac{e_{k+1} - g_{k+1}}{3^{k+1}}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} + \left|\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

Es decir, $\frac{2}{3^{k+1}} < \frac{2}{3^{k+1}}$, lo cual es un absurdo. Esta contradicción muestra que $e_{k+1} = g_{k+1}$.

Esto concluye la prueba del lema.

TEOREMA 2.9. *C es homeomorfo a* $\{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times ...$

Demostración. Sea

$$\varphi : C \longrightarrow \{0,2\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times ...$$

Definida de la siguiente forma. Dada $x \in C$, por el Teorema 1.17, existe una sucesión $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde cada $e_m = 0$ ó 2 tal que

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}.$$

Definimos

$$\varphi(x) = (e_1, e_2, e_3, ...).$$

Vamos a comprobar que φ esta bién definida. Para esto tenemos que ver que la representación de cada x como una serie de ese tipo es única.

Supongamos entonces que hay una $x \in C$ que tiene dos representaciones como las siguientes:

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{3^m} \text{ con } e_m, g_m \in \{0,2\} \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $e_n \neq g_n$ y además, n es el primer subíndice donde son distintas. Entonces ($e_n = 0$ y $g_n = 2$) o ($e_n = 2$ y $g_n = 0$). Supongamos por ejemplo que $e_n = 0$ y $g_n = 2$, calculando se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + \frac{e_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{e_{n+2}}{3^{n+2}} + ... \\
&\leq \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + ... \\
&= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ...\right) \\
&= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \\
&< \frac{e_1}{3^1} + \frac{e_2}{3^2} + ... + \frac{e_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} + \frac{g_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{g_{n+2}}{3^{n+2}} + ... \\
&= \frac{g_1}{3^1} + \frac{g_2}{3^2} + ... + \frac{g_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{g_n}{3^n} + \frac{g_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{g_{n+2}}{3^{n+2}} + ... = x
\end{aligned}$$

De aquí que $x < x$ lo cual es un absurdo. Por tanto, $e_n = g_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el otro caso, cuando $e_n = 0$ y $g_n = 2$, la prueba es análoga.

Así, hemos probado que la representación de x, es única. Por tanto, φ esta bién definida.

Para probar que φ es una función inyectiva sean

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \text{ y } x_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{3^m}, \text{ donde } e_m, g_m \in \{0, 2\}.$$

Supongamos que $\varphi(x) = \varphi(x_1)$. Por la definición de φ se tiene que $(e_1, e_2, e_3, ...) = (g_1, g_2, g_3, ...)$. Por la definición de igualdad en el producto, se tiene que $e_1 = g_1, e_2 = g_2, e_3 = g_3, ...$. Esto implica que, $x = x_1$.

Por tanto φ es inyectiva.

Para mostrar que φ es suprayectiva, tomemos $(e_1, e_2, e_3, ...) \in \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times ...$. Consideremos la serie:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}$$

Ya que $0 \leq e_m \leq 2$, entonces $\frac{e_m}{3^m} \leq \frac{2}{3^m}$. De modo que esta serie está acotada por una que es convergente. Esto muestra que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \text{ converge.}$$

Le llamamos x a su límite. Por el Teorema 1.17, $x \in C$. Entonces $\varphi(x) = (e_1, e_2, e_3, ...)$. Por tanto la función φ es suprayectiva. Así, φ es una función biyectiva.

Ahora demostraremos que φ es continua en C. Tenemos que mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_1| < \delta$ entonces $d(\varphi(x), \varphi(x_1)) < \varepsilon$.

Tomemos una $\varepsilon > 0$ arbitraria. Sea $M \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$ y sea $\delta = \frac{1}{3^M}$. Tomemos x y $x_1 \in C$, de manera que $|x - x_1| < \frac{1}{3^M}$.

$$\text{Escribimos } x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \text{ y } x_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{3^m}.$$

Por el Lema 2.8, como

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_m-g_m}{3^m}\right| = |x-x_1| < \frac{1}{3^M}, \text{ entonces } e_1=g_1, e_2=g_2, ..., e_M=g_M.$$

Además, la métrica d_n para el conjunto $\{0,2\}$, es la métrica discreta, es decir:

$$d_n(p,q) = \begin{cases} \frac{|p-q|}{2} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases}$$

Es claro, que $d_n \leq 1$.

Calculando

$$\begin{aligned} d(\varphi(x),\varphi(x_1)) &= \frac{|e_1-g_1|}{2^2}+\frac{|e_2-g_2|}{2^3}+...+\frac{|e_M-g_M|}{2^{M+1}}+\frac{|e_{M+1}-g_{M+1}|}{2^{M+2}}+... \\ &= \frac{|e_{M+1}-g_{M+1}|}{2^{M+2}}+\frac{|e_{M+2}-g_{M+2}|}{2^{M+3}}+... \\ &\leq \frac{2}{2^{M+2}}+\frac{2}{2^{M+3}}+\frac{2}{2^{M+4}}+.... \\ &= \frac{2}{2^{M+2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right) = \frac{2}{2^{M+2}}(2) = \frac{1}{2^M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como x y x_1 fueron elegidos arbitrariamente en C, entonces φ es uniformemente continua en C y, por tanto continua en C.

Entonces tenemos una función φ continua e inyectiva del espacio métrico compacto C sobre el espacio métrico $\{0,2\}\times\{0,2\}\times\{0,2\}\times...$. De acuerdo con [Rudin, Teo. 4.17], φ es un homeomorfismo.

Esto concluye la prueba del teorema.

Por el teorema [Rudin, Teo. 2.43], como C es perfecto, se tiene que C es no numerable.

En realidad, como C es homeomorfo a $\{0,2\}\times\{0,2\}\times\{0,2\}\times...$, podemos y vamos a repetir la prueba clásica de Cantor para mostrar que C no es numerable.

A partir de este momento denotamos a $\{0,2\}\times\{0,2\}\times\{0,2\}\times...$ por $\{0,2\}^{\infty}$.

TEOREMA 2.10. *C es no numerable.*

Demostración. Haremos esta demostración por reducción al absurdo. Esto es, supongamos que C es numerable. Por el Teorema 2.9, C y $\{0,2\}^\infty$ tienen la misma cardinalidad. Entonces también estamos suponiendo que $\{0,2\}^\infty$ es numerable. De modo que estamos suponiendo que $\{0,2\}^\infty$ se puede escribir en la forma

$$\{0,2\}^\infty = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

Supongamos que

$$\begin{aligned}
a_1 &= (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}, e_4^{(1)}, ...)\\
a_2 &= (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)}, e_4^{(2)}, ...)\\
a_3 &= (e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)}, e_4^{(3)}, ...)\\
a_4 &= (e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, e_3^{(4)}, e_4^{(4)}, ...)\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Construyamos un elemento $(e_1, e_2, e_3, e_4, ...) \in \{0,2\}^\infty$, de la siguiente manera:

$$e_n = \begin{cases} 0 \text{ si } e_n^{(n)} = 2 \\ 2 \text{ si } e_n^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, ...) \in \{0,2\}^\infty .$$

Notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, ..., e_n, ...) \neq (e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, e_3^{(n)}, e_4^{(n)}, ..., e_n^{(n)}, ...)$$

Porque $e_n \neq e_n^{(n)}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, la lista en que numeramos a todos los elementos de $\{0,2\}^\infty$, no contiene al elemento que acabamos de construir, lo cual es un absurdo. Por tanto, $\{0,2\}^\infty$ es no numerable.

Hasta ahora, hemos probado algunas propiedades topológicas del conjunto de Cantor, a saber, que es un espacio métrico, compacto, no vacío, perfecto y no numerable. Ahora veremos, que es un conjunto totalmente disconexo, esto es, que las componentes conexas de C son sólo puntos. Para probar esta propiedad, daremos los siguientes lemas.

LEMA 2.11. *Sean $x \in C$, $r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2\cdot 3^n} < r$, entonces $B_r(x) \cap (\mathbb{R} - C_n) \neq \emptyset$.*

Demostración. Haremos esta prueba por reducción al absurdo. Supongamos, por el contrario, que $B_r(x) \subset C_n$. Por hipótesis, si $x \in C$ entonces $x \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que

$$C_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n}\right]$$

los intervalos $\left[\frac{a_0}{3^n}, \frac{a_0+1}{3^n}\right], \left[\frac{a_1}{3^n}, \frac{a_1+1}{3^n}\right], ..., \left[\frac{a_{2^n-1}}{3^n}, \frac{a_{2^n-1}+1}{3^n}\right]$, son cerrados y ajenos dos a dos. Además, $B_r(x)$ es un conjunto conexo y como $B_r(x) \subset C_n$, entonces existe un $k \in \{0,1,...,2^n-1\}$ tal que

$$B_r(x) \subset \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}\right],$$

de aquí que,

$$2r = diámetro\,(B_r(x)) \leq diámetro\left(\left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}\right]\right) = \frac{1}{3^n}.$$

Esta contradicción prueba que $B_r(x) \cap (\mathbb{R} - C_n) \neq \emptyset$ y concluye la prueba del lema.

LEMA 2.12. *Sean $x, y \in C$ con $x < y$ entonces existe $z \in \mathbb{R} - C$ tal que $x < z < y$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $(x, y) \subset C$. Elegimos un $p \in (x, y)$, entonces $p \in C$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset (x, y)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < r$. Por el Lema 2.11, existe $q \in B_r(p) \cap (\mathbb{R} - C_n)$. Entonces $q \in B_r(p) \subset (x, y) \subset C \subset C_n$ y $q \in \mathbb{R} - C_n$.

Este absurdo muestra que el lema es cierto.

