PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

U.N.A.M.

vínculos matemáticos

"CURSO DE TOPOLOGIA GENERAL"

POR

ANGEL TAMARIZ MASCARUA*

SERIE: NOTAS DE CLASE

COMUNICACIÓN INTERNA #114, 1990.

* Profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

IMPRESION: Publicaciones de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

departamento de matemáticas. facultad de ciencias.

C U R S O   D E   T O P O L O G I A   G E N E R A L

Dirigido y Realizado por:

ANGEL TAMARIZ MASCARUA

Profesor de Matemáticas de la Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Con la Colaboración de:

MANUEL ANTON URBINA

VALERIO HERNANDEZ MAYORGA

JAVIER MARTINEZ RIVAS

Profesores de la Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua - Núcleo León

Quiero hacer patente mi agradecimiento a las personas que con su esfuerzo y ayuda hicieron posible este trabajo.

En primer lugar a los compañeros profesores Manuel Anton U, Valerio Hernández M. y Javier Martinez R, profesores de matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, que trabajaron conmigo en la elaboración de este libro. También a mi esposa María Cristina que tuvo a su cargo el trabajo mecanográfico. Asi mismo a las autoridades de la U.N.A.N. que me permitieron colaborar como profesor en este bello proceso que es la Revolución Popular Sandinista.

Angel Tamariz Mascarúa.

León, Nicaragua Libre, Febrero de 1982

Año de la Unidad Frente a la Agresión

El texto que se presenta en esta publicación fue elaborado durante mi estancia como prfesor en la Universidad de Nicaragua en el año de 1981. Lo realicé con el auxilio de un grupo de profesores de esa universidad con el objeto de que pudiera ser utilizado como libro de texto.

Muchos de los criterios empleados en la elección del material y en la forma de presentarlo, fueron determinados por las características y los objetivos de la enseñanza superior de las matemáticas en el marco de superación académica que se lleva a cabo dentro del proceso revolucionario que vive ese querido pais.

Estoy convencido que este material puede ser de gran utilidad como libro de texto o de consulta para cualquier estudiante que comienza a introducirse en la Topología General.

Angel Tamariz Mascarúa

México D.F., Agosto de 1984.

INTRODUCCION

Las ideas o problemas de esta teoría matemática moderna, la topología, son tan antiguos como el hombre mismo. Así, un niño realizaba una actividad topológica cuando al jugar con sus canicas, y al tirarlas una por una, las introducía todas en un solo potecito o cuando enrollaba un trozo de alambre, formaba un aro con él.

Uno de los más conocidos antecedentes de la Topología es el famoso problema de Euler de los puentes de Konigsberg. Pero no es sino con las investigaciones de George Cantor alrededor de 1870 que podríamos afirmar que la topología como teoría matemática en sí empieza a perfilarse cuando con algunos problemas moderados en la teoría de series de Fourier, investiga las propiedades de los subconjuntos del sistema de los números reales y del espacio euclideano n-dimensional. Cantor estudió algunos conceptos nuevos relacionados con la distancia. El consideró el derivado de un conjunto X de puntos en el espacio euclideano n-dimensional como el conjunto de todos los puntos x que tienen la propiedad de que podría hallarse una infinidad de puntos de X dentro de una distancia arbitraria pequeña.

Como podemos notar, en esta definición de derivado de un conjunto, Cantor ya usa la idea de adherencia de puntos, de vecindades. Este concepto será decisivo en la formulación de la definición de Topología usado por Kuratowski. Aunque hubo importantes seguidores de Cantor en la década de 1880, tales como los italianos V. Volterra y C. Arzela que usaron los conceptos de Cantor, ya no en el sentido de espacios convencionales sino que estos espacios pudieron haber sido aquellos en que los "puntos" típicos podrían ser curvas o funciones. El paso más importante dado al respecto fué hecho por Maurice Fréchet en 1906 quien expuso que el concepto de distancia podría definirse para pares de "puntos" igualmente abstractos pero que desarrollaran sus propiedades de una vez. Este concepto aplicado en un espacio específico es lo que hoy se conoce como espacio métrico.

Poco después F. Riesz y F. Hausdorff observaron que la función distancia no satisfacía para la mayoría de los fines necesarios y que el concepto auxiliar de vecindad (esféricas) de un punto x satisfacía la idea de distancia en un espacio métrico, esto es, una vecindad es el conjunto de todos los puntos "dentro de una cierta distancia de" x pero que ésta tiene una serie de propiedades adicionales adecuadas para generalizar los conceptos.

En este concepto, axiomatizado, de vecindad, es precisamente donde radica toda la teoría topológica moderna. Hoy en día la topología general ha proporcionado la base para el estudio más avanzado de campos topológicos como son la topología algebraica y diferencial y se espera que esta rama viviente de las matemáticas, lógicamente organizada, sea aceptada por las mentes abstractas y creadoras por algún buen tiempo en el futuro.

Para resumir lo que se entiende por topología, podría decirse que ésta es una rama fundamental de las matemáticas y tal como la mayoría de las ramas de las matemáticas, ésta no admite una definición sencilla y concisa. Sin embargo, como la topología históricamente tiene sus raices en la geometría y en las funciones reales y complejas, podríamos decir que la topología se considera como el estudio de las propiedades preservadas por ciertos grupos de funciones contínuas, los homeomorfismos. Por esta razón, cuando decíamos que al enrollar un trozo de alambre formábamos un aro con él, realmente lo que se estaba haciendo era una transformación contínua del alambre al aro, etc.

De hecho, la descripción anterior del concepto de topología, no profundiza en forma concisa el concepto general de la misma, pero da una idea bastante esencial de la topología.

Este libro llena varios propósitos fundamentales: solucionar el problema de carencia de textos básicos en nuestra universidad y en él se encuentra desarrollado en forma amplia el programa de la asignatura que se imparte en la carrera de matemática.

El libro se divide en siete capítulos. En el primero intitulado Preliminares, se discuten los temas de lenguaje de conjuntos, números cardinales, espacios métricos y funciones.

Nosotros consideramos que estos temas son necesarios y básicos para la comprensión de los conceptos fundamentales a tratar posteriormente. En el capítulo dos se expone el material conceptual de topología con una serie de ejemplos y ejercicios y en el capítulo tres se expone ampliamente el concepto de topología; esto es, aquí se estudian las transformaciones contínuas y la convergencia. Se proponen métodos en el capítulo cuatro para construir espacios y en los capítulos subsiguientes se extiende a los espacios topológicos los conceptos clásicos del análisis tales como axioma de separación y numerabilidad, compacidad y conexidad con variedad de ejemplos y ejercicios propuestos.

En verdad, este libro de texto de topología es el primero de su tipo que se escribe en Nicaragua y por consiguiente tiene un valor histórico y científico de trascendencia. Nosotros consideramos que en estos momentos en que la patria empieza, por primera vez, una etapa de desarrollo social esencialmente proletario y que podrian, en un sentido, las matemáticas convertirse en herramientas netamente de servicios para resolver los ingentes problemas económicos y demográficos del pais y que efectivamente si esto ocurriera sería una gran conquista revolucionria. Sin embargo, podría suceder que en el trayecto de cierto número de años las matemáticas se convirtieran en empíricas y tendríamos que importar la matemática teórica. Por esta razón este libro de matemática teórica viene a incentivar en primer lugar la elaboración de libros de textos básicos y con esta ejercitación se ha de contribuir a mantener una actitud de estudio e investigación de parte de los docentes, asegurando de esta forma la existencia de una fuente teórica de donde se nutra la matemática aplicada.

Los Autores

INDICE

CAPITULO PRELIMINAR

Introducción

En este capítulo preliminar, se alistan en las secciones 1, 2, 3, 4, 7 una serie de resultados sobre conjuntos, funciones, producto cartesiano y espacios métricos. Como se podrá apreciar, se dan pocas demostraciones y se deja que el lector acomplete aquellas que no aparecen. El objetivo de este capítulo es recordarle al alumno conceptos, definiciones y teoremas que seguramente ha manejado ya en cursos anteriores y que serán utilizados en el transcurso de los capítulos subsiguientes.

En la sección 5 se discute sobre cardinalidad de conjuntos y en la sección 6 se trata someramente el axioma de elección y proposiciones equivalentes. El desarrollo de estas secciones es limitado y solo se ha buscado tratar estos temas de manera sencilla y suficiente para las necesidades de nuestra materia. Para una profundización en estos temas, ver por ejemplo [11].

Sección 1.- Conjuntos:

De una manera rigurosa, el término conjunto es definido por medio de una lista de axiomas; sin embargo, para nuestros propósitos nos bastará con dar una idea intuitiva de conjunto: Un conjunto es una colección de objetos que satisfacen alguna propiedad. (Ver [11])

La colección $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ de números naturales; la colección de números primos; la colección de líneas en un plano que pasan a través de un punto fijo, son ejemplos de conjuntos.

Si A es un conjunto y x es un objeto de A, a x le llamaremos elemento o punto de A y el símbolo $x\in A$ significa: x es un elemento de A.

Dados dos conjuntos A,B, si cualquier elemento de A pertenece también a B, entonces decimos que A es un subconjunto de B. A este hecho lo denotaremos por $A\subseteq B$. Si A y B tienen los mismos elementos, entonces diremos que A y B son iguales: $A=B$. Esto es equivalente a $A\subseteq B$ y $B\subseteq A$.

Si $A\subseteq B$ pero $A\neq B$ entonces diremos que A es un subconjunto propio de B.

El conjunto $\mathbb{Z}=\{\dots-n,\dots,-1,0,1,2,\dots,n,\dots\}$ de números enteros es un subconjunto del conjunto de números racionales

$\mathbb{Q}=\{n/m;\ m,n \quad ,\ m\neq 0;$ m y n no tienen divisores comunes diferentes de 1$\}$

Con respecto a la inclusión $\subseteq$ tenemos que para conjuntos A, B, C, se cumple

1.1 (a) $A\subseteq A$

(b) $A\subseteq B$ y $B\subseteq A \Rightarrow A=B$

(c) $A\subseteq B$ y $B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.

Consideramos también como conjunto a la colección que carece de elementos: $\{x:x\neq x\}$. A este conjunto lo denotaremos por $\emptyset$ y adoptaremos la convención $\emptyset\subseteq A$ para cualquier conjunto A.

Sea X un conjunto. Denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ a la colección de subconjuntos de X. A este conjunto le llamaremos el conjunto potencia de X. Por ejemplo si $X=\{1,2,3\}$, entonces $\mathcal{P}(X)=\{\emptyset,X,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$.

Si A,B son subconjuntos de X, denotaremos por $A\cup B$ al conjunto unión de A y B que definimos como $A\cup B=\{x\in X: x\in A$ ó $x\in B\}$.