TEOREMA 2.13. *C es un conjunto totalmente disconexo.*

Demostración. Tenemos que probar que las componentes conexas del conjunto de Cantor son sus puntos. Supongamos que una componente no es un punto y la llamamos A, es decir, vamos a suponer que A es un conjunto conexo, $A \subset C$, y que existen $x, y \in A$ tales que $x < y$. Por el Lema 2.12, existe $z \in \mathbb{R} - C$ tal que $x < z < y$.

Dada $p \in A$, $p \neq z$ pues $z \notin C$. De modo que $p < z$ o $p > z$. Esto muestra que

$$A = ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A) .$$

Notemos que $x \in (-\infty, z) \cap A$ y $y \in (z, \infty) \cap A$. Entonces hemos escrito a A como la unión de dos conjuntos abiertos (en A), ajenos y no vacíos. Esto contradice la conexidad de A y termina la prueba del teorema.

Capítulo 3

En el capítulo anterior vimos que el conjunto de Cantor es un espacio métrico, compacto, perfecto, no vacío y totalmente disconexo.

En este capítulo probaremos que estas propiedades caracterizan al conjunto de Cantor. Es decir, si un espacio topológico X tiene todas estas propiedades entonces X es homeomorfo al conjunto de Cantor.

El otro resultado importante de este capítulo será que todo espacio métrico y compacto es una imagen continua del conjunto de Cantor.

Los resultados importantes para probar este último teorema son:

- El conjunto de Cantor es homeomorfo a un producto numerable de copias de él.

- Hay una función continua y suprayectiva de C al intervalo $[0, 1]$.

- Hay una función continua y suprayectiva de C al cubo de Hilbert.

- Todo espacio métrico y compacto se puede encajar como un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert.

- El conjunto de Cantor se puede retraer a cualquiera de sus subconjuntos cerrados y no vacíos.

A lo largo de este capítulo, identificaremos al conjunto de Cantor C con el espacio $\{0, 2\}^{\infty}$. Esto es posible debido al Teorema 2.9. Entonces cuando nos refiramos a un elemento de C, escribiremos una sucesión de ceros y doses.

PROPOSICION 3.1. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, C es homeomorfo a C^n.*

Demostración. Primero se demostrará para $n=2$. Esto es, C es homeomorfo a $C\times C$. La prueba para toda $n\in\mathbb{N}$ se hará por inducción matemática. Sea

$$f:C\times C\longrightarrow C$$

definida por la correspondencia

$$f\left(\left(a_1,a_2,a_3,...\right),\left(b_1,b_2,b_3,...\right)\right)=\left(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...\right)$$

Demostraremos que f es una función inyectiva. Sean

$$f\left(\left(a_1,a_2,a_3,...\right),\left(b_1,b_2,b_3,...\right)\right)=\left(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...\right)$$

y

$$f\left(\left(c_1,c_2,c_3,...\right),\left(d_1,d_2,d_3,...\right)\right)=\left(c_1,d_1,c_2,d_2,c_3,d_3,...\right).$$

Supongamos que

$$f\left(\left(a_1,a_2,a_3,...\right),\left(b_1,b_2,b_3,...\right)\right)=f\left(\left(c_1,c_2,c_3,...\right),\left(d_1,d_2,d_3,...\right)\right).$$

Esto es, equivalente a

$$\left(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...\right)=\left(c_1,d_1,c_2,d_2,c_3,d_3,...\right),$$

entonces $a_i=c_i$, al igual que $b_i=d_i$ para cada $i\in\mathbb{N}$, esto es, por la definición de igualdad en el producto. Así,

$$\left(a_1,a_2,a_3,...\right)=\left(c_1,c_2,c_3,...\right)\text{ y }\left(b_1,b_2,b_3,...\right)=\left(d_1,d_2,d_3,...\right).$$

Por tanto, f es una función inyectiva.

Para mostrar que f es una función suprayectiva tomemos un punto arbitrario $\left(a_1,a_2,a_3,...\right)\in C$ entonces $\left(\left(a_1,a_3,a_5,...\right),\left(a_2,a_4,a_6,...\right)\right)\in C\times C$.

Aplicando la f :

$$f\left(\left(a_1,a_2,a_3,...\right),\left(a_2,a_4,a_6,...\right)\right)=\left(a_1,a_2,a_3,a_4,...\right).$$

Por lo que, f es una función suprayectiva.

Vamos a demostrar que f es una función continua. De acuerdo con [Willard, Teo. 8.8] , esto es equivalente a probar que, $\pi_n \circ f$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, calculando:

$$\pi_n \circ f\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right) = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ b_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Esta fórmula nos muestra que $\pi_n \circ f$ es prácticamente una proyección. Para hacerlo más explícito, consideremos las funciones φ_1 y φ_2 definidas por

$$\varphi_1\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right) = \left(a_1, a_2, a_3, ...\right)$$
$$\varphi_2\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right) = \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)$$

Calculando
$\pi_n(\varphi_1\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right)) = \pi_n\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right)\right) = a_n$. Mientras que
$\pi_{2n-1}\left(f\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right)\right) = a_{\frac{2n-1+1}{2}} = a_n$.
De igual manera:
$\pi_n(\varphi_2\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right)) = \pi_n\left(\left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right) = b_n$. Por otra parte,
$\pi_{2n}\left(f\left(\left(a_1, a_2, a_3, ...\right), \left(b_1, b_2, b_3, ...\right)\right)\right) = b_{\frac{2n}{2}} = b_n$.
De manera que $\pi_n \circ \varphi_1 = \pi_{2n-1} \circ f$ y $\pi_n \circ \varphi_2 = \pi_{2n} \circ f$. Como φ_1, φ_2 y π_n son continuas, podemos concluir que

$$\pi_n \circ f \text{ es continua para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, f es una función continua.

Como $C \times C$ es un métrico compacto (el producto cartesiano de conjuntos compactos es un conjunto compacto), y además tenemos una función f continua e inyectiva de un espacio métrico compacto sobre C. De acuerdo con [Rudin, Teo. 4.17] , f es un homeomorfismo.

Esto termina la prueba de que C es homeomorfo a $C \times C$.

Para hacer el paso inductivo, suponemos que

$$\underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n-veces} \text{ es homeomorfo a } C.$$

Como

$$\underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n+1-veces} \text{ es homeomorfo a } (\underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n-veces}) \times C,$$

por hipótesis de inducción, el producto de la derecha es homeomorfo a $C \times C$, el cual vimos que es homeomorfo a C.

Por tanto, $\underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n+1-veces}$ también es homeomorfo a C.

Esto completa la inducción y la prueba de la Proposición 3.1.

Como se mencionó al inicio de este capítulo, vamos a demostrar que C es homeomorfo a un producto numerable de copias de él. Para esto, recordemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto numerable, por lo que, denotaremos con α a una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ($\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

PROPOSICION 3.2 *El conjunto de Cantor es homeomorfo a un producto numerable de copias de él. Esto es, C es homeomorfo a $C \times C \times C \times ...$*
.

Demostración. Sea

$$f : C \times C \times C \times ... \longrightarrow C$$

definida por la siguiente correspondencia

$f((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) = (a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, a_{\alpha(3)}, ...)$

Demostraremos que f es una función inyectiva. Sean

$f((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) = (a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, a_{\alpha(3)}, ...)$

y

$f((b_{(1,1)}, b_{(1,2)}, b_{(1,3)}, ...), (b_{(2,1)}, b_{(2,2)}, b_{(2,3)}, ...), (b_{(3,1)}, b_{(3,2)}, b_{(3,3)}, ...), ...) = (b_{\alpha(1)}, b_{\alpha(2)}, b_{\alpha(3)}, ...)$

Supongamos que

$$f((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) = f((b_{(1,1)}, b_{(1,2)}, b_{(1,3)}, ...), (b_{(2,1)}, b_{(2,2)}, b_{(2,3)}, ...), (b_{(3,1)}, b_{(3,2)}, b_{(3,3)}, ...), ...).$$

Esto es equivalente a que

$$(a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, a_{\alpha(3)}, ...) = (b_{\alpha(1)}, b_{\alpha(2)}, b_{\alpha(3)}, ...).$$

Por la definición de igualdad en el producto, obtenemos

$$a_{\alpha(n)} = b_{\alpha(n)} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como α es suprayectiva entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(r) = (n, m)$. Por lo que,

$$a_{(n,m)} = a_{\alpha(r)} = b_{\alpha(r)} = b_{(n,m)}.$$

Así

$$a_{(1,1)} = b_{(1,1)}, a_{(1,2)} = b_{(1,2)}, a_{(1,3)} = b_{(1,3)}, ...$$

Por tanto,
$(a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...) = (b_{(1,1)}, b_{(1,2)}, b_{(1,3)}, ...)$, $(a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...) = (b_{(2,1)}, b_{(2,2)}, b_{(2,3)}, ...)$, $(a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...) = (b_{(3.1)}, b_{(3,2)}, b_{(3,3)}, ...)$, ...
Por tanto, f es una función inyectiva.

Para mostrar que f es una función suprayectiva, tomemos un punto cualquiera $(c_1, c_2, c_3, ...) \in C$. Dadas n y $m \in \mathbb{N}$, definimos $a_{(n,m)} = c_{\alpha^{-1}(n,m)}$. Como $\alpha^{-1}(n, m)$ es un número natural, $c_{\alpha^{-1}(n,m)}$ está bien definido.

Sea $a = ((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) \in C \times C \times C \times ...$

Aplicando f obtenemos

$$f(a) = (a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, a_{\alpha(3)}, ...) = (c_{\alpha^{-1}(\alpha(1))}, c_{\alpha^{-1}(\alpha(2))}, c_{\alpha^{-1}(\alpha(3))}, ...) = (c_1, c_2, c_3, ...).$$

Por tanto f es suprayectiva.