Denotaremos por $A\cap B$ al conjunto intersección de A y B que es el conjunto de puntos que pertenecen a A y a B; es decir,

$$A\cap B=\{x\in X: x\in A \text{ y } x\in B\}$$

Por fin A-B denota la diferencia de los dos conjuntos y es la colección de puntos que pertenecen a A pero no a B:

$$A-B=\{x\in X: x\in A \text{ y } x\notin B\}.$$

Al conjunto X-B le llamamos el complemento de B en X.

Con respecto a estas operaciones de conjuntos, se puede demostrar las siguientes reglas:

<u>1.2 - Teorema</u>: Para cualesquiera tres conjuntos A,B y C se tiene que

Conmutatividad:

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

Asociatividad:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

Distributividad:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

Fórmulas de De Morgan:

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$$

$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$$

<u>Demostración</u>: Las demostraciones son sencillas y solo desarrollaremos, a guisa de ejemplo, la correspondiente a la igualdad

$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$:

$x\in C-(A\cup B) \Leftrightarrow x\in C$ y $x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\in C$ y $x\notin A$ y $x\notin B \Leftrightarrow$

$x\in C$ y $x\notin A$ y $x\in C$ y $x\notin B \Leftrightarrow x\in(C-A)\cap(C-B)$.

Es decir, $C-(A\cup B)\subseteq(C-A)\cap(C-B)$ y $(C-A)\cap(C-B)\subseteq C-(A\cup B)$, de aquí se obtiene la igualdad. O

Las nociones de unión e intersección de conjuntos las podemos generalizar como sigue:

Sea $\mathcal{B}$ una colección cuyos elementos son conjuntos, entonces la unión de los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{B}$, $\bigcup\{E:E\in\mathcal{B}\}$, es el conjunto de elementos o puntos que pertenecen a alguno de los conjuntos en $\mathcal{B}$:

$\bigcup\{E:E\in\mathcal{B}\}=\{x:x\in E$ para algún $E\in\mathcal{B}\}$. La intersección de los conjuntos en $\mathcal{B}$ es la colección de puntos que pertenecen a todos y cada uno de los elementos en $\mathcal{B}$:

$$\bigcap\{E:E\in\mathcal{B}\}=\{x:x\in E \text{ para todo } E\in\mathcal{B}\}.$$

Las notaciones $\bigcup_{E\in\mathcal{B}}E$, $\bigcap_{E\in\mathcal{B}}E$ también serán empleadas para designar unión e intersección, respectivamente, de los conjuntos en $\mathcal{B}$.

Los resultados en el Teorema 1.2 se cumplen también para una colección cualquiera de conjuntos. Así, por ejemplo, las reglas distributivas y las fórmulas de De Morgan quedan expresadas en este caso como:

<u>1.3</u> - (a) $A\cap(\bigcup\{E:E\in\mathcal{B}\})=\bigcup\{A\cap E:E\in\mathcal{B}\}$.

(b) $A\cup(\bigcap\{E:E\in\mathcal{B}\})=\bigcap\{A\cup E:E\in\mathcal{B}\}$.

(c) $C-(\bigcup\{E:E\in\mathcal{B}\})=\bigcap\{C-E:E\in\mathcal{B}\}$.

(d) $C-(\bigcap\{E:E\in\mathcal{B}\})=\bigcup\{C-E:E\in\mathcal{B}\}$.

<u>Sección 2.- Producto Cartesiano de Dos Conjuntos</u>:

Sean A y B dos conjuntos diferentes del vacio. Para cada elemento $a\in A$ y cada elemento $b\in B$ podemos considerar un nuevo objeto (a,b) que llamaremos pareja ordenada. Las parejas ordenadas están determinadas por la siguiente condición:

$(a,b)=(c,d)$ si y solo si $a=c$ y $b=d$.
En particular, $(a,b)=(b,a)$ si y solo si $a=b$.

Al conjunto de parejas ordenadas (a,b) donde $a\in A$ y $b\in B$, le llamamos el producto cartesiano de los conjuntos A y B y lo denotamos por AxB. En el caso en que A=B, entonces AxB se denota también como A^2.

Si $(a,b)\in AxB$, a a se le llama primera coordenada de la pareja (a,b) y a b segunda coordenada.

En el siguiente teorema establecemos resultados que relacionan al producto cartesiano de conjuntos con las operaciones $\cup$, $\cap$ y $-$.

2.1 - Teorema:

Sean A,B,C tres conjuntos, entonces:

$Ax(B\cup C)=(AxB)\cup(AxC)$

$Ax(B\cap C)=(AxB)\cap(AxC)$

$Ax(B-C)=(AxB)-(AxC)$

Sección 3.- Relaciones:

Una relación de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $AxB: R\subseteq AxB$. $(a,b)\in R$ se denota también como aRb y decimos que a está R-relacionando con b. En el caso en que A=B, diremos simplemente: una relación R en A....

3.1 - Ejemplos:

1.- Si $A=B=\mathbb{R}$, definimos una relación R en $\mathbb{R}$ como aRb si y solo si $a\leq b$. En este caso R es el conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ que se encuentran arriba de la diagonal a 45 grados.. (Ver figura 1)

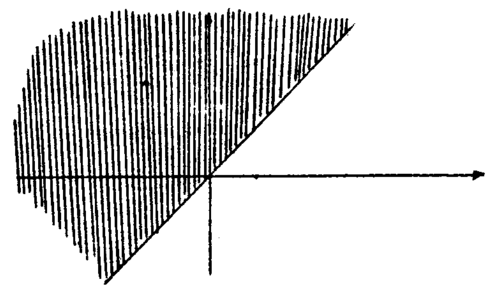


Figura 1: aRb si y solo si $a\leq b$.

2.- aRb si y solo si $a=b$ es ejemplo de otra relación. En el caso $A=B=\mathbb{R}$, la relación R es precisamente la diagonal a 45 grados.

3.2 - Definiciones:

1.- Una relación R en un conjunto A se dice que es una relación de orden si satisface

(a) aRa para toda $a\in A$ (Reflexividad)

(b) aRb y bRa $\Rightarrow$ $a=b$ (Antisimetría)

(c) aRb y bRc $\Rightarrow$ aRc (Transitividad)

2.- Una relación R en un conjunto A se dice que es una relación de equivalencia si satisface

(a) aRa para toda $a\in A$ (Reflexividad)

(b) aRb $\Rightarrow$ bRa (Simetría)

(c) aRb y BRc $\Rightarrow$ aRc (Transitividad)

Nota: En general, a las relaciones de orden se les denota con el símbolo $\leq$ y a las relaciones de equivalencia con el símbolo

3.3 - Ejemplos:

1.- El ejemplo 3.1.1 es una relación de orden en $\mathbb{R}$ y el ejemplo 3.1.2 es una relación de equivalencia.

2.- Sea X un conjunto. En $\mathcal{P}(X)$ podemos definir la siguiente relación R: ARB si y solo si $A\subseteq B$.

Los resultados alistados en 1.1 implican que la relación $\subseteq$ es una relación de orden en $\mathcal{P}(X)$.

3.- Una relación de orden R en un conjunto X es total (o también, la pareja (X,R) es un conjunto totalmente ordenado), si para cualquier pareja $x,y\in X$, se cumple xRy o yRx.

Si no se satisface esta propiedad entonces diremos que R es una relación de orden parcial ((X,R) es un conjunto parcialmente ordenado). En el ejemplo 3.1.1 se muestra un conjunto totalmente ordenado. En cambio $\mathcal{P}(X)$ con la relación de inclusión, es un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado. En el caso en que X tiene más de un punto, $\mathcal{P}(X)$ con la relación de inclusión, es parcialmente ordenado pero no totalmente ordenado.

Sección 4.- Funciones:

Una función f de un conjunto X en un conjunto Y, es una relación de X en Y tal que

(a) Para cada $x\in X$ existe $y\in Y$ tal que $(x,y)\in f$.

(b) si $(x,y_1)\in f$ y $(x,y_2)\in f$ entonces $y_1=y_2$.

Si $(x,y)\in f$, entonces a y le llamaremos la imagen de x bajo f y lo denotaremos como $y=f(x)$. El símbolo $f:X\to Y$, significa que f es función de X en Y. A X le llamamos el dominio de f y al conjunto de puntos en Y que están f-relacionados con algun punto de X le llamamos la imagen de X bajo f (o el rango de f) y la denotamos por $f(X)$.

En general, si $A\subseteq X$, la imagen de A bajo f, que denotamos por $f(A)$, es el conjunto $f(A)=\{f(x):x\in A\}$.

Si $B\subseteq Y$, denotaremos por $f^{-1}(B)$ al conjunto $\{x\in X:f(x)\in B\}$ que llamaremos la imagen inversa de B con respecto a f.

Como convención tendremos siempre que $f(\emptyset)=\emptyset$ y $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$.

De aquí en adelante, para determinar una función de X en Y lo haremos mencionando explícitamente qué subconjunto de XxY es, o bien solamente indicaremos la colección en Y de segundas coordenadas: $\{f(x):x\in X\}$. Otra forma será señalar qué valor le corresponde a cada x X, como sigue: $x\to f(x)$.

Demos ahora algunos ejemplos simples:

(a) Si $y_0\in Y$, $f=\{(x,y_0):x\in X\}$ es una función de X en Y llamada función constante.

(b) Si X=Y, entonces $id(x)=x$ para toda $x\in X$ es la función identidad.

(c) Si $X=Y=\mathbb{R}$ entonces $x\to a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a$ donde $a_i\in\mathbb{R}$ para $i=0,\ldots,n$, es una función polinomial.

(d) A la relación R en $\mathbb{R}^+$ dada por $R=\{(x,+\sqrt{x}):x\in\mathbb{R}^+\}\cup\{(x,-\sqrt{x}):x\in\mathbb{R}^+\}$, no es una función pues a cada $x\in\mathbb{R}^+$, $x\neq 0$, le estamos relacionando dos valores, su raiz positiva y su raiz negativa.

4.1 - Teorema: Sea $f:X\to Y$ una función y $A,B\subseteq X$; entonces

(a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

(b) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

(c) $f(A-B)\supseteq f(A)-f(B)$

En general, si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X:

(d) $f(\bigcup\{A : A\in\mathcal{B}\})=\bigcup\{f(A) : A\in\mathcal{B}\}$.

(e) $f(\bigcap\{A : A\in\mathcal{B}\})\subseteq\bigcap\{f(A) : A\in\mathcal{B}\}$.