Vamos a demostrar que f es una función continua. De acuerdo con [Willard, Teo. 8.8] , esto es equivalente a probar que $\pi_n \circ f$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, calculando:

$$\pi_n \circ f((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) = \pi_n(a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, a_{\alpha(3)}, ...) = a_{\alpha(n)}.$$

Esta fórmula nos muestra que $\pi_n \circ f$ es prácticamente una proyección. Para hacerlo más explicito consideremos la función ρ_m definida por
$\rho_m = ((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) = (a_{(m,1)}, a_{(m,2)}, a_{(m,3)}, ...)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Como $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces $\alpha(n) = (m, r)$. Calculando
$\pi_r \circ \rho_m((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, a_{(1,3)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, a_{(2,3)}, ...), (a_{(3,1)}, a_{(3,2)}, a_{(3,3)}, ...), ...) = \pi_r(a_{(m,1)}, a_{(m,2)}, a_{(m,3)}, ...) = a_{(m,r)} = a_{\alpha(n)}$.

De manera que $\pi_n \circ f = \pi_r \circ \rho_m$. Como π_r y ρ_m son continuas, podemos concluir que

$$\pi_n \circ f \text{ es continua para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, f es una función continua.

Como $C \times C \times C \times ...$, es un espacio métrico compacto (ya que, el producto de conjuntos compactos es un conjunto compacto), entonces f es una función continua e inyectiva de un espacio métrico compacto sobre C. Por el Teorema 4.17 de [Rudin], f es un homeomorfismo.

Esto concluye la prueba de la Proposición.

Como dijimos en la introducción de este capítulo, mostraremos que el intervalo $[0, 1]$ es imagen continua de C.

A continuación definimos la función g que nos servirá para dicho fin. Para familiarizarnos con ella, la evaluaremos en algunos puntos y bosquejaremos su gráfica. La prueba de sus propiedades está en la Proposición 3.3.

Consideremos la función

$$g : C \longrightarrow [0, 1].$$

definida por la fórmula

$$g((a_1, a_2, a_3, ...)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

Recordemos que cada elemento $x \in C$ lo estamos identificando con la única sucesión $(e_1, e_2, e_3, ...)$ de ceros y doses que cumple

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n}.$$

Expresaremos algunos elementos de C, en forma de serie para calcular su imagen bajo g:

$$0 = \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + ...$$

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ...$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + ...$$

$$\frac{1}{9} = \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ...$$

$$\frac{2}{9} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + ...$$

$$\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ...$$

$$\frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + ...$$

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ...$$

Aplicando g, a los elementos anteriores se tiene,

$$g((0,0,0,0,...)) = \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + ... = 0$$

$$g((0,2,2,2,...)) = \frac{0}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{2}{2^5} + ... = \frac{1}{2}$$

$$g((0,0,2,2,...)) = \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{2}{2^5} + ... = \frac{1}{4}$$

$$g((0,2,0,0,...)) = \frac{0}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + ... = \frac{1}{4}$$

$$g((2,0,0,0,...)) = \frac{2}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + ... = \frac{1}{2}$$

$$g((2,0,2,2,...)) = \frac{2}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{2}{2^5} + ... = \frac{3}{4}$$

$$g((2,2,0,0,...)) = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + ... = \frac{3}{4}$$

$$g((2,2,2,2,...)) = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{2}{2^5} + ... = 1$$

Figura 2. Ilustración de la gráfica de la función g.

Una vez bosquejada la gráfica de la función, demostraremos en la Proposición siguiente que g es una fución continua y suprayectiva. Y por consiguiente, estaremos mostrando que el intervalo $[0,1]$, es la imagen continua del conjunto de Cantor.

PROPOSICION 3.3. *Sea*

$$g : C \longrightarrow [0,1]$$

definida por la fórmula

$$g\left((a_1, a_2, a_3, ...)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

Entonces g es continua y suprayectiva (Recordemos que estamos identificando a C con $\{0,2\}^{\infty}$).

Demostración. Aplicando g a un elemento cualquiera de C, se tiene:

$$g\left((a_1, a_2, a_3, ...)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

$$= \frac{\frac{a_1}{2}}{2} + \frac{\frac{a_2}{2}}{2^2} + \frac{\frac{a_3}{2}}{2^3} + ...$$

Como $a_n \leq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{a_n}{2} \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$g\left((a_1, a_2, a_3, ...)\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...\right) = 1$$

El criterio de comparación para series nos dice que entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

es convergente y converge a un número entre 0 y 1. Por tanto g está bien definida.

Para mostrar que g es una función suprayectiva tomemos un número cualquiera entre 0 y 1, es decir, sea $y \in [0,1]$. Consideremos su presentación binaria, es decir:

$$y = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ...$$

donde $a_i \in \{0,1\}$. Como

$$y = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ... = \frac{2a_1}{2^2} + \frac{2a_2}{2^3} + \frac{2a_3}{2^4} + ... = g\left((2a_1, 2a_2, 2a_3, ...)\right)$$

y $(2a_1, 2a_2, 2a_3, ...) \in \{0,2\}^{\infty}$, obtenemos que g es una función suprayectiva.

Demostraremos que g es una función continua. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $\delta = \varepsilon$. Dados dos elementos $(a_1, a_2, a_3, ...)$ y $(b_1, b_2, b_3, ...) \in C$ tales que $d((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| g\left((a_1, a_2, a_3, ...)\right) - g\left((b_1, b_2, b_3, ...)\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2^{n+1}} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n - b_n}{2^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} \\
&= d((a_1, a_2, a_3, ...),\ (b_1, b_2, b_3, ...)) < \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left| g\left((a_1, a_2, a_3, ...)\right) - g\left((b_1, b_2, b_3, ...)\right) \right| < \varepsilon.$$

Por tanto, g es una función continua en C.
Esto concluye la prueba de la proposición.

Ya estamos en condiciones de poder definir una función continua y suprayectiva del conjunto de Cantor al cubo de Hilbert. El espacio métrico y compacto $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$, se le llama el cubo de Hilbert.

PROPOSICION 3.4. *Existe una función continua y suprayectiva de C en $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$*

Demostración. Por la Proposición 3.2, tenemos que C es homeomorfo a $C \times C \times C \times ...$.
Sea

$$f : C \times C \times C \times ... \longrightarrow [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$$

definida por la siguiente correspondencia

$$f\,(x_1, x_2, x_3, ...) = (g(x_1),\; g(x_2),\; g(x_3), ...),$$

donde g es la función definida en la proposición anterior. Como f es una función que se mete a un producto, para ver su continuidad basta comprobar que, $\pi_n \circ f$ es continua, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, calculando

$$\pi_n \circ f(x_1, x_2, x_3, ...) = g(x_n) = g \circ \pi_n(x_1, x_2, x_3, ...)$$

donde $\pi_n : [0,1] \times [0,1] \times ... \longrightarrow [0,1]$ es la proyección n-ésima. Por la Proposición 3.3, g es continua en C. Por tanto, $\pi_n \circ f$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto f es continua.

Para demostrar que f es una función suprayectiva sea $(c_1, c_2, c_3, ...) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$. Dada $n \in \mathbb{N}$, como g es una función suprayectiva, existe una $x_n \in C$ tal que $c_n = g(x_n)$. Consideremos el punto formado por estas x_n. Es decir, tomemos $(x_1, x_2, x_3, ...) \in C \times C \times C \times ...$, aplicando f se tiene

$$f((x_1, x_2, x_3, ...)) = (g(x_1),\; g(x_2),\; g(x_3), ...) = (c_1, c_2, c_3, ...)\,.$$

Por tanto, f es una función suprayectiva.

Esto concluye la prueba de la proposición.

Como se mencionó al principio de este capítulo, mostraremos que todo espacio métrico y compacto se puede encajar como un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert.

En los teoremas que a continuación se presentan, se muestra la construcción para definir dicha función. La prueba de sus propiedades está en el Teorema 3.8.

La demostración de los siguientes dos teoremas se ve en los cursos de topología.

TEOREMA 3.5. *Todo espacio métrico compacto X, contiene un subconjunto denso y numerable.*

TEOREMA 3.6. *Todo espacio métrico compacto X, tiene diametro finito.*

TEOREMA 3.7. *Todo espacio métrico compacto X, se le puede dar una métrica d_1 tal que*

$$d_1(p,q) \leq 1 \text{ para toda } p,q \in X$$

Demostración. Por el Teorema 3.6, se tiene *diámetro* $X < \infty$. Definimos d_1 de la siguiente manera:

$$d_1(p,q) = \frac{d(p,q)}{\textit{diámetro } X} \text{ para toda } p,q \in X,$$

donde $d(p,q)$ es la métrica definida en X. Es claro, que d_1 es una métrica para X, además, $d_1(p,q) \leq 1$ y se puede ver fácilmente que d_1 y d inducen la misma topología en X.

Esto concluye la prueba del Teorema.

TEOREMA 3.8. *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces X se puede encajar en el cubo de Hilbert. Es decir, existe una función inyectiva y continua* $h : X \longrightarrow [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$

Demostración. Por el Teorema 3.7 podemos suponer que $d(p,q) \leq 1$ para cualesquiera $p,q \in X$. Por el Teorema 3.5 existe un conjunto denso y numerable $D = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ en X. Sea

$$h : X \longrightarrow [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$$

definida por la siguiente correspondencia

$$h(p) = (d(p,a_1),\, d(p,a_2),\, d(p,a_3), ...).$$

En primer lugar, mostraremos la continuidad de la función h. De acuerdo con [Willard, Teo. 8.8] , necesitamos comprobar que $\pi_n \circ h$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, calculando

$$\pi_n(h(p)) = \pi_n(d(p,a_1), d(p,a_2), d(p,a_3), ...) = d(p,a_n).$$

Si probamos que la distancia a un punto fijo $x_0 \in X$ es una función continua, habremos terminado. Sea

$$H : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$H(x) = d(x,x_0)$$

como $d(x,x_0) \leq d(x,y) + d(y,x_0)$, entonces $d(x,x_0) - d(y,x_0) \leq d(x,y)$.