Demostración: Aquí demostraremos solo el inciso (e):

Sea $y\in f(\bigcap\{A : A\in\mathcal{B}\})$, esto implica que existe $x\in\bigcap\{A : A\in\mathcal{B}\}$ tal que $f(x)=y$. Como $x\in\bigcap\{A : A\in\mathcal{B}\}$, entonces $x\in A$ para todo $A\in\mathcal{B}$, y esto implica que $y\in f(A)$ para toda $A\in\mathcal{B}$, es decir $y\in\bigcap\{f(A) : A\in\mathcal{B}\}$, lo que significa que cualquier elemento en el conjunto $f(\bigcap\{A : A\in\mathcal{B}\})$ pertenece a $\bigcap\{f(A) : A\in\mathcal{B}\}$ y de aquí el resultado.

Observe que no siempre se cumple la igualdad en (e). Por ejemplo si $X=\{a,b\}$, $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $Y=\{c\}$ y $f:X\to Y$ relaciona a a y b con c, entonces $f(A\cap B)=\emptyset$ mientras que $f(A)\cap f(B)=Y$. O

Con respecto a las imágenes inversas, tenemos el siguiente resultado.

4.2 - Teorema: Si $f:X\to Y$ es una función y $A,B\subseteq Y$ entonces

(a) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

(b) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

(c) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$

y en general, si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X,

(d) $f^{-1}(\bigcup\{A : A\in\mathcal{B}\})=\bigcup\{f^{-1}(A) : A\in\mathcal{B}\}$.

(e) $f^{-1}(\bigcap\{A : A\in\mathcal{B}\})=\bigcap\{f^{-1}(A) : A\in\mathcal{B}\}$.

4.3 - Definiciones: Sea $f:X\to Y$ una función

(a) f es inyectiva (uno a uno o inyección) si para toda $x_1,x_2\in X$ tales que $x_1\neq x_2$, implica $f(x_1)\neq f(x_2)$.

(b) f es suprayectiva (sobre o suprayección) si cada elemento en Y está f-relacionado con alguno en X. Es decir, si $y\in Y$, entonces existe $x\in X$ tal que $f(x)=y$.

(c) f es biyectiva (o biyección) si es a la vez inyectiva y suprayectiva.

4.4 - Ejemplos:

(a) La función $f:X\to X$ dada por $f(x)=x$ para cada $x\in X$, y la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3$ son ejemplos de funciones inyectivas (de hecho son biyectivas).

(b) La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f((x,y))=x$, es ejemplo de una función suprayectiva que no es inyectiva.

Si $f:X\to Y$ es una función biyectiva, entonces podemos definir una nueva función con dominio en Y y rango en X. Esta función relacionará cada elemento $y\in Y$ con el elemento x tal que $f(x)=y$. A esta función le llamamos la función inversa de f y la denotamos por $f^{-1}:Y\to X$. Es claro que f^{-1} es también una función biyectiva.

Nota: Debemos tener cuidado en no confundir la función inversa de f, f^{-1}, con la imagen inversa de $A\subseteq Y$ bajo f, $f^{-1}(A)$. La primera es una función y solo se puede definir cuando f es biyectiva, la segunda es un subconjunto de X y está bien definido aun si f no es biyectiva.

Si $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$ son dos funciones donde $f(X)=Y$, podemos considerar la función composición $g\circ f:X\to Z$ definida por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

En el caso en que $f:X\to Y$ es biyectiva, entonces $f^{-1}\circ f=id_X$ y $f\circ f^{-1}=id_Y$, donde id_X es la función identidad en X e id_Y es la función identidad en Y.

4.5 - Teorema: Si $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$ son dos funciones, entonces

(a) $(g\circ f)(A)=g(f(A))$ para $A\subseteq X$.

(b) $(g\circ f)^{-1}(B)=f^{-1}(g^{-1}(B))$ donde $B\subseteq Z$.

De este resultado se implica que la composición de funciones suprayectivas es una función suprayectiva y la composición de funciones inyectivas es una función inyectiva y por lo tanto la composición de funciones biyectivas es una función biyectiva.

4.6 - Teorema: Si $h=g\circ f$ es la composición de las funciones $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$, entonces se tiene que

(a) g es suprayectiva si h lo es.

(b) f es inyectiva si h lo es.

Demostración:

(a) Si h es suprayectiva, entonces $h(X)=Z$, pero de 4.5 (a) tenemos que $Z=h(X)=g[f(X)]\subseteq g(Y)\subseteq Z$. Por lo tanto $g(Y)=Z$, es decir, g es suprayectiva.

(b) Supongamos ahora que h es inyectiva y sean a y b dos puntos en X tales que $f(a)=f(b)$. Entonces se tiene que $h(a)=g[f(a)]=g[f(b)]=h(b)$. Como h es inyectiva, se cumple que $a=b$, es decir, f es una función inyectiva. O

Si $f:X\to Y$ es una función y $A\subseteq X$, entonces podemos definir sobre A una nueva función que denotaremos por f/A (se lee f restringida a A) que es la función f restringida al conjunto A. Se define como $(f/A)(a)=f(a)$ para toda $a\in A$.

Por otro lado, si $g:A\to Y$ es una función definida sobre A y $f:X\to Y$ es una función definida en X tal que para todo $a\in A$ se tiene que $f(a)=g(a)$, entonces diremos que f es una extensión en todo X de la función g.

Sección 5 - Cardinalidad:

Dado un conjunto X nos podemos preguntar sobre la cantidad de elementos que contiene. En el caso de conjuntos pequeños (conjuntos finitos), la expresión "X tiene n elementos", significa que es posible alistar los elementos de X y ponerlos en correspondencia biunívoca con los elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$. Esto es lo que llamamos "contar los elementos de X".

En matemáticas, sin embargo, la mayoría de los conjuntos importantes con los que se trabaja, no son conjuntos cuyos elementos puedan ser contados. Sin embargo, así como "contar" un conjunto X significa comparar el "tamaño" de X con el "tamaño" del conjunto $\{1,\ldots,n\}$, así también es posible dar criterios por medio de los cuales podamos saber cuando dos conjuntos tienen la misma "cantidad de elementos" o cuando un conjunto es más "grande" que otro. En este sentido, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, jugará un papel importante pues en general nuestra preocupación con respecto a la "cantidad de elementos" o "tamaño" de un conjunto X, se reducirá a compararlo con el conjunto $\mathbb{N}$: X tiene más elementos, menos elementos o igual cantidad de elementos que $\mathbb{N}$.

5.1 - Definiciones:

Sean X y Y dos conjuntos

(a) Diremos que X tiene la misma cardinalidad que Y (tiene igual "cantidad de elementos" que Y), si existe una función $f:X\to Y$ biyectiva.

La relación "X tiene la misma cardinalidad que Y" es una relación de equivalencia.

(b) Diremos que X tiene menor o igual cardinalidad que Y (o Y tiene mayor o igual cardinalidad que X) si existe una función $f:X \to Y$ inyectiva.

La relacion: "X tiene menor o igual cardinalidad que Y" es una relación de orden. En particular se satisface:

Si X tiene menor o igual cardinalidad que Y y Y tiene menor o igual cardinalidad que X, entonces X y Y tienen la misma cardinalidad.

(c) Diremos que X tiene cardinalidad estrictamente menor que Y (o Y tiene cardinalidad estrictamente mayor que X) si existe una función $f:X \to Y$ inyectiva y para cualquier función $g:X \to Y$, g no es suprayectiva.

(d) Decimos que un conjunto X es finito o tiene cardinalidad finita si existe un número natural n tal que X y $\{1,2,...,n\}$ tienen la misma cardinalidad. En este caso decimos que la cardinalidad de X es igual a n.

(e) Un conjunto X es infinito si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier función $f:\{1,...,n\} \to X$, f no es biyectiva.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$; el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el de los reales $\mathbb{R}$, son ejemplos de conjuntos infinitos.

Para los objetivos de este libro, a los conjuntos infinitos los clasificaremos en dos clases:

(a) Un conjunto X es numerable infinito si X tiene cardinalidad igual a la del conjunto de los números naturales .

(b) Si X tiene cardinalidad estrictamente mayor que el conjunto $\mathbb{N}$, entonces diremos que X es más que numerable.

En el transcurso de este libro, cada vez que se hable de un conjunto numerable, entenderemos un conjunto finito o numerable infinito.

Así por ejemplo, el conjunto de números pares $E=\{2n:n\in\mathbb{N}\}$, es un conjunto numerable infinito ya que $n \to 2n$, es una biyección de $\mathbb{N}$ en E.

El conjunto de números enteros es también un conjunto numerable infinito: La función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ dada por $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=-1$, $f(4)=2$, $f(5)=-2$, y en general $f(2n)=n$, $f(2n+1)=-n$, es una función biyectiva.

Un conjunto de suma importancia que es numerable es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$:

En efecto, cada racional r puede expresarse de manera única como un cociente de enteros n/m donde n y m no tienen divisores comunes (diferentes de 1) y $m\neq 0$. La función $n/m \to n/m$ de $\mathbb{Q}$ en el conjunto $E=\{n/m:n,m\in\mathbb{Z}, m\neq 0\}$ es inyectiva y por lo tanto la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ es menor o igual a la cardinalidad de E.

Ahorabien, consideremos el siguiente diagrama:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...	1/n	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...	2/n	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...	3/n	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m/1	m/2	m/3	m/4	m/5	...	m/n	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

Las flechas nos definen una función f de $\mathbb{N}$ en $E^{+}=\{n/m:n,m\in\mathbb{N}\}$ que es inyectiva: $f(1)=1/1$, $f(2)=1/2$, $f(3)=2/1$, $f(4)=3/1$,... y ahora la función $h:\mathbb{Z}\to E$ dada por

$$h(0)=0,\ h(n)=\begin{cases} f(n) & \text{si } n>0 \\ -f(-n) & \text{si } n<0 \end{cases}$$

es una función biyectiva, es decir, la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ es igual a la de E y por lo tanto $\mathbb{Q}$ tiene cardinalidad menor o igual que $\mathbb{Z}$.

Por otro lado existe una función inyectiva trivial $j:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $j(n)=n$. y por lo tanto se tiene que la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ es la misma que la de $\mathbb{Z}$ y por lo tanto la misma que $\mathbb{N}$. Es decir, $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable infinito.

Si un conjunto X tiene la misma cardinalidad que el conjunto A, podemos denotar a los elementos de X, indicándolos por medio de los elementos de A, de la siguiente manera $X=\{x_a : a\in A\}$. Si X es numerable escribiremos $X=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ o $X=\{x_1,x_2,\dots\}$.