Similarmente

$$d(y,x_0) - d(x,x_0) \leq d(y,x).$$

Entonces $|H(x) - H(y)| \leq d(x,y)$

De aquí se sigue que H es continua.

Por tanto, $\pi_n \circ h$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, de donde h es una función continua.

Demostraremos que h es inyectiva. Esta prueba se realizará por reducción al absurdo, esto es, supongamos que $h(p) = h(q)$ y, además que, $p \neq q$.

Como $p \neq q$, el número $c = d(p,q)$ es positivo. Ya que D es denso en X, $B_{\frac{c}{2}}(p) \cap D \neq \emptyset$. Así que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a_r \in B_{\frac{c}{2}}(p)$. Como estamos suponiendo que $h(p) = h(q)$, tenemos que

$$(d(p,a_1), d(p,a_2), d(p,a_3), ...) = (d(q,a_1), d(q,a_2), d(q,a_3), ...).$$

Entonces $d(p,a_n) = d(q,a_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

En particular $d(p,a_r) = d(q,a_r)$. Entonces

$$c = d(p,q) \leq d(p,a_r) + d(a_r,q) = 2d(p,a_r) < 2(\tfrac{c}{2}) = c$$

Así que $c < c$. Como este absurdo nace de suponer que h no es inyectiva, concluimos entonces que h es inyectiva.

Ahora, analizando la imagen directa de X, se tiene que $h(X) \subset [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times ...$ pero, además, $h(X)$ es un conjunto compacto (es la imagen continua de un compacto). Sabemos que los subconjuntos compactos de espacios métricos son cerrados entonces $h(X)$ es un cerrado.

Esto concluye la prueba del Teorema.

Resumiendo hemos conseguido encontrar una función continua y supra-yectiva de C al cubo de Hilbert. Por otra parte, hemos visto que todo espacio métrico y compacto se puede encajar en un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert. Continuando con la línea a seguir mencionada al principio de este capítulo, nos falta la construcción de una función que retraiga al conjunto de Cantor en uno de sus subconjuntos cerrados y no vacíos. Pero antes de la definición de dicha función, mostraremos una manera topológicamente equivalente de construir a C.

LEMA 3.9. *Sea*

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n} : a_n \in \{0,3\} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si

$$f : C \longrightarrow D$$

está definida por la fórmula

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2}a_n}{4^n} \text{ donde } a_n \in \{0,2\}$$

entonces f es un homeomorfismo de C en D.

Demostración. Cada serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n} \text{ con } a_n \in \{0,3\} \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

está acotada por la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1.$$

Por tanto cada serie de las que definen a D es convergente y representa a un número en el intervalo $[0,1]$.

Cada $x \in C$, por el Teorema 2.9, tiene una representación única de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ donde } a_n \in \{0,2\},$$

entonces $\frac{3}{2}a_n \in \{0,3\}$. Esto muestra que f está bien definida.

Ahora mostraremos que f es inyectiva. Sean $x, y \in C$ tales que $x \neq y$. Escribimos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \;\; y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \text{ donde } a_n, b_n \in \{0,2\}.$$

Como $x \neq y$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \neq b_m$ y m es la primer índice en donde son diferentes. Entonces ($a_m = 0$ y $b_m = 2$) o ($a_m = 2$ y $b_m = 0$).

Analizando un término cualquiera de la serie, obtenemos que se puede acotar superiormente por

$$\frac{\frac{3}{2}a_n}{4^n} \leq \frac{\frac{3}{2}2}{4^n} \leq \frac{3}{4^n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Es decir,

$$\frac{\frac{3}{2}a_n}{4^n} \leq \frac{3}{4^n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Primer caso. Si $a_m = 0$ y $b_m = 2$, se tiene

$$f(x) = \frac{\frac{3}{2}a_1}{4^1} + \frac{\frac{3}{2}a_2}{4^2} + ... + \frac{0}{4^m} + \frac{\frac{3}{2}a_{m+1}}{4^{m+1}} + \frac{\frac{3}{2}a_{m+2}}{4^{m+2}} + ...$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\frac{3}{2}a_1}{4^1}+\frac{\frac{3}{2}a_2}{4^2}+...+\frac{\frac{3}{2}a_{m-1}}{4^{m-1}}+\frac{3}{4^{m+1}}+\frac{3}{4^{m+2}}+...\\
&= \frac{\frac{3}{2}a_1}{4^1}+\frac{\frac{3}{2}a_2}{4^2}+...+\frac{\frac{3}{2}a_{m-1}}{4^{m-1}}+\frac{3}{4^{m+1}}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)\\
&= \frac{\frac{3}{2}a_1}{4^1}+\frac{\frac{3}{2}a_2}{4^2}+...+\frac{\frac{3}{2}a_{m-1}}{4^{m-1}}+\frac{3}{4^{m+1}}\left(\frac{4}{3}\right)\\
&= \frac{\frac{3}{2}a_1}{4^1}+\frac{\frac{3}{2}a_2}{4^2}+...+\frac{\frac{3}{2}a_{m-1}}{4^{m-1}}+\frac{1}{4^{m}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\frac{3}{2}b_1}{4^1}+\frac{\frac{3}{2}b_2}{4^2}+...+\frac{\frac{3}{2}b_{m-1}}{4^{m-1}}+\frac{3}{4^{m}}\\
&\leq \frac{\frac{3}{2}b_1}{4^1}+\frac{\frac{3}{2}b_2}{4^2}+...+\frac{3}{4^{m}}+\frac{\frac{3}{2}b_{m+1}}{4^{m+1}}+\frac{\frac{3}{2}b_{m+2}}{4^{m+2}}+...\\
&= f(y).
\end{aligned}
$$

Es decir, $f(x)<f(y)$. Por tanto, $f(x)\neq f(y)$. En el caso, $a_m=2$ y $b_m=0$, la demostración de que $f(x)\neq f(y)$ es similar.

Por tanto f es inyectiva.

Para mostrar que f es suprayectiva. Sea $y\in D$, esto es,

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n} \text{ con } a_n\in\{0,3\}\text{. Sea } x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2}{3}a_n}{3^n},$$

como $a_n\in\{0,3\}$, entonces $\frac{2}{3}a_n\in\{0,2\}$, así que $x\in C$.

Aplicando f al elemento x, se obtiene

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2}{3}a_n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3}{2}\frac{2}{3}a_n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=y$$

Por tanto, f es una función suprayectiva. Por consiguiente, f es una función biyectiva.

Demostraremos que la f es una función continua.

Sea $\varepsilon>0$. Como $\left(\frac{1}{4}\right)^n\to 0$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0$ cuando $n\to\infty$, existe $M\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{4^M}<\varepsilon$. Hacemos $\delta=\frac{1}{3^M}$. Tomemos x, $y\in C$ tales que $|x-y|<\delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} a_n}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} b_n}{4^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\frac{3}{2} a_n - \frac{3}{2} b_n}{4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} |a_n - b_n|}{4^n}.$$

Ya que $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} \right| = |x - y| < \frac{1}{3^M}$ por el Lema 2.8, se obtiene que

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_M = b_M.$$

Observemos que $|a_n - b_n| \leq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual, $\frac{\frac{3}{2}|a_n - b_n|}{4^n} \leq \frac{\frac{3}{2} 2}{4^n} = \frac{3}{4^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} |a_n - b_n|}{4^n} = \frac{\frac{3}{2} |a_{M+1} - b_{M+1}|}{4^{M+1}} + \frac{\frac{3}{2} |a_{M+2} - b_{M+2}|}{4^{M+2}} + ... \\ &\leq \frac{3}{4^{M+1}} + \frac{3}{4^{M+2}} + \frac{3}{4^{M+3}} + ... \\ &= \frac{3}{4^{M+1}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... \right) \\ &= \frac{3}{4^{M+1}} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{1}{4^M} < \varepsilon \end{aligned}$$

Hemos obtenido, entonces que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} a_n}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2} b_n}{4^n} \right| < \varepsilon$$

Por tanto, f es una función continua.

Resumiendo, hemos obtenido una función continua e inyectiva de un espacio métrico compacto C sobre el espacio métrico D, por [Rudin, Teo. 4.17] se obtiene que f es un homeomorfismo de C en D.

Esto concluye la prueba del lema

LEMA 3.10. *No existen $a, b, c \in D$, tales que $a < b < c$ y $c - b = b - a$.*

Demostración. Esta prueba se realizará por reducción al absurdo. Sean $a, b, c \in D$. Entonces

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{4^n}, \; b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{4^n} \text{ y } c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{4^n} \text{ donde } d_n, e_n, f_n \in \{0, 3\},$$

supongamos que $a < b < c$ y $c - b = b - a$.

Como $a < c$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d_m \neq f_m$ y además es la primera m en donde son diferentes. Sabemos que, $d_m \neq f_m$ entonces $d_m < f_m$ o $d_m > f_m$. Probaremos que el caso $f_m < d_m$ no es posible.

Si $f_m < d_m$, entonces $f_m = 0$ y $d_m = 3$. Calculando

$$\begin{aligned}
c &= \frac{f_1}{4^1} + \frac{f_2}{4^2} + ... + \frac{0}{4^m} + \frac{f_{m+1}}{4^{m+1}} + \frac{f_{m+2}}{4^{m+2}} + ... \\
&\leq \frac{f_1}{4^1} + \frac{f_2}{4^2} + ... + \frac{f_{m-1}}{4^{m-1}} + \frac{3}{4^{m+1}} + \frac{3}{4^{m+2}} + ... \\
&= \frac{f_1}{4^1} + \frac{f_2}{4^2} + ... + \frac{f_{m-1}}{4^{m-1}} + \frac{3}{4^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\right) \\
&= \frac{f_1}{4^1} + \frac{f_2}{4^2} + ... + \frac{f_{m-1}}{4^{m-1}} + \frac{3}{4^{m+1}} \left(\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{f_1}{4^1} + \frac{f_2}{4^2} + ... + \frac{f_{m-1}}{4^{m-1}} + \frac{1}{4^m} \\
&< \frac{d_1}{4^1} + \frac{d_2}{4^2} + ... + \frac{d_{m-1}}{4^{m-1}} + \frac{3}{4^m} \\
&\leq \frac{d_1}{4^1} + \frac{d_2}{4^2} + ... + \frac{d_{m-1}}{4^{m-1}} + \frac{3}{4^m} + \frac{d_{m+1}}{4^{m+1}} + \frac{d_{m+2}}{4^{m+2}} + ... = a.
\end{aligned}$$

Es decir, $c < a$ lo cual es un absurdo. Por tanto, $d_m < f_m$. Por tanto $d_m = 0$ y $f_m = 3$.

Hemos probado que si $a < c$ con

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{4^n} \text{ y } c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{4^n}$$

y si m es el primer natural donde $d_m \neq f_m$, entonces $d_m = 0$ y $f_m = 3$.

Ahora mostraremos que $d_1 = e_1 = f_1, ..., d_{m-1} = e_{m-1} = f_{m-1}$. Supongamos que esto no ocurre. Sea r el primer natural tal que $d_r \neq e_r$, entonces $r \leq m-1$. Por lo que vimos antes $d_r = 0$ y $e_r = 3$. Como $f_r = d_r$ y $d_r \neq e_r$ entonces el primer natural s para el cual $e_s \neq f_s$ debe cumplir $s \leq r$. Además por lo que vimos antes $e_s = 0$ y $f_s = 3$. Ya que $e_r = 3$ y $e_s = 0$, tenemos que $s < r$. Pero entonces la miminalidad de r implica que $d_s = e_s < f_s$. Esto es absurdo pues $s < r \leq m-1$ y m era el primer natural donde $d_m \neq f_m$. Con esta contradicción hemos probado que $d_1 = e_1 = f_1, ..., d_{m-1} = e_{m-1} = f_{m-1}$.

Para completar la prueba del lema, obtenemos dos contradicciones analizando los casos $e_m = 0$ y $e_m = 3$.
Recordemos que $d_m = 0$ y $f_m = 3$.

Si $e_m = 0$. Calculando

$$\begin{aligned} b - a &= \frac{e_1 - d_1}{4^1} + \frac{e_2 - d_2}{4^2} + ... + \frac{0-0}{4^m} + \frac{e_{m+1} - d_{m+1}}{4^{m+1}} + \ ... \\ &= \frac{e_{m+1} - d_{m+1}}{4^{m+1}} + \frac{e_{m+2} - d_{m+2}}{4^{m+2}} + \frac{e_{m+3} - d_{m+3}}{4^{m+3}} + ... \\ &\leq \frac{3}{4^{m+1}} + \frac{3}{4^{m+2}} + \frac{3}{4^{m+3}} + ... \\ &= \frac{3}{4^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\right) = \frac{3}{4^{m+1}} \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4^m} \end{aligned}$$

Por otra parte, analizando el caso extremo en que $\frac{f_{m+i} - e_{m+i}}{4^{m+i}} = -\frac{3}{4^{m+i}}$ para toda $i = 1, 2, ...$. Se tiene

$$\begin{aligned} c - b &= \frac{f_1 - e_1}{4^1} + \frac{f_2 - e_2}{4^2} + ... + \frac{3-0}{4^m} + \frac{f_{m+1} - e_{m+1}}{4^{m+1}} + ... \\ &= \frac{3}{4^m} - \frac{3}{4^{m+1}} - \frac{3}{4^{m+2}} - \frac{3}{4^{m+3}} - ... \\ &= \frac{3}{4^m} - \frac{3}{4^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\right) = \frac{3}{4^m} - \frac{3}{4^{m+1}} \left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{3}{4^m} - \frac{1}{4^m} = \frac{2}{4^m} \end{aligned}$$

Es decir, $b-a < c-b$, lo cual es un absurdo. Ya que, por hipótesis $b-a = c-b$.

Si $e_m = 3$. Calculando

$$\begin{aligned}
c-b &= \frac{f_1-e_1}{4^1}+\frac{f_2-e_2}{4^2}+...+\frac{3-3}{4^m}+\frac{f_{m+1}-e_{m+1}}{4^{m+1}}+\ ...\\
&= \frac{f_{m+1}-e_{m+1}}{4^{m+1}}+\frac{f_{m+2}-e_{m+2}}{4^{m+2}}+\frac{f_{m+3}-e_{m+3}}{4^{m+3}}+...\\
&\leq \frac{3}{4^{m+1}}+\frac{3}{4^{m+2}}+\frac{3}{4^{m+3}}+...\\
&= \frac{3}{4^{m+1}}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)=\frac{3}{4^{m+1}}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{4^m}
\end{aligned}$$

Por otra parte, analizando el caso extremo en que $\frac{e_{m+i}-d_{m+i}}{4^{m+i}} = -\frac{3}{4^{m+i}}$ para toda $i = 1, 2, ...$. Se tiene

$$\begin{aligned}
b-a &= \frac{e_1-d_1}{4^1}+\frac{e_2-d_2}{4^2}+...+\frac{3-0}{4^m}+\frac{e_{m+1}-d_{m+1}}{4^{m+1}}+...\\
&= \frac{3}{4^m}-\frac{3}{4^{m+1}}-\frac{3}{4^{m+2}}-\frac{3}{4^{m+3}}-...\\
&= \frac{3}{4^m}-\frac{3}{4^{m+1}}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)=\frac{3}{4^m}-\frac{3}{4^{m+1}}\left(\frac{4}{3}\right)\\
&= \frac{3}{4^m}-\frac{1}{4^m}=\frac{2}{4^m}
\end{aligned}$$

Es decir, $c - b < b - a$ lo cual es un absurdo. Ya que, $b - a = c - b$.

Por tanto, hemos demostrado que no existen $a, b, c \in D$ tales que $a < b < c$ y $b - a = c - b$.

Esto concluye la prueba del lema.

En el teorema siguiente identificaremos al conjunto de Cantor con el espacio D. Esto es posible debido al Lema 3.9. Entonces cuando nos refiramos a un elemento de C, lo escribiremos como una serie de ceros y treses divididos entre potencias de cuatro.

TEOREMA 3.11. *Si $A \subset D$, A es un conjunto cerrado y no vacío entonces existe una función continua $k : D \longrightarrow A$ tal que $k(a) = a$ para toda $a \in A$.*

Demostración. Sea

$$k : D \longrightarrow A$$

definida por la siguiente correspondencia

$$k(x) = a_x$$

donde $|x - a_x| = mín\{|x - a| : a \in A\}$.

Es decir $k(x)$ es el punto más cercano a x. En la prueba del Teorema 3.8 vimos que la función que consiste de tomar la distancia a un punto fijo es continua. Pensando al punto fijo como x, la función distancia a x es continua. Ya que A es un cerrado dentro de un compacto, entonces esta función alcanza un mínimo en A. Esto nos dice que efectivamente existe una tal a_x. Ahora que podríamos tener el problema de que a_x no fuera única. Vamos a ver que esto no ocurre. De hecho esta unicidad es la razón de que trabajemos con D en lugar de C. Supongamos entonces que existen a_x y b_x en A tales que $|x - a_x| = |x - b_x| = mín\{|x - a| : a \in A\}$.
Podemos suponer que $a_x < b_x$.

Si $x \leq a_x < b_x$, entonces $|x - a_x| < |x - b_x|$ lo cual es absurdo. Por una razón similar no puede ocurrir que $x \geq b_x$. Entonces $a_x < x < b_x$ y $|x - a_x| = |x - b_x|$. Esto también es absurdo por el Lema 3.10. Con esta contradicción probamos que a_x es única y entonces k está bien definida.

Si $x \in A$ entonces x es el punto de A más cercano a x. Por tanto $k(x) = x$. Demostraremos que k es una función continua.

Sean $x \in D$ y $\varepsilon > 0$. Analizaremos primero el caso en que $x \notin A$. Supongamos por ejemplo que $x < a_x$. El caso $a_x < x$ es similar.

Sea $\rho = a_x - x$. Hacemos $z = x - \rho$. Entonces $z < x < a_x$ y $|a_x - x| = |x - z|$. Por el Lema 3.10, no es posible que z, x y $a_x \in D$. Y como $x, a_x \in D$, obtenemos que $z \notin D$. Ya que D es cerrado en $\mathbb{R}$ existe $r > 0$ tal que $(z - r, z + r) \cap D = \emptyset$ y $r < \rho$.

Vamos a mostrar que $k(y) = a_x$ para toda $y \in \left(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right) \cap D$ (Nótese que, como $y \in \left(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right)$ y $r < \rho$ entonces $z = x - \rho < x - \frac{r}{2} < y < x + \frac{r}{2} < r + \rho = a_x$). Sea $y \in \left(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right) \cap D$.

Para hacer esto, únicamente tenemos que ver que $|y - a_x| \leq |y - a|$ para toda $a \in A$.

Tomemos pues una $a \in A$. Por la definición de ρ y a_x tenemos que $\rho = |x - a_x| \leq |x - a|$. Entonces $a \leq x - \rho$ o $x + \rho \leq a$. Es decir $a \leq z$ o $a_x \leq a$.

Caso 1. $a \leq z$.