<u>5.2 - Teorema</u>: La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

<u>Demostración</u>:

$A_1=\{x_1^1,x_2^1,x_3^1,\dots\}$

$A_2=\{x_1^2,x_2^2,x_3^2,\dots\}$

$\vdots$

$A_n=\{x_1^n,x_2^n,x_3^n,\dots\}$

$\vdots$

Sea $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. A tiene mayor o igual cardinalidad que cualquier A_n ya que la función inclusión $j(x_s^n)=x_s^n$, es inyectiva. Como los conjuntos A_i no son necesariamente ajenos dos a dos, la función $x\to x$ es una función inyectiva del conjunto A en el conjunto que alistamos en el diagrama de abajo

$$\begin{array}{cccc} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots \\ \vdots & & & \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Las flechas que aparecen en el diagrama, muestran una biyección entre este conjunto y los números naturales $:f(1)=x_1^1, f(2)=x_2^1, f(3)=x_1^2,\dots$ Es decir, A tiene menor o igual cardinalidad que $\mathbb{N}$. Por otro lado, ya vimos que A_n tiene menor o igual cardinalidad que A. Pero A_n es numerable, por lo tanto A lo es.

En el caso en que en la lista de los conjuntos A_n, aparecieran conjuntos finitos, la demostración de que A es numerable no es muy diferente a la anterior. $\circ$

Veamos ahora dos resultados importantes relacionados a conjuntos infinitos que utilizaremos posteriormente.

<u>5.3 - Teorema</u>: Cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto numerable infinito.

<u>Demostración</u>: Sea A un conjunto infinito. Tomemos en él un elemento cualquiera x_1. Como A es infinito, encontraremos en él un elemento x_2 distinto de x_1 y luego un elemento x_3 diferente de x_1 y x_2. Continuando este proceso por inducción, obtenemos un subconjunto numerable $\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$ de A. $\circ$

Intuitivamente, este resultado es equivalente a decir que los conjuntos numerables infinitos son los conjuntos infinitos más "pequeños".

El siguiente Teorema es una caracterización de los conjuntos infinitos.

<u>5.4 - Teorema</u>: Un conjunto A es infinito si y solo si contiene un subconjunto propio con la misma cardinalidad que él.

<u>Demostración</u>:

$\Rightarrow$) Sea $A^*=\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$ un subconjunto numerable del conjunto infinito A. Entonces $A=A^*\cup(A-A^*)$. $A-\{x_1\}$ es un subconjunto propio de A y la función

$$f(x)=\begin{cases} x_{n+1} & \text{si } x=x_n \\ x & \text{si } x\in A-A^* \end{cases}$$

es una función biyectiva de A en $A-\{x_1\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que A es un conjunto finito, esto es, existe $n\in\mathbb{N}$ y una biyección $f:A\to\{1,\dots,n\}$. Supongamos también que A contiene un subconjunto propio B de la misma cardinalidad. Entonces existe $h:A\to B$ biyectiva. Como B es subconjunto propio de A, f/A es una biyección de B en un subconjunto propio de $\{1,\dots,n\}$. Es decir, existe $m\in\mathbb{N}$ con $m<n$ y $g:B\to\{1,\dots,m\}$ biyectiva. Asi $g\circ h\circ f^{-1}:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,m\}$ es una biyección, lo cual es imposible pues esto es equivalente a $n=m$.

Como último resultado de esta sección, damos un ejemplo importante de conjunto más que numerable.

<u>5.5 - Teorema</u>: El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es un conjunto más que numerable.

<u>Demostración</u>: Consideremos el intervalo abierto $(0,1)$ que es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto $(0,1)$ tiene menor o igual cardinalidad que $\mathbb{R}$. Para obtener pues nuestro resultado, basta con demostrar que $(0,1)$ es más que numerable.

Supongamos que $(0,1)$ es numerable. Podemos entonces alistar los elementos de este conjunto: $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$. A cada x_i lo podemos expresar en forma decimal eligiendo la extensión infinita para los números de la forma $P/10^q$, por ejemplo para $1/2=5/10$, escogeremos la extensión decimal 0.4999... en lugar de 0.5000.... Alistamos pues estos números en su expansión decimal:

$$\begin{aligned} x_1&=0.x_{11}\,x_{12}\,x_{13}\cdots \\ x_2&=0.x_{21}\,x_{22}\,x_{23}\cdots \\ x_3&=0.x_{31}\,x_{32}\,x_{33}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Consideremos ahora el número cuya extensión decimal es

$$x_0=0.x_{01}\,x_{02}\,x_{03}\cdots$$

donde x_{0i} es diferente a 0 y 9 para todo i y además, $x_{01}\neq x_{11}$, $x_{02}\neq x_{22},\dots,x_{0n}\neq x_{nn}\dots$. De esta manera resulta que $x_0\in(0,1)$ pero es diferente a cualquier elemento de la lista $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$. Lo que significa que es imposible aglutinar a todos los elementos de $(0,1)$ en un conjunto numerable. Es decir, $(0,1)$ es un conjunto más que numerable.

<u>Sección 6 - Axioma de Elección</u>

Si $A_1,\dots A_n$ es una colección finita de conjuntos no vacios, es obvio que podemos formar un nuevo conjunto tomando un elemento de cada uno de los conjuntos $A_1,A_2,\dots,A_n$.

Ahora bien, si consideramos una colección infinita de conjuntos no vacios $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$, la posibilidad de tomar o elegir un elemento de cada uno de los conjuntos A_α, deja de ser algo trivial. El axioma de elección nos garantiza que la operación de elegir un elemento en cada conjunto A_α es válida. De manera más precisa:

<u>Axioma de Elección</u>: Si $\{A_\alpha:\alpha\in A\}$ es una colección de conjuntos no vacios, entonces existe un conjunto $B\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$ tal que $B\cap A_\alpha$ tiene exactamente un elemento para cada $\alpha\in A$.

Este es el único axioma de la Teoría de Conjuntos que asegura la existencia de un conjunto sin dar las reglas que lo determinen de manera única. Es por esta razón que algunos matemáticos no aceptan trabajar con él.

Es de gran importancia el axioma de Elección y sus equivalentes, pues están en la base de muchas demostraciones de teoremas de gran importancia y temas diversos como por ejemplo en la demostración de la existencia de Bases de Hamel, el Teorema de Tychonoff (Ver Cap.V sección 2), el teorema de Krull que asegura que todo ideal propio en un anillo conmutativo está contenido en un ideal maximal.

Antes de enunciar algunas de las proposiciones equivalentes al axioma de elección, introduciremos algunos conceptos.

Sea (X,R) un conjunto parcialmente ordenado. Sea $A \subseteq X$, $a_o \in A$ es primer elemento de A si se satisface $a_o R a$ (a_o es menor que o igual) para toda $a \in A$. (X,R) es un conjunto bien ordenado (y R es un buen orden en X) si cualquier subconjunto de X tiene primer elemento. El conjunto de los naturales con su orden usual es ejemplo de un conjunto bien ordenado. En cambio el conjunto de los reales con su orden usual no es bien ordenado: el intervalo $(0,1)$ no tiene primer elemento.

Si $A \subseteq X$, entonces podemos considerar la relación de orden definida en todo X y restringirla a A. A cualquier subconjunto de X que resulte totalmente ordenado con el orden heredado de X, se le llama cadena y una cadena se dice que es maximal si no está contenida en ninguna otra cadena diferente de X.

Un elemento a_o de un subconjunto A de X es una cota superior de A si cualquier elemento $a \in A$ es menor a a_o.

Por último un elemento $a_o \in X$ es maximal si no existe $a \in X$ tal que $a_o R a$ (a_o menor que a).

<u>6.1.- Ejemplos:</u> Sea X un conjunto con más de un punto. Consideremos al conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ con la relación de orden R definida por la

inclusión $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Sea $x_0 \in X$ y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ dado por $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\}$. Resulta que $\{x_0\}$ es primer elemento de $\mathcal{A}$ y X es cota superior de $\mathcal{A}$. De la misma manera X es maximal en $(\mathcal{P}(X),R)$. En el conjunto de números naturales con el orden usual, un subconjunto tiene cota superior si y solo si es finito, y como $\mathbb{N}$ con este orden ,es él mismo una cadena, cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ es una cadena. $\mathbb{N}$ es la cadena maximal en $(\mathbb{N}, \leq)$.

A continuación algunas de las proposiciones equivalentes al axioma de elección. El Teorema 6.4 es quizas el de mayor uso.

<u>6.2.- Teorema de Zermelo</u>: Todo conjunto puede ser bien ordenado.

<u>6.3.- Teorema de Hausdorff:</u> Toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado está contenida en alguna de las cadenas maximales de este conjunto.

<u>6.4.- Lema de Zorn:</u> Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado (X,R) admite cota superior, entonces existe elemento maximal en X.

<u>6.5.- Lema de Tukey:</u> Ver capítulo V sección 2.

<u>Sección 7 - Producto Cartesiano</u>

En la sección 2 definimos producto cartesiano de dos conjuntos. Esta definición es suficiente para hablar de producto cartesiano de una colección finita cualquiera de conjuntos: En efecto si $A_1,\dots,A_n$ son conjuntos diferentes del vacio, entonces el producto cartesiano de $A_1,\dots,A_n$, que denotaremos por $A_1 x\dots x A_n$ o $\prod_{i=1}^{m} A_i$, se define inductivamente como el producto cartesiano de los conjuntos $(A_1 x\dots x A_{n-1})$ y A_n. En el caso $n=3$, por ejemplo, $A_1 x A_2 x A_3$ es el producto $(A_1 x A_2) x A_3$. Como ya tenemos bien definido el producto de dos conjuntos, éste también lo está. Asi los elementos del producto cartesiano $A_1 x \ldots x A_n$ son eneadas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ donde $a_i \in A_i$ con $i=1,\ldots,n$ y dos eneadas $(a_1,\ldots,a_n)$, $(b_1,\ldots,b_n)$ son iguales si y solo si $a_i=b_i$, $i=1,\ldots,n$.

En el caso en que tenemos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano de los elementos de la sucesión, que denotaremos por $A_1 x A_2 x \ldots x A_n x \ldots$ o $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$, es el conjunto de sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in A_n$ para cada n y dos de ellas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son iguales si y solo si $a_n=b_n$ para toda n.

Como se puede apreciar en los párrafos anteriores, nuestra definición de producto cartesiano puede ser refraseada como sigue. El producto cartesiano $A_1 x \ldots x A_n x \ldots x$ es el conjunto de funciones f con dominio en $\mathbb{N}$ y rango en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ que satisfacen $f(n) \in A_n$ para toda n.

Esta redefinición de producto cartesiano nos permite ahora hablar de producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos, de la manera siguiente. Sea A un conjunto arbitrario diferente de $\emptyset$ y $\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de conjuntos no vacíos indicada por A. El producto cartesiano ΠA_α es el conjunto de funciones $f: A \to \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$ tales que $f(\alpha) \in A_\alpha$ para toda α. En este caso $\Pi A_\alpha \neq \emptyset$ es una consecuencia del axioma de Elección. (En el caso en que $A=\emptyset$ o $A_\alpha=\emptyset$ para alguna α, convendremos en $\Pi A_\alpha=\emptyset$).

Con respecto a la cardinalidad de un producto cartesiano tenemos:

<u>7.1 - Teorema</u>: El producto cartesiano ΠA_α es un conjunto numerable si y solo si A y cada A_α son numerables. En particular, si A o alguna A_α es más que numerable, entonces ΠA_α es más que numerable. (Aquí estamos suponiendo que A y A_α para toda α, son diferentes de $\emptyset$)

Sección 8 - Espacios Métricos

Sea X un conjunto. Una métrica en X (también llamada distancia) es una función $d: X x X \to \mathbb{R}^+$, tal que satisface los siguientes axiomas:

(a) $d(x,y)=0$ si y solo si $x=y$

(b) $d(x,y)=d(y,x)$, para cualesquiera $x,y \in X$

(c) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$, para cualesquier tres puntos x,y,z que pertenecen a X. Esta propiedad es conocida como "La desigualdad del triángulo".

Ejemplos de funciones distancia podemos dar algunos. Si X es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, entonces la función $d(x,y)=|x-y|$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

En general en $\mathbb{R}^n$, la función

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

es una métrica, llamada la métrica Euclidiana (o métrica usual).

Para cualquier conjunto X, la función $d: X x X \to \mathbb{R}^+$, definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

es una distancia como se puede verificar fácilmente. Esta distancia es llamada la distancia discreta.

Si X es un conjunto y d es una función distancia en X, a la pareja (X,d) le llamaremos espacio métrico. De lo visto antes, resulta que $(\mathbb{R}^n,d)$ donde d es la métrica Euclideana, es un ejemplo de espacio métrico, así como (X,d) en donde d es la distancia discreta.

En el capítulo I trataremos algunos otros ejemplos importantes de espacios métricos.

EJERCICIOS - CAPITULO PRELIMINAR

Sección 1.

1.1 - Demuestre los teoremas 1.1 y 1.3 y acomplete la demostración del 1.2.

1.2 - Compruebe que se verifican las siguientes relaciones para subconjuntos arbitrarios A,B,C en un conjunto fijo X.

(a) $A \cap A = A = A \cup A$.

(b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

(c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$.

(d) Si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$ entonces $C \subseteq A \cap B$.

(e) $A \cup (X-A) = X$; $A \cap (X-A) = \emptyset$.

(f) $X-(X-A) = A$.

(g) Si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $B = X-A$.

(h) Si $A \subseteq B$, entonces $X-B \subseteq X-A$.

1.3 - Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes para cualquiera dos subconjuntos $A,B \subseteq X$.

(a) $A \cap B = A$.

(b) $A \cup B = B$

(c) $A \subseteq B$.

(d) $X-A \supseteq X-B$.

(e) $A \cap (X-B) = \emptyset$.

(f) $(X-A) \cup B = X$.

1.4 - Demuestre que las siguientes igualdades son ciertas para conjuntos arbitrarios A,B,C.

(a) $A \cap B = A-(A-B)$.

(b) $(A \cap B)-(A \cap C) = A \cap (B-C)$.

(c) $(A-B) \cup (A-C) = A-(B \cap C)$.

(d) $(A-C) \cup (B-C) = (A \cup B)-C$.

(e) $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B)-(A \cap B)$.

(f) $A \cup (B-A) = A \cup B$.

(g) $A \cap (B-A) = \emptyset$.

Sección 2.

2.1 Demuestre el Teorema 2.1.

2.2 Verifique que las siguientes igualdades son ciertas donde $A,B \subseteq X, C,D \subseteq Y$:

(a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

(b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$.

(c) $(X \times Y)-(B \times D) = [(X-B) \times Y] \cup [X \times (Y-D)]$.

2.3 Demostrar que si A,B,C,D son cuatro conjuntos tales que $C \times D \neq \emptyset$, entonces $C \times D \subseteq A \times B \Leftrightarrow C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.

Sección 3.

3.1 - El conjunto de números naturales con su orden usual, es un conjunto totalmente ordenado. Lo mismo para el conjunto de números reales con su orden usual.

3.2 - Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales y $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales en la variable real x. Demuestre que las siguientes relaciones son relaciones de equivalencia.

(a) En $\mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$.

(b) En $\mathcal{P}$, $pRq \Leftrightarrow dp/dx = dq/dx$.

(c) En $\mathcal{P}$, $pRq \Leftrightarrow$ el grado de p es igual al grado de q.

Sección 4.

4.1 - Acomplete la demostración del Teorema 4.1 y demuestre los Teoremas 4.2, 4.5 y 4.6.

4.2 - Sea $f:X \to Y$ una función $A_1, A_2, A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ arbitrarios. Demuestre

(a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(b) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

(c) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(d) $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$

(e) $f(X-A) \supseteq f(X) - f(A)$.

En el caso de las contenciones (b), (c) y (e), muestre que no siempre se da la igualdad.

4.3 - Si $f:X \to Y$, pruebe lo siguiente

(a) f es inyectiva si y solo si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para cualesquiera $A, B \subseteq X$.

(b) f es biyectiva si y solo si $f(X-A) = Y - f(A)$ para cualquier $A \subseteq X$.

Sección 5.

5.1 - Sea X un conjunto numerable. Demuestre que la familia de subconjuntos finitos de X es un conjunto numerable.

5.2 - Demuestre que el conjunto de números algebraicos es un conjunto numerable.

Sección 6.

6.1 - Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a) Axioma de Elección.

(b) Si $\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia no vacia de conjuntos no vacios, entonces existe una función $f: A \to \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ tal que $f(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in A$.

(c) Si $A \neq \emptyset$ y $A_\alpha \neq \emptyset$ para toda $\alpha \in A$, entonces $\Pi A_\alpha \neq \emptyset$.

Sección 7.

7.1 - Demuestre el teorema 7.1.

7.2 - Sea $A \neq \emptyset$ y para cada $\alpha \in A$, sea A_α un conjunto no vacio. Para cada $\beta \in A$ a la función $p_\beta : \Pi A_\alpha \to A_\beta$ dada por $p_\beta(f) = f(\beta)$, le llamamos β-ésima proyección.

Demuestre que p_β es suprayectiva para cualquier β.

7.3 - Para cada $\alpha \in A$ sea $A_\alpha \neq \emptyset$, demuestre que $\Pi A_\alpha \subseteq \Pi B_\alpha \Leftrightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada α.

7.4 - Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vacia de conjuntos no vacios. Para cada α, sea $A_\alpha, B_\alpha \subseteq X_\alpha$. Entonces

(a) $\Pi A_\alpha \cap \Pi B_\alpha = \Pi(A_\alpha \cap B_\alpha)$.

(b) $\Pi A_\alpha \cup \Pi B_\alpha \subseteq \Pi(A_\alpha \cup B_\alpha)$.

Sección 8.

8.1 - Demuestre que cada una de las siguientes funciones es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

(a) $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

(b) $d(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

8.2 - Sea $C[0,1]$ el conjunto de funciones reales continuas definidas sobre el intervalo $[0,1]$. Verifique que

$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$ es una métrica en $C[0,1]$.

8.3 - Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en X es una función de X en $\mathbb{R}^+$ que satisface: (Una norma suele denotarse por $\| \ \|$; y a la imagen de un punto x bajo $\| \ \|$ se denota por $\|x\|$).

(a) $\|x\|=0$ si y solo si $x=0$.

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$ para cualquier $x\in X$ y cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$.

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para $x,y\in X$ cualesquiera.

Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\| \ \|$ es una norma en X, la pareja $(X,\| \ \|)$ es un espacio vectorial normado.

(i) Sea $(X,\| \ \|)$ un espacio vectorial normado y $d:X\times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y)=\|x-y\|$

Demuestre que d es una métrica en X. A d le llamamos la métrica inducida por la norma $\| \ \|$.

(ii) Sea $C^*([0,1])$ el conjunto de funciones reales acotadas definidas sobre el intervalo $[0,1]$. $C^*([0,1])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, en donde la suma y el producto por escalares está definido punto por punto: $f+g$ es la función tal que $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ y αf es la función tal que $(\alpha f)(x)=(f(x))$.

Demuestre que la aplicación $f \to \sup\{|f(x)| : x\in[0,1]\}$ es una norma en $C^*([0,1])$.

A la métrica asociada con esta norma se le llama la métrica del supremo en $C^*([0,1])$.

CAPITULO I

ESPACIOS TOPOLOGICOS

INTRODUCCION

En los cursos de Cálculo y Análisis aparecen problemas diversos ligados a la idea de "proximidad" o "cercanía". El concepto de límite o de continuidad son problemas de esta índole. Así, intuitivamente una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ converge a un punto $x_o\in\mathbb{R}^n$ si para n suficientemente grande, los puntos x_n estan muy cercanos a x_o. De manera precisa, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_o si y solo si para cada real positivo ε , existe un $n_o\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_o, x_n)<\varepsilon$ para todo $n> n_o$, donde d es la distancia Euclidcana.

Sea ahora $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función. Intuitivamente decimos que f es continua en un punto x_o si para puntos muy cercanos a x_o sus imágenes bajo f son cercanas a $f(x_o)$. Formalizando tendríamos, f es continua en x_o si y solo si para cada real positivo ε , existe un real positivo δ tal que $d(f(x), f(x_o))<\varepsilon$ si $d(x, x_o)<\delta$.

Otro concepto que está basado en la idea de cercanía, es el de la convergencia uniforme. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f si para n grande, las gráficas de las funciones f_n y de la función f, para $m>n$ están muy pegadas. (Ver figura 1)

Formalmente decimos $f_n\to f$ uniformemente si para cada $\varepsilon>0$ existe $n_o\in\mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x))<\varepsilon$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y para todo $n> n_o$.

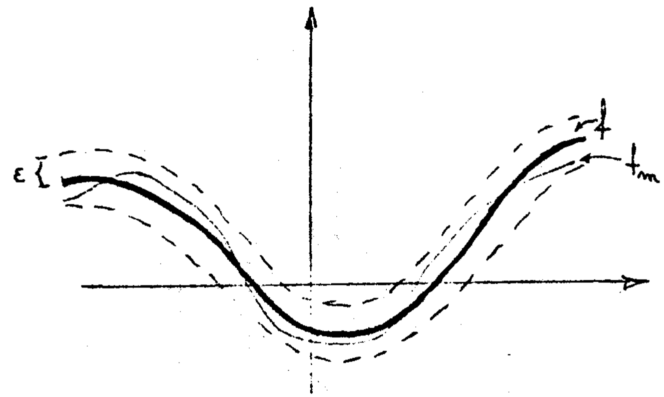


Figura 1.