Como $(z-r,z+r)\cap D=\emptyset$ y $a\in D$, entonces $a\leq z-r$ o $z+r\leq a$. La segunda desigualdad no es posible pues $a\leq z$. De manera que $a\leq z-r$.

Entonces

$$a\leq z-r<z<x-\tfrac{r}{2}<y.$$

Así que $|y-a|=y-a>x-\frac{r}{2}-(z-r)=(x-z)+\frac{r}{2}=\rho+\frac{r}{2}=a_x-x+\frac{r}{2}$

$=a_x-(x-\frac{r}{2})>a_x-y=|a_x-y|$ (la última igualdad se cumple porque $y<x+\frac{r}{2}<x+\rho=a_x$).

Por tanto $|y-a_x|\leq|y-a|$.

Caso 2. $a_x\leq a$.

En este caso $|y-a_x|=a_x-y\leq a-y=|y-a|$.

Esto concluye la prueba de que $|y-a_x|\leq|y-a|$ para toda $a\in A$.

Entonces $k(y)=a_x$ para toda $y\in\left(x-\frac{r}{2},x+\frac{r}{2}\right)\cap D$.

Haciendo $\delta=\frac{r}{2}$, tenemos que para toda $y\in B_{\frac{r}{2}}(x)\cap D$, $|k(y)-k(x)|=|a_x-a_x|=0<\varepsilon$.

Por tanto k es continua en x, para toda $x\in D-A$.

Ahora analicemos el caso en que $x\in A$. En este caso hacemos $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Si $y\in B_\delta(x)\cap D$ entonces por definición y como $x\in A$, se tiene que $|y-k(y)|=|y-a_y|\leq|y-x|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

De manera que $|k(x)-k(y)|=|x-k(y)|\leq|x-y|+|y-k(y)|<\varepsilon$.

Esto termina la prueba de que k es continua en los puntos de A.

Por tanto k es continua.

Ya estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 3.12. *Sea X un espacio métrico, compacto y no vacío entonces existe una función continua y suprayectiva. $\phi:C\longrightarrow X$*

Demostración. Sea X un espacio métrico y compacto. Por el Teorema 3.8, existe una función continua e inyectiva

$$h:X\longrightarrow[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times...$$

Por otra parte, por la Proposición 3.4, existe una función continua y suprayectiva

$$f:C\longrightarrow[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times...$$

Sea $B = f^{-1}(h(X))$. Claramente B es un subconjunto cerrado y no vacío de C.

De acuerdo con el Teorema 3.11 existe una función continua $k : C \longrightarrow B$ tal que $k(b) = b$ para toda $b \in B$.
Observemos que h es un homeomorfismo de X en $h\,(X)$.
Definimos

$$\phi = h^{-1} \circ f \circ k : C \longrightarrow X.$$

ϕ es una función continua ya que es la composición de funciones continuas.

Dada $p \in C$, $k(p) \in B = f^{-1}(h(X))$. Así que $f(k(p)) \in h(X)$. Por lo que tiene sentido aplicar $h^{-1}(f(k(p)))$. Esto nos dice que ϕ está bien definida.

Para mostrar que ϕ es suprayectiva tomamos un elemento arbitrario $x \in X$. Sea $q = h(x) \in h(X)$.

Como f es suprayectiva existe $c \in C$ tal que $f(c) = q = h(x)$. Entonces $c \in f^{-1}(h(X)) = B$.
Así que $k(c) = c$.
Entonces

$$\phi\,(c) = h^{-1}\,(f\,(k\,(c))) = h^{-1}\,(f\,(c)) = h^{-1}(q) = x.$$

Por tanto, ϕ es una función suprayectiva.

Esto concluye la prueba del teorema.

Como vimos en el capítulo 2, el conjunto de Cantor es un espacio métrico, compacto, perfecto, no vacío y totalmente disconexo. Ahora veremos que si otro espacio X tiene las propiedades anteriores tiene que ser forzosamente homeomorfo a C. Por lo que, estas propiedades caracterizan al conjunto de Cantor.

Para lograr la definición de un homeomorfismo de X en C, es necesaria la construcción que se muestra en los lemas siguientes.

LEMA 3.13. *Sea X un espacio métrico, compacto, no vacío, totalmente disconexo y sin puntos aislados entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ y existen conjuntos abiertos y cerrados $A_1, A_2, ..., A_N$ en X tales que $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N$, $A_i \neq \emptyset$, para cada $i = 1, 2, ..., N$, $A_1, A_2, ..., A_N$ son ajenos entre sí y diámetro $A_i < \varepsilon$ para cada $i = 1, 2, ..., N$.*

Demostración. Para probar este lema necesitamos hacer uso del teorema que dice que para los espacios métricos compactos la propiedad de ser totalmente disconexo es equivalente a la propiedad de tener una base de abiertos y cerrados.

La prueba de este resultado se puede encontrar en [Chandler, Lema 6.31] .

Entonces podemos suponer que X tiene una base β de conjuntos abiertos y cerrados.

Sea $\varepsilon > 0$.

Primero vamos a ver que la familia

$$\mathcal{U} = \{B \in \beta : diámetro(B) < \varepsilon\}$$

es una cubierta (abierta, por supuesto) de X.

En efecto, sea $x \in X$. Ya que $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$ es un abierto en X y β es una base para X, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$. Entonces

$$diámetro\ B \leq diámetro\ B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) < \varepsilon.$$

Así que $B \in \mathcal{U}$.

Por tanto $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X.

Ya que X es un conjunto compacto entonces existen $N \in \mathbb{N}$ y $B_1, ..., B_N \in \mathcal{U}$ tales que

(i) $B_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, 3, ..., N$.

(ii) $X = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_N$

(iii) Ningún B_i sobra. Es decir ningún B_i está contenido en la unión de los demás (si hubiera de estos simplemente los vamos quitando hasta que ya no haya).

Como cada $B_i \in \mathcal{U}$, tenemos que $diámetro(B_i) < \varepsilon$.

Definamos los siguientes conjuntos:

$$A_1 = B_1, A_2 = B_2 - B_1, A_3 = B_3 - (B_1 \cup B_2), ..., A_N = B_N - \bigcup_{j=1}^{N-1} B_j.$$

Por la condición (iii) cada $A_i \neq \emptyset$.

$$\text{Ya que } A_i = B_i - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\right) = B_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\right)^c = B_i \cap \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} B_j^c\right),$$

tenemos que A_i es una intersección finita de abiertos y también de cerrados (cada B_j es abierto y cerrado).
De manera que A_i es abierto y cerrado.

Para ver que si $k < i$, entonces $A_k \cap A_i = \emptyset$, observemos que

$$A_k \subset B_k \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j, \text{ de modo que } A_k \cap A_i \subset \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\right) \cap \left(B_i - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\right)\right) = \emptyset.$$

Por tanto $A_1, A_2, ..., A_N$ son ajenos entre sí.

Ahora veremos que $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N$.

Sea $x \in X$. Como $X = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_N$, existe una i mínima tal que $x \in B_i$. Entonces

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j.$$

De manera que $x \in A_i$. Por tanto $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N$.

Finalmente, como $A_i \subset B_i$ y $diámetro(B_i) < \varepsilon$, tenemos que $diámetro(A_i) < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, 2, ..., N\}$.

Esto concluye la prueba del lema.

Hemos visto en el lema anterior que, si X es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y no tiene puntos aislados entonces se puede encontrar una partición finita de conjuntos abiertos y cerrados en X, ajenos dos a dos y no vacíos. Pero cada subconjunto de esta partición al ser un conjunto abierto y cerrado hereda todas las propiedades del espacio X, como se muestra en el siguiente lema.

LEMA 3.14. *Sea X un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Sea $A \subset X$, un subconjunto abierto, cerrado y no vacío, entonces A es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados.*

Demostración. Cualquier subconjunto no vacío de un espacio métrico es un espacio métrico. Además, es claro que los subconjuntos de espacios totalmente disconexos son totalmente disconexos, por lo cual, A es totalmente disconexo.

Como A es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto entonces A es un compacto.

Para ver que A no tiene puntos aislados, sea $\varepsilon > 0$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$ y $r < \varepsilon$.

Ya que X no tiene puntos aislados, existe $y \in X$ tal que $y \neq x$ y $y \in B_r(x)$. Entonces $y \in A \cap B_r(x)$ y $y \neq x$. Por tanto A no tiene puntos aislados.

Esto concluye la prueba del lema.

Si X es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados, por el Lema 3.13, dado un $\varepsilon > 0$, podemos encontrar una partición finita de subconjuntos abiertos y cerrados, no vacíos y con otras propiedades más. Por el Lema 3.14, obtenemos que cada subconjunto abierto y ce-rrado, no vacío de dicha partición hereda las propiedades del espacio original. Ahora, probaremos que esta partición se puede refinar tanto como queramos.

LEMA 3.15. *Sea X un espacio métrico, no vacío, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces existen $A_1, A_2, ..., A_n$ abiertos y cerrados en X tales que*

(i) $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

(ii) $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, ..., n$.

(iii) $A_1, A_2, ..., A_n$ *son ajenos entre sí.*

(iv) diámetro $A_i < \varepsilon$ *para cada* $i = 1, 2, ..., n$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 3.13, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_1, A_2, ..., A_N$ son abiertos y cerrados en X y además

(i) $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N$.

(ii) $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, ..., N$.

(iii) $A_1, A_2, ..., A_N$ son ajenos entre sí.

(iv) diámetro $A_i < \varepsilon$ para cada $i = 1, 2, ..., N$.