También en Cálculo y Análisis encontramos problemas como el siguiente: Consideremos en $\mathbb{R}$ el intervalo abierto $(1,2)=\{x\in\mathbb{R}: 1<x<2\}$. Intuitivamente este conjunto nos ha dividido a la recta real en tres clases de puntos; unos que pertenecen a (1,2), otros que se encuentran "separados" al conjunto (1,2) como el 0 o el $1-2^{-10}$. Cada uno de estos puntos, si lo representamos en una recta, estarán dibujados con segmentos de por medio del conjunto (1,2). (Ver Figura 2).

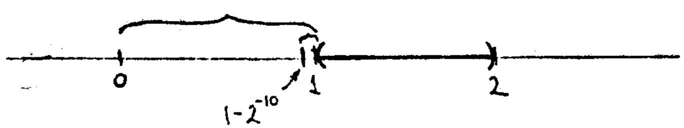


Figura 2.

Por último tenemos los puntos 1 y 2, los cuales estan "pegados" a (1,2) y no estan en este conjunto. En general, dado un conjunto $E\subseteq\mathbb{R}^n$, nos podemos preguntar por los puntos de $\mathbb{R}^n$ que esten "pegados" a E.

Intuitivamente un punto x_0 está "pegado" a E si hay puntos de E arbitrariamente cercanos a x_0. O más formalmente, x_0 está "pegado" a E si para cada $\varepsilon > 0$, existe $x\in E$ tal que $d(x_0, x)<\varepsilon$.

Se puede apreciar que en todos estos ejemplos aparece la idea de "cercanía".

En los espacios $\mathbb{R}^n$ conocemos ya una regla que nos determina cuando dos puntos estan cercanos. Así x está próximo a x_0 si $d(x, x_0)=$ $=(\sum(a_i-b_i)^2)^{1/2}$ es un real pequeño donde $x=(a_1,\dots,a_n)$, $x_0=(b_1,\dots,b_n)$.

Podemos dar en $\mathbb{R}^n$ criterios de cercanía utilizando subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, como por ejemplo:

Sea $x\in\mathbb{R}^n$ y r un real positivo, $B_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^n: d(x,y)<r\}$ y sea $\mathcal{B}=\{B_r(x): r\in\mathbb{R}^+ \text{ y } x\in\mathbb{R}^n\}$.

Diremos ahora que x está cercano a x_0 si $x\in B_r(x_0)$ para r pequeño. Es fácil ver ahora que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es contínua en x_0 si para cada $B_r(f(x_0))$ existe $B_s(x_0)$ tal que $f(B_s(x_0))\subseteq B_r(f(x_0))$. De la misma manera x está "pegado" a $E\subseteq\mathbb{R}^n$ si $B_r(x)\cap E\neq\emptyset$ para todo $r>0$. Resulta que este criterio de cercanía utilizando subconjuntos en $\mathbb{R}^n$ es equivalente al anterior en el que utilizábamos distancia.

En este capítulo trataremos precisamente las condiciones bajo las cuales una colección de subconjuntos definen un "criterio de cercanía" en un conjunto dado.

SECCION 1. Espacios Topológicos.

Intuitivamente una topología en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que nos permitirá decidir cuando un punto $x \in X$ está "pegado" ó "adherido" a un subconjunto E de X.

1.1 - Definición: (a) Una topología en un conjunto X es una familia T de subconjuntos de X que satisface:

(i) $\emptyset \in T$; $X \in T$.

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n \in T$, entonces $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in T$.

(iii) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq T$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \in T$.

(b) Si T es una topología en X a la pareja (X,T) le llamamos espacio topológico y a los elementos que pertenecen a T, conjuntos abiertos en X.

1.2 - Ejemplos:

(1) Sea $X=\{a,b,c\}$, $T=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$, es una topología en X. Verifíquelo. ¿Podría construir una topología en X diferente a T?

(2) Sea X cualquier conjunto. La colección de todos los conjuntos de X, $\mathcal{P}(X)$ satisfacen los axiomas que definen una topología. A esta topología le llamaremos la topología discreta y al conjunto de X con esta topología, espacio discreto. También es fácil verificar que la colección $\{\emptyset, X\}$, es una topología para X. A esta le llamamos la topología indiscreta y al conjunto X con esta topología la llamaremos esp cio indiscreto.

(3) Topología cofinita: Sea X un conjunto cualquiera y T $T=\{\emptyset, X\} \cup \{E \subseteq X : X-E \text{ es finito}\}$. De las fórmulas de De Morgan se desprende que T es una topología en X: La condición (i) en la definición 1.1 se satisface trivialmente. Si $A_1, \ldots, A_n$ son elementos en T, tenemos que

$X-(A_1 \ldots A_n)=(X-A_1)\cup \ldots \cup(X-A_n)$, es un conjunto finito ya que es la unión de una colección finita de conjuntos finitos. Por lo tanto, $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in T$.

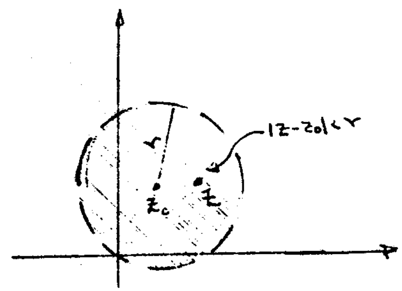
Por último tenemos: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia arbitraria de elementos de T. $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \in T$ ya que $X-\bigcup_{\alpha \in A} A = \bigcap_{\alpha \in A}(X-A_\alpha)$ y como cada $X-A_\alpha$ es finito, resulta que $X-\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ lo es. Por lo tanto T es una topología. A esta topología le llamaremos la topología cofinita en X.

Si X es finito, ¿a qué se reduce la topología cofinita en X?

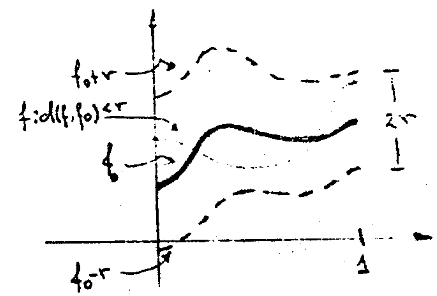
(4) Sea (X,d) un espacio métrico. Podemos generar con la métrica d una topología en X de la forma siguiente:

Para cada punto $x \in X$ y cada real positivo r, sea $B_r(x)=\{y \in X : d(x,y)<r\}$. A este conjunto le llamaremos la bola abierta de radio r con centro en x. (Ver figura 3).

$T_d=\{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E \text{ es unión de bolas abiertas}\}$, es una topología en X que llamaremos la topología de X inducida por la métrica d.



Bola abierta en el plano complejo $B_r(Z_0)$



Bola abierta $B_r(f_0)$ en el espacio $\mathcal{C}([0,1])$ de funciones reales continuas definidas sobre $[0,1]$. La métrica d está definida como $d(f,g)=\sup_{x \in [0,1]}\{|f(x)-g(x)|\}$

Figura 3.

En efecto:

(i) $\emptyset\in T_d$ y como $X=\bigcup_{x\in X} B_r(x)$ para alguna $r>0$, entonces $X\in T_d$.

(ii) Sea $E_1,\ldots,E_n\in T_d$ y $x\in E_1\cap\ldots\cap E_n$ entonces existen $B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2),\ldots,B_{r_n}(x_n)$ tales que $x\in B_{r_i}(x_i)\subseteq E_i, 1\leq i\leq n$.

Así resulta que $x\in B_{r_x}(x)\subseteq E_1\cap\ldots\cap E_n$ donde $r_x=\min\{r_1-d(x,x_1),\ldots,r_n-d(x,x_n)\}$

En efecto si $y\in B_{r_x}(x)$ entonces $d(x_i,y)\leq d(x_i,x)+d(x,y)\leq$ $\leq d(x_i,x)+r_i-d(x_i,x)=r_i$ por lo tanto, $y\in B_{r_i}(x_i)$ $i=1,\ldots,n$, por lo tanto $y\in E_1\cap\ldots\cap E_n$.

Así resulta que $E_1\cap\ldots\cap E_n=\bigcup\{B_{r_x}(x):x\in E_1\cap\ldots\cap E_n\}$ y por lo tanto $E_1\cap\ldots\cap E_n\in T_d$.

(iii) Que la unión de elementos de T_d está en T_d es trivial.

(5) En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, hay una topología de suma importancia que se utiliza en los cursos de Análisis. Es la topología usual $T_{\mathbb{R}}$, definida como:

$T=\{\emptyset\}\cup\{E\subseteq\mathbb{R}: E$ es unión de intervalos abiertos$\}$

Esta es precisamente la topología inducida por la métrica $d(x,y)=|x-y|$.

(6) En general para los espacios Euclidianos $\mathbb{R}^n$, podemos considerar la topología inducida por la métrica:

$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))=\left((x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2\right)^{1/2}$. A esta topología le llamamos la topología usual en $\mathbb{R}^n$ y la denotamos por $T_{\mathbb{R}^n}$

$T_{\mathbb{R}^n}=\{\emptyset\}\cup\{E\subseteq\mathbb{R}^n: E$ es unión de bolas abiertas$\}$

(7) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sea T definida por

$T=\{\emptyset\}\cup\{A\subseteq\mathbb{N}: n\in A\Rightarrow$ todo divisor de n está en $A\}$

T es una topología en $\mathbb{N}$:

(i) $\emptyset\in T$ por definición y obviamente $\mathbb{N}\in T$

(ii) Sean $A_1, A_2\ldots,A_k\in T$, y sea $n\in\bigcap_{i=1}^{k} A_i$. Puesto que $n\in A_i$, $i=1,\ldots,k$, todo divisor de $n\in A_i$ $i=1,\ldots,k$. Luego todo divisor de $n\in\bigcap_{i=1}^{k} A_i$. Por tanto $\bigcap_{i=1}^{k} A_i\in T$.

(iii) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq T$ y sea $n\in\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$. Puesto que $n\in A_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0\in A$, todo divisor de n pertenece a A_{α_0}. En consecuencia, todo divisor de $n\in\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$. Es decir $\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\in T$.

1.3 Teorema: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. $A\subseteq X$ es abierto si y solo si para cada $x\in A$ $\exists$ $B_x\in T$ tal que $x\in B_x\subseteq A$.

La demostración se deja al lector como ejercicio.

SECCION 2. Comparación de Topologías.

Dado un conjunto X, es posible definir siempre alguna topología en X. Por ejemplo, la topología discreta o la indiscreta. En el caso en que el conjunto X posea más de un elemento, entonces la colección de topologías en X consta de más de un elemento. En efecto, en este caso la topología discreta y la indiscreta son diferentes.

Sea $\mathcal{T}(X)=\{T\subseteq\mathcal{P}(X):$ T es una topología en $X\}$.

Podemos definir en $\mathcal{T}$ una relación de orden parcial $\leq$:

$T_1\leq T_2$ si y solo si $T_1\subseteq T_2$

En este caso diremos que T_2 es más fina que T_1 o que T_1 es más gruesa que T_2.

2.1 - Ejemplos:

(1) Si T_1 es la topología discreta en X y T_0 es la indiscreta, entonces para cualquier otra topología T en X se tiene

$T_0\leq T\leq T_1$

(2) Si T es la topología cofinita en $\mathbb{R}$, entonces, la topología usual $T_{\mathbb{R}}$ es más fina que T; es decir $T \leq T_{\mathbb{R}}$.

En efecto, si $A \in T \Rightarrow \mathbb{R}-A$ es un conjunto finito, digamos $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Para cada $x \in A$, sea $r_x = \min\{|x-x_1|,\ldots,|x-x_n|\}$, resulta entonces que

$$(x-r_x, x+r_x) \cap \{x_1,\ldots,x_n\} = \emptyset$$

por lo tanto, el intervalo abierto $(x-r_x, x+r_x)$ está contenido en A. Entonces,

$$A = \bigcup_{x\in A}(x-r_x, x+r_x)$$

y A es un elemento en $T_{\mathbb{R}}$.

(3) Siguiendo el ejemplo anterior, se puede demostrar que la topología cofinita en cualquier espacio métrico es más gruesa que la topología inducida por la métrica. De aquí resulta que en cualquier conjunto finito X, si d es una métrica para X entonces la topología cofinita, la topología inducida por la métrica y la topología discreta coinciden. Demuéstrelo.

(4) Sea $X=\{a,b,c\}$. Se puede verificar fácilmente que $T_1=\{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$, $T_2=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ y $T_3=\{\emptyset, \{a\}, X\}$ son tres topologías en X. Resulta claro que $T_3 \leq T_2$, $T_3 \leq T_1$, pero T_1 y T_2 están relacionadas. En efecto, el conjunto $(\mathcal{T}, \leq)$ no es en general totalmente ordenado.

<u>2.2</u> - Denotemos por $C[0,1]$ al conjunto de funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0,1]$. Si $f \in C[0,1]$ y r es un real positivo, sea $B_r(f) = \{g \in C[0,1] : \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| < r\}$

La colección $T_{d_\infty} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq C[0,1] :$ E es unión de conjuntos de la forma $B_r(f)\}$ es una topología en $C[0,1]$. De hecho es la topología inducida por la métrica

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$$

(Ver 1.2 inciso 4 y figura 3)

d_∞ es en efecto una métrica en $C[0,1]$. Verifiquemos:

(a) $d_\infty(f,g) \geq 0 \ \forall f,g \in C[0,1]$

y $d_\infty(f,g)=0$ si y solo si $f=g$ se satisfacen obviamente.

(b) $d_\infty(f,g)=d_\infty(g,f)$ ya que $|f(x)-g(x)|=|g(x)-f(x)|$

(c) $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ pues $|f(x)-h(x)| \leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$ para cada $x \in [0,1]$ y

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x)-h(x) \leq \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|g(x)-h(x)|$$

por la desigualdad del triángulo del valor absoluto en $\mathbb{R}$ y el hecho de que

$$\sup_{x\in[0,1]}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in[0,1]} f(x) + \sup_{x\in[0,1]} g(x)$$

¿Podría dar un ejemplo de funciones $f,g \in C[0,1]$ para los cuales esta última desigualdad se cumpla estrictamente? Intente con

$f(x)=x$, $g(x)=1-x$.

El espacio topológico $(C[0,1], T_{d_\infty})$ (el espacio métrico $(C[0,1], d_\infty)$), es denotado como $L^\infty(C[0,1])$.

Obtenemos una topología diferente en $C[0,1]$ si definimos la métrica $d_2(f,g) = \left[\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx\right]^{1/2}$, en donde $\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx$ es la integral de Riemann de la función $(f(x)-g(x))^2$ en el intervalo $[0,1]$. Observe que no es problema la existencia de esta integral, pues estamos tratando con funciones contínuas.

Verificaremos que d_2 satisface la desigualdad triangular. Las otras propiedades de la métrica las puede verificar el lector.

La demostración de la desigualdad triangular para d_2, está basada en la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales:

$$\int u(t)v(t)dt \leq \left[\int u^2(t)dt \cdot \int v^2(t)dt\right]^{1/2}$$

(Intente probarla: Parta de $\int (u-\lambda v)^2 \geq 0$ y considere

$\lambda = \dfrac{\int uv}{\int v^2}$)

Tenemos pues que

$$[d_2(f,h)]^2 = \int_0^1 (f(x)-h(x))^2dx =$$
$$= \int_0^1 (f(x)-g(x)+g(x)-h(x))^2dx =$$
$$= \int_0^1 (f(x)-g(x))^2dx + \int_0^1 (g(x)-h(x))^2dx +$$
$$+2\int_0^1 (f(x)-g(x))(g(x)-h(x))dx$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $u=f(x)-g(x)$, $v=g(x)-h(x)$, resulta que $[d_2(f,h)]^2 \le [d_2(f,g)]^2 + [d_2(g,h)]^2 + 2([d_2(f,g)]^2 . [d_2(g,h)]^2)^{1/2} = [d_2(f,g)+d_2(g,h)]^2$

Como todas las cantidades involucradas son positivas, resulta, $d_2(f,h) \le d_2(f,g)+d_2(g,h)$, que es lo que queríamos demostrar..

El espacio $C[0,1]$ con la métrica d_2 (con la topología T_{d_2}) es conocido como $L^2(C[0,1])$.

2.3 Hemos considerado en 2.2, dos topologías para el conjunto $C[0,1]$. ¿Existirá alguna relación de contención entre ellas? La respuesta es sí. Vamos a demostrar que $T_{d_2} \subsetneq T_{d_\infty}$: denotaremos por $B_r^{d_2}(f)$ y $B_r^{d_\infty}(f)$ a las bolas abiertas en $L^2(C[0,1])$ y $L^\infty(C[0,1])$ respectivamente. Para demostrar que $T_{d_2} \subseteq T_{d_\infty}$ basta con verificar que toda bola abierta $B_r^{d_2}(f)$ es un conjunto abierto en $L^\infty(C[0,1])$. (¿Por qué?).

Sea $f \in C[0,1]$ y r un real positivo, y sea $g \in B_r^{d_2}(f)$ arbitrario.

Sea $r_g = r - d_2(f,g)$ por lo tanto $B_{r_g}^{d_2}(g) \subseteq B_r^{d_2}(f)$

Por otro lado tenemos que

$d_2(h,g) = [\int_0^1 (h(x)-g(x))^2]^{1/2} \le [\int_0^1 (\sup_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)|)^2dx]^{1/2} = \sup_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)| = d_\infty(h,g)$. Por lo tanto, $B_{r_g}^{d_\infty}(g) \subseteq B_{r_g}^{d_2}(g) \subseteq B_r^{d_2}(f)$

y así tenemos que $B_r^{d_2}(f) = \bigcup \{B_{r_g}^{d_\infty}(g) : g \in B_r^{d_2}(f)\}$, por lo tanto $B_r^{d_2}(f) \in T_{d_\infty}$, es decir $T_{d_2} \le T_d$ -

Intuitivamente esto significa que si g es "próximo" a f en $L^\infty(C[0,1])$, entonces g es "próximo" a f en $L^2(C[0,1])$. Por el contrario puntos muy cercanos a un punto f en $L^2(C[0,1])$, pueden no ser próximos en $L^\infty(C[0,1])$. Por ejemplo sea

$$\text{sea } g_n(x) = \begin{cases} 1-nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Es trivial verificar que g_n es continua en $[0,1]$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. (Ver figura 4). Sea f la función idénticamente cero. Entonces $d_2(f,g_n) = [\int_0^1 (f(x)-g_n(x))^2dx]^{1/2} = [\frac{1}{3n}]^{1/2}$, en tanto que $d_\infty(f,g_n)=1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir g_n es muy cercana a f en $L^2(C[0,1])$ con solo tomar n suficientemente grande. En cambio en $L^\infty(C[0,1])$ podemos decir que para cualesquiera n, m en $\mathbb{N}$, g_n está tan "próximo" o tan "lejano" a f como g_m.

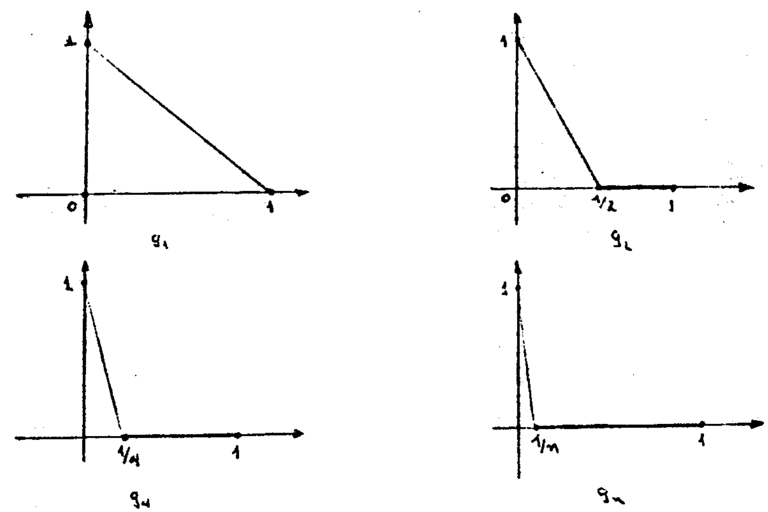


Figura 4.

SECCION 3. Conjuntos Cerrados.

Sea (X,T) un espacio topológico. A los elementos de T les hemos llamado conjuntos abiertos de X, a sus complementos les llamaremos conjuntos cerrados, es decir:

3.1 - Definición: $E \subseteq X$ es cerrado en X si y solamente si $X-E$ es abierto $(X-E \in T)$.

3.2 - Teorema: Sea (X,T) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ la familia de conjuntos cerrados en X, entonces:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{F}$

(ii) Si $F_1,\ldots,F_n \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$

(iii) Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Demostración: Este resultado es una consecuencia de las definiciones 1.1 y 3.1 y de las relaciones siguientes:

$$X-\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X-A_\alpha)$$

$$X-\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X-A_\alpha)$$

3.3 - Ejemplos:

1.- Como el complemento de cualquier conjunto en X es un conjunto de X, entonces la familia de cerrados en el espacio discreto coincide con $\mathcal{P}(X)$. En cambio si X posee la topología indiscreta, los únicos cerrados en X son $\emptyset$ y X.

2.- Si T es la topología cofinita en X entonces es claro que $F \subseteq X$ es cerrado si y solo si $F=\emptyset$ o $F=X$ o F finito.

3.- Un subconjunto de un espacio topológico (X,T) puede ser abierto y cerrado, como es el caso de cualquier subconjunto de X cuando T es la topología discreta. Incluso para cualquier espacio topológico (X,T) X y $\emptyset$ son siempre, al mismo tiempo, cerrados y abiertos.

4.- Un subconjunto E de un espacio topológico puede no ser ni abierto, ni cerrado. Por ejemplo, cualquier subconjunto propio de un espacio indiscreto.

SECCION 4. Bases y Sub-bases.

Como se puede apreciar de la definición 3.1, cada vez que tengamos una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X, que satisfaga las propiedades (i), (ii), (iii) del Teorema 3.2, podemos generar una topología T en X tal que $\mathcal{F}$ sea precisamente la familia de subconjuntos cerrados de (X,T). En efecto, esto se satisface tomando $T=\{X-F : F \in \mathcal{F}\}$

No es ésta la única forma de generar topologías en X a partir de una colección de subconjuntos. En esta sección hablaremos un poco al respecto.

4.1 - Teorema: Consideremos una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisface

(i) $X=\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$

(ii) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces $T_{\mathcal{B}} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E$ es unión de elementos de $\mathcal{B}\}$ es una topología en X.

Demostración: $\emptyset \in T_{\mathcal{B}}$ por construcción y $X \in T_{\mathcal{B}}$ por (i). La condición (iii) en 1.1 se satisface trivialmente.

Sean $A_1,\ldots,A_n \in T_{\mathcal{B}}$. Para cada $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$, existen $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \cap \cdots \cap B_n$ y $B_i \subseteq A_i$ para $i=1,\ldots,n$. (Esto ya que cada A_i es unión de elementos en $\mathcal{B}$). De (ii) podemos encontrar un elemento de $\mathcal{B}$, B_x tal que $x \in B_x \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_n$. Y ahora es facil ver que $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcup\{B_x : x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n\}$

es decir, en efecto $A_1 \cap \dots \cap A_n \in T_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto $T_{\mathcal{B}}$ es una topología en X.

4.2 Definición: Sea (X,T) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B} \subseteq T$ es una base en X para la topología T si cualquier elemento de T diferente del vacio, es unión de elementos que pertenecen a $\mathcal{B}$.

4.3 Observaciones: (a) De la definición anterior, resulta que cualquier colección $\mathcal{B}$ que satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 4.1, es una base de la topología $T_{\mathcal{B}}$.

(b) Si T es una topología en X, siempre podemos hallar una subcolección $\mathcal{B} \subseteq T$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de la topología T. En particular T es una base de ella misma.

(c) Del Teorema 1.3 y de la definición anterior tenemos que $A \subseteq X$ es abierto si y solo si para cada punto $x \in A \ \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$.

4.4 Ejemplos:

1.- En los ejemplos 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6 la colección de bolas abiertas (intervalos abiertos en el caso $X=\mathbb{R}$, discos abiertos en el caso $X=\mathbb{R}^2$), resulta ser una base para las topologías ahí definidas.

Si (X,d) es un espacio métrico y $\mathcal{B}$ es la colección de bolas abiertas, entonces la topología inducida por la métrica d, coincide con la topología generada por $\mathcal{B}$, es decir $T_d=T_{\mathcal{B}}$

2.- Sea C([0,1]) el conjunto de funciones reales contínuas definidas en [0,1]. Para cada $f\in C([0,1])$ y cada conjunto finito $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$ y $r>0$ sea

$$B_{(x_1,\dots,x_n,r)}(f)=\{g\in C([0,1]) : |g(x_i)-f(x_i)|<r,\ i=1,\dots,n\}. \qquad (1)$$

Resulta que $C([0,1])=\bigcup\{B_{(x_1,\dots,x_n,r)}(f) : f\in C([0,1]), x_1,\dots,x_n\in[0,1], r>0\}$ ya que en particular cada f es elemento

de $B_{(x_1,\dots,x_n,r)}(f)$ para cualesquiera que sean $x_1,\dots,x_n$ y r.

Consideremos ahora dos conjuntos de la forma (1) $B_{(x_1,\dots,x_n,r_1)}(f)$, $B_{(y_1,\dots,y_m,r_2)}(g)$. Sea $h\in B_{(x_1,\dots,x_n,r_1)}(f)\cap B_{(y_1,\dots,y_m,r_2)}(g)$ es decir $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ es continua y

$\varepsilon_1'=|h(x_1)-f(x_1)|<r_1,\dots,\varepsilon_n'=|h(x_n)-f(x_n)|<r_1$

$\delta_1'=|h(y_1)-g(y_1)|<r_2,\dots,\delta_m'=|h(y_m)-g(y_m)|<r_2$

Sea $\varepsilon_i=r_1-\varepsilon_i'$, $\delta_j=r_2-\delta_j'$ con $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$, ε_i y δ_j son positivos para todo $i=1,\dots,n$ y para todo $j=1,\dots,m$.

Sea $0<r<\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\delta_1,\dots,\delta_m\}$

Ahora resulta que

$$B_{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,r)}(h)\subseteq B_{(x_1,\dots,x_n,r)}(f)\cap B_{(y_1,\dots,y_m,r_2)}(g)$$

En efecto si $h'\in B_{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,r)}(h)$, entonces

$|h'(x_i)-f(x_i)|\le|h_1(x_i)-h(x_i)|+|h(x_i)-f(x_i)|\le$

$\le r+|h(x_i)-f(x_i)|<r_1-|h(x_i)-f(x_i)|+|h(x_i)-f(x_i)|=$

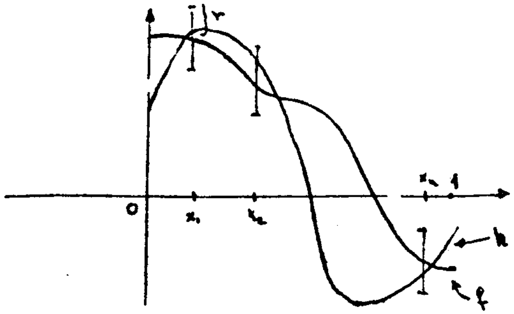
$=r_1$ por lo tanto $h'\in B_{(x_1,\dots,x_n,r_1)}(f)$.

De manera análoga $h'\in B_{(y_1,\dots,y_m,r_2)}(g)$.

Del Teorema 4.1 resulta que $T=\{\emptyset\}\cup\{E\subseteq C[0,1] : E$ es unión de conjuntos de la forma $B_{(x_1,\dots,x_n,r)}(f)\}$ es una topología. (Ver figura 5.)

3.- Una base para el espacio discreto X es la colección $\{\{x\}:x\in X\}$

Para la topología indiscreta existe una única base: $\mathcal{B}=\{X\}$



En este diagrama se muestra un elemento h en

$B_{(x_1,\dots,x_n,r)}(f)$

Figura 5.

4.5 Teorema. Sea (X,T) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq T$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{B}$ es base de T

(ii) Para todo $x \in X$ y $A \in T$ tal que $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b): Sea $x \in X$ y $A \in T$ con $x \in A$, como $\mathcal{B}$ es base de T, resulta que existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}'\}$ Por lo tanto existe $B_o \in \mathcal{B}'$ (y naturalmente en $\mathcal{B}$) tal que $x \in B_o \subseteq A$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Vamos á demostrar ahora que si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X que satisface la propiedad (b), entonces todo elemento $A \in T$ es unión de elementos en $\mathcal{B}$.

Sea $A \in T$. Para cada $x \in X$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. Así resulta que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base de T.

4.6 Observación: Del Teorema 4.5 resulta que si $\mathcal{B}$ es una base para el espacio discreto, entonces $\{\{x\} : x \in X\} \subseteq \mathcal{B}$

Dada una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X podemos generar siempre una topología en X de la siguiente forma: Consideramos la familia $\mathcal{B}$ de intersecciones de subcolecciones finitas de $\mathcal{S}$, e incluimos como elemento de $\mathcal{B}$ al conjunto X. Resulta ahora que las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$ unión $\{\emptyset\}$, forma una topolofía $T_{\mathcal{S}}$. Aqui $\mathcal{B}$ es una base para $T_{\mathcal{S}}$.

4.7 Definición: Si (X,T) es un espacio topológico, una subcolección $\mathcal{S} \subseteq T$, es una sub-base para T si la familia de intersecciones de subcolecciones finitas de $\mathcal{S}$ unión $\{X\}$ forma una base para T.

Asi resulta que dada cualquier colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, $\mathcal{S}$ es sub-base de la topología $T_{\mathcal{S}}$.

4.8 Ejemplos:

1.- Dado (X,T) un espacio topológico, la topología T, ella misma, es una sub-base de T, y si $\mathcal{B}$ es base de T, entonces también es sub-base de T.

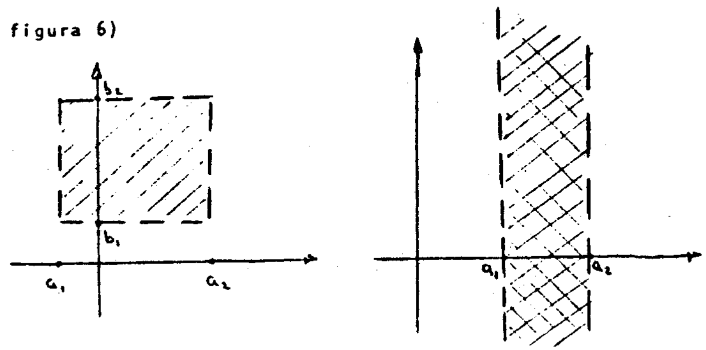
2.- Si $T_{\mathbb{R}}$ es la topología usual en $\mathbb{R}$, entonces la colección de todas las semirectas $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, forman una sub-base para $T_{\mathbb{R}}$, ya que las intersecciones finitas de conjuntos de está forma generan todos los intervalos abiertos que forman una base para $T_{\mathbb{R}}$ (ver ejemplo 4.4.1).

3.- Una base para la topología usual en $\mathbb{R}^2$ está dada por los rectángulos abiertos, es decir, por la colección de subconjuntos, de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{(x,y) : a_1 < x < a_2; b_1 < y < b_2\}$ (ver ejercicio 4.2). De tal manera que una sub-base para la topología usual en $\mathbb{R}^2$ está dada por los conjuntos de la forma

$\{(x,y): a_1 < x < a_2,\ y \in \mathbb{R}\}$

y $\{(x,y): x \in \mathbb{R},\ b_1 < y < b_2\}$

(ver figura 6)



A la izquierda un cuadrado abierto. La colección de éstos forma una base para la topología usual en $\mathbb{R}^2$. A la derecha un elemento de sub-base para esta topología.

Figura 6.

4.- Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Si para cada $a \in X$ definimos los conjuntos $L_a = \{x \in X : x < a