Consideremos al abierto y cerrado A_N. Como $A_N \neq \emptyset$, existe $a \in A_N$, por el Lema 3.14, A_N es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Al ser A_N un conjunto abierto entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A_N$. Además, A_N no tiene puntos aislados, por lo que, existe $y \neq a, y \in A_N$ tal que $y \in B_r(a)$. Por consiguiente, A_N tiene al menos dos elementos. Ahora, A_N es totalmente disconexo. En particular, A_N no es conexo, por lo cual, existe una disconexión para A_N. Sean H y K abiertos tales que $H \cup K = A_N$, $H \cap K = \emptyset$, $H \neq \emptyset$ y $K \neq \emptyset$.

Definamos

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2, ..., B_{N-1} = A_{N-1}, B_N = H \text{ y } B_{N+1} = K.$$

Como $X - H = X \cup K - A_N$. Pero el conjunto de la derecha es abierto (ya que es la diferencia de un abierto con un conjunto cerrado). Por tanto H es cerrado. De igual manera, $X - K = X \cup H - A_N$, se deduce que K es un conjunto cerrado. Así, H y K son conjuntos abiertos y cerrados.

Demostraremos que $X = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_N \cup B_{N+1}$. Calculando
$X = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{N-1} \cup B_N \cup B_{N+1} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1} \cup H \cup K =$
$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1} \cup A_N$.

Ahora $B_i \cap A_N = \emptyset$ para $i < N$. Calculando
$B_i \cap (H \cup K) = (B_i \cap H) \cup (B_i \cap K) = \emptyset$ entonces $B_i \cap H = B_i \cap K = \emptyset$ para $i < N$.
Por tanto, $B_1, B_2, ..., B_{N-1}, B_N$ y B_{N+1} son ajenos entre sí.

Además, $B_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, ..., N, N+1$.

Calculando
diámetro B_i = *diámetro* $A_i < \varepsilon$ para $i = 1, 2, ..., N-1$. Como $H \subset A_N$ entonces *diámetro*$(H) \leq$ *diámetro* $A_N < \varepsilon$. Similarmente *diámetro* $(K) < \varepsilon$. Por tanto *diámetro* $(B_i) < \varepsilon$ para $i = 1, 2, ..., N, N+1$.

Hasta ahora hemos probado que X se puede partir en $N+1$ partes.

Procediendo en forma similar se muestra que X se puede partir en $N+2$ partes, en $N+3$ partes, etc.

De manera que X se puede partir en n partes para toda $n \geq N$.

Esto concluye la prueba del lema.

Resumiendo para cualquier espacio métrico, no vacío, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados y dada una $\varepsilon > 0$, podemos partir nuestro espacio en tantos subconjuntos abiertos y cerrados ajenos dos a dos como lo necesitemos. Además, estos subconjuntos heredan las propiedades del espacio original y su diámetro es menor que la ε dada.

DEFINICION 3.16. Una (n, ε) − *partición* de un espacio X es una familia $\mathcal{P} = \{A_0, A_2, ..., A_{n-1}\}$ que satisface lo siguiente:

(i) Cada A_i es un abierto, cerrado y no vacío para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

(ii) *diámetro* $A_i < \varepsilon$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.
(iii) $X = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_{n-1}$
(iv) $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ son ajenos entre sí.

Como hemos estado anunciando vamos a mostrar que si X es un espacio métrico, compacto, no vacío, totalmente disconexo y sin puntos aislados, entonces X es homeomorfo a C. La demostración de este hecho se basa en hacer particiones adecuadas de X.

Empezaremos partiendo X por un número de la forma 2^{n_1} de conjuntos abiertos, cerrados, no vacíos y de diámetro menor que 1. Como segundo paso, partiremos cada uno de los miembros de la primera partición por un número de la forma 2^{n_2} (todos los conjuntos partidos por el mismo número de pedazos) de conjuntos abiertos, cerrados, no vacíos y de diámetro menor que $\frac{1}{2}$. Y seguiremos partiendo y partiendo.

Como se ve necesitamos introducir una notación apropiada.

Para cada sucesión finita $n_1, n_2, ..., n_m \in \mathbb{N}$ hacemos $J(n_1, n_2, ..., n_m) = \{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times ... \times \{0,1\}^{n_m}$. Observemos que cada $\{0,1\}^{n_i}$ tiene 2^{n_i} elementos, de donde $J(n_1, n_2, ..., n_m)$ tiene $2^{n_1} \cdot 2^{n_2} \cdot ... \cdot 2^{n_m} = 2^{n_1+n_2+...+n_m}$ elementos.

LEMA 3.17. *Sea X un espacio métrico compacto (no vacío), totalmente disconexo y sin puntos aislados, entonces existe una sucesión de números naturales $\{n_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de particiones $\{\mathcal{P}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de X tales que*

(a) Cada $\mathcal{P}_m$ es de la forma $\mathcal{P}_m = \{A_\alpha : \alpha \in J(n_1, ..., n_m)\}$

(b) Los elementos de $\mathcal{P}_m$ son abiertos, cerrados, no vacíos y de diámetro menor que $\frac{1}{m}$.

(c) Para cada $\alpha \in J(n_1, n_2, ..., n_{m-1})$, el conjunto $\left\{A_{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{P}_m : \beta \in \{0,1\}^{n_m}\right\}$ es una partición de A_α, el cual es un elemento de $\mathcal{P}_{m-1}$.

Demostración. Haremos una construcción inductiva.

(1) Para $n = 1$.

Apliquemos el Lema 3.15 a $\varepsilon = 1$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$ hay una $(n, 1)-$*partición* de X. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_1} \geq N_1$. Entonces existe una $(2^{n_1}, 1)-$*partición* de X, la cual denotaremos por $\mathcal{P}_1 = \{A_a : \alpha \in J(n_1)\}$ (como $\mathcal{P}_1$ y $J(n_1)$ tienen 2^{n_1} elementos, podemos numerar a $\mathcal{P}_1$ con los índices en $J(n_1)$).

(2) Supongamos que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ..., \mathcal{P}_m$ ya han sido construidos.

Dada $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m) \in J(n_1, n_2, ..., n_m)$. Por el Lema 3.14, A_α es un espacio métrico, compacto, no vacío, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Apliquemos el Lema 3.15 a $\varepsilon = \frac{1}{m+1}$ y al espacio A_α, entonces existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_\alpha$, A_α tiene una $(n, \frac{1}{m+1})$ *– partición*.

Ya que $J(n_1, n_2, ..., n_m)$ es finito, podemos tomar $n_{m+1} \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_{m+1}} \geq N_\alpha$ para toda $\alpha \in J(n_1, ..., n_m)$. Entonces, para cada $\alpha \in J(n_1, ..., n_m)$, existe una $(2^{n_{m+1}}, \frac{1}{m+1})$ *– partición* $\mathcal{Q}_\alpha$ de A_α.

Como $\mathcal{Q}_\alpha$ tiene $2^{n_{m+1}}$ elementos, al igual que $\{0,1\}^{n_{m+1}}$, podemos denotar a sus elementos en la forma $A_{(\alpha,\beta)}$ donde $\beta \in \{0,1\}^{n_{m+1}}$. Notemos que a (α, β) lo podemos interpretar como a un elemento de $J(n_1, ..., n_{m+1})$.

Finalmente definimos $\mathcal{P}_{m+1} = \bigcup \{\mathcal{Q}_\alpha : \alpha \in J(n_1, ..., n_m)\}$.

Claramente los elementos de $\mathcal{P}_{m+1}$ son abiertos y cerrados de X, son no vacíos y tienen diámetro menor que $\frac{1}{m+1}$. Para cada $\alpha \in J(n_1, ..., n_m)$ el conjunto $\left\{A_{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{P}_{m+1} : \beta \in \{0,1\}^{n_{m+1}}\right\}$ es $\mathcal{Q}_\alpha$ y entonces es una partición de $A_\alpha \in \mathcal{P}_m$.

Sólo nos resta probar que $\mathcal{P}_{m+1}$ es una partición de X.

Dada $x \in X$, como $\mathcal{P}_m$ es partición de X, existe $\alpha \in J(n_1, ..., n_m)$ tal que $x \in A_\alpha$. Y como $\mathcal{Q}_\alpha$ es partición de A_α, existe $\beta \in \{0,1\}^{n_{m+1}}$ tal que $x \in A_{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{P}_{m+1}$. Esto prueba que $X = \bigcup \left\{A_{(\alpha,\beta)} : A_{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{P}_{m+1}\right\}$.

Ahora tenemos $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$ con $\alpha, \gamma \in J(n_1, ..., n_m)$ y $\beta, \delta \in \{0,1\}^{n_{m+1}}$. Si $\alpha \neq \gamma$, como $A_{(\alpha,\beta)} \subset A_\alpha$, $A_{(\gamma,\delta)} \subset A_\gamma$ y $A_\alpha \cap A_\gamma = \emptyset$, tenemos que $A_{(\alpha,\beta)} \cap A_{(\gamma,\delta)} = \emptyset$. Y si $\alpha = \gamma$, entonces $\beta \neq \delta$. Ya que $\mathcal{Q}_\alpha$ es una partición de A_α, tenemos que $A_{(\alpha,\beta)} \cap A_{(\alpha,\delta)} = \emptyset$.

Esto termina la prueba de que los elementos de $\mathcal{P}_{m+1}$ son ajenos entre sí.

Por tanto $\mathcal{P}_{m+1}$ es una partición de X.

Esto concluye la construcción y la prueba del lema.

LEMA 3.18. *Para cada sucesión $n_1, n_2, ...$ en $\mathbb{N}$, el espacio métrico $\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$ es homeomorfo al espacio métrico $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$*

Demostración. Sea $Z = \{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$

$$g : Z \longrightarrow \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$$

definida por la siguiente correspondencia

$g((a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)}),(a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)}),\ (a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)}),...) =$
$(a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)},a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)},a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)},...)$
donde $a_i^{(n)} \in \{0,1\}$ para toda $i, n \in \mathbb{N}$.

Demostraremos que g es una función inyectiva. Sean
$g((a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)}),(a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)}),(a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)}),...) =$
$(a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)},a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)},a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)},...)$
y
$g((b_1^{(1)},...,b_{n_1}^{(1)}),(b_1^{(2)},...,b_{n_2}^{(2)}),(b_1^{(3)},...,b_{n_3}^{(3)}),...) =$
$(b_1^{(1)},...,b_{n_1}^{(1)},b_1^{(2)},...,b_{n_2}^{(2)},b_1^{(3)},...,b_{n_3}^{(3)},...)$.
Supongamos que
$g((a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)}),(a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)}),(a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)}),...) =$
$g((b_1^{(1)},...,b_{n_1}^{(1)}),(b_1^{(2)},...,b_{n_2}^{(2)}),(b_1^{(3)},...,b_{n_3}^{(3)}),...)$
Esto es equivalente a que
$(a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)},a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)},a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)},...) = (b_1^{(1)},...,b_{n_1}^{(1)},b_1^{(2)},...,b_{n_2}^{(2)},b_1^{(3)},...,b_{n_3}^{(3)},...)$

Entonces $a_1^{(m)} = b_1^{(m)},...,a_{n_i}^{(m)} = b_{n_i}^{(m)}$ para toda i y $m \in \mathbb{N}$. Esto es, por la definición de igualdad en el producto. Así,
$(a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)}) = (b_1^{(1)},...,b_{n_1}^{(1)}),(a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)}) = (b_1^{(2)},...,b_{n_2}^{(2)}),(a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)}),...$
.

Por tanto g es una función inyectiva.

Para mostrar que g es una función suprayectiva tomemos un punto arbitrario $(a_1, a_2, a_3, ...) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$.

Entonces
$((a_1,...,a_{n_1}),(a_{n_1+1},...,a_{n_1+n_2}),(a_{n_1+n_2+1},...,a_{n_1+n_2+n_3}),...) \in$
$\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$.
Aplicando g:
$g((a_1,...,a_{n_1}),(a_{n_1+1},...,a_{n_1+n_2}),(a_{n_1+n_2+1},...,a_{n_1+n_2+n_3}),...) = (a_1, a_2, a_3, ...)$.

Por lo que, g es una función suprayectiva.

Vamos a probar que g es continua. Bastará con que probemos que $\pi_n \circ g : Z \longrightarrow \{0,1\}$ es continua, donde $\pi_n : \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ... \longrightarrow \{0,1\}$ es la proyección natural. Tomemos pues $n \in \mathbb{N}$. Ya que $n_1 < n_1 + n_2 < n_1 + n_2 + n_3 < ...$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 + n_2 + ... + n_m < n \leq n_1 + n_2 + ... + n_{m+1}$.

Sea $a = ((a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)}),(a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)}),(a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)}),...)$. Observemos que
$\pi_n \circ g(a) = \pi_n((a_1^{(1)},...,a_{n_1}^{(1)},a_1^{(2)},...,a_{n_2}^{(2)},a_1^{(3)},...,a_{n_3}^{(3)},...)) = a_{n-(n_1+n_2+...+n_m)}^{(m+1)}$.

De manera que para obtener la función $\pi_n \circ g$ podemos primero tomar la proyección $(m+1)-\acute{e}sima$ del punto a y obtener al punto $(a_1^{(m+1)}, ..., a_{n_{(m+1)}}^{(m+1)}) \in \{0,1\}^{n_{m+1}}$ y después tomarle la proyección $n - (n_1 + n_2 + ... + n_m)$ a este punto.

Por tanto $\pi_n \circ g$ es la composición de dos proyecciones y, en consecuencia esta función es continua.

Por tanto g es una función continua.

Hemos obtenido una función continua e inyectiva del espacio métrico compacto $\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$ en el espacio métrico $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$. Por [Rudin, Teo. 4.17] , g es un homeomorfismo.

Esto concluye la prueba del lema.

LEMA 3.19. *El espacio métrico* $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$ *es homeomorfo al espacio métrico* $\{0,2\}^{\infty}$.

Demostración. Sea

$$h : \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ... \longrightarrow \{0,2\}^{\infty}$$

definida por la siguiente correspondencia

$$h(a_1, a_2, a_3, ...) = (2a_1, 2a_2, 2a_3, ...)$$

donde $a_i \in \{0,1\}$.

Es muy fácil ver que h es una biyección continua del espacio métrico y compacto $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$ al espacio métrico $\{0,2\}^{\infty}$. Por [Rudin, Teo. 4.17] , h es un homeomorfismo.

Esto concluye la prueba del lema.

LEMA 3.20. *El espacio métrico* $\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$ *es homeomorfo a* C.

Demostración. Por el Lema 3.18, el espacio $\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$ es homeomorfo al espacio $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$.

Por el Lema 3.19, el espacio $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$ es homeomorfo a $\{0,2\}^{\infty}$.

Por el Teorema 2.9, el espacio $\{0,2\}^{\infty}$ es homeomorfo a C.

Como sabemos que el homeomorfismo es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos, en particular es transitiva.

Por tanto el espacio métrico $\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$ es homeomorfo a C.

Esto concluye la prueba del lema.

Estamos listos para demostrar el último resultado de este trabajo.

TEOREMA 3.21. *Sea X un espacio métrico, no vacío, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados, entonces es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Por el Lema 3.17, existe una sucesión de numeros naturales $\{n_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de particiones $\{\mathcal{P}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de X tales que

(a) Cada $\mathcal{P}_m$ es de la forma $\mathcal{P}_m = \{A_\alpha : \alpha \in J(n_1, ..., n_m)\}$

(b) Los elementos de $\mathcal{P}_m$ son abiertos, cerrados, no vacíos y de diámetro menor que $\frac{1}{m}$.

(c) Para cada $\alpha \in J(n_1, ..., n_{m-1})$, el conjunto $\left\{A_{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{P}_m : \beta \in \{0,1\}^{n_m}\right\}$ es una partición de A_α, el cual es un elemento de $\mathcal{P}_{m-1}$.

Tomemos un punto $x \in X$. Dada $m \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{P}_m$ es una partición de X, existe un único elemento $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in J(n_1, ..., n_m)$ tal que $x \in A_\alpha$.

Si tomamos $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{m+1}) \in J(n_1, ..., n_{m+1})$ tal que $x \in A_\beta$, por (c), β es de la forma $\beta = (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_{m+1})$. Por tanto α y β coinciden en los primeros m terminos.

Sea

$$f : X \longrightarrow \{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$$

definida por la siguiente correspondencia

$$f(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$$

donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $x \in A_{(\alpha_1,...,\alpha_m)}$.

Por la observación que hicimos hace dos párrafos, α_1 no depende de cual $m \in \mathbb{N}$ se tome, α_2 no depende de cual $m \geq 2$ se tome, α_3 no depende de cual $m \geq 3$ se tome, etc. Por tanto f es una función bien definida.

Demostraremos que f es una función inyectiva. Sean

$$f(p) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) \text{ y } f(q) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...).$$

Supongamos que $f(p) = f(q)$. Esto es equivalente a que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...)$$

Entonces $\alpha_m = \beta_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $p, q \in A_{\alpha_m}$ con $\alpha_m \in J(n_1, ..., n_m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Es decir $d(p,q) < diámetro(A_{\alpha_m}) < \frac{1}{m}$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, $d(p,q) = 0$. Esto es equivalente a $p = q$. Así, f es inyectiva.

Para mostrar que f es una función suprayectiva tomemos un punto arbitrario $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...) \in \{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$. Por la parte (c) del Lema 3.17, se obtiene

$$A_{(\gamma_1,...,\gamma_{m+1})} \subset A_{(\gamma_1,...,\gamma_m)} \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Es decir, tenemos una sucesión decreciente de conjuntos compactos, no vacíos. Por [Rudin, Teo.2.36] , se obtiene que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{(\gamma_1,...,\gamma_m)} \neq \emptyset$$

Si tomamos un punto r en esta intersección, entonces

$$f(r) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...)$$

Por lo que f es suprayectiva.

Demostraremos que f es una función continua. Sean $p \in X$, $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$. Supongamos que $p \in A_{(\alpha_1,...,\alpha_M)}$. Dada $q \in$

$A_{(\alpha_1,...,\alpha_M)}$. Entonces $f(p)$ y $f(q)$ coinciden en las primeras M coordenadas. Así que $f(p)$ y $f(q)$ son de la forma $f(p) = (\alpha_1, ..., \alpha_M, \alpha_{M+1}, ...)$ y $f(q) = (\alpha_1, ..., \alpha_M, \beta_{M+1}, ...)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\alpha_m - \beta_m|}{2^m} = \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m - \beta_m|}{2^m} \\ &\leq \frac{1}{2^{M+1}} + \frac{1}{2^{M+2}} + \frac{1}{2^{M+3}} + ... \\ &= \frac{1}{2^{M+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right) = \frac{1}{2^{M+1}}(2) = \frac{1}{2^M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $d(f(p), f(q)) < \varepsilon$ para toda q en el abierto $A_{(\alpha_1,...,\alpha_M)}$.

Por tanto f es continua. Hemos obtenido una función continua e inyectiva del espacio métrico compacto X en el espacio métrico $\{0,1\}^{n_1} \times \{0,1\}^{n_2} \times \{0,1\}^{n_3} \times ...$. Por [Rudin, Teo. 4.17], f es un homeomorfismo.

Por el Lema 3.20, se obtiene que X es homeomorfo a C.

Esto concluye la prueba del teorema.

Referencia

[1]Walter Rudin. Principios de Análisis Matemático. Mcgraw-Hill, 1980.

[2] Stephen Willard. General Topology. Addison-Wesley, 1970.

[3] Richard E. Chandler. Hausdorff Compactifications. Marcel Dekker, Inc. 23, 1976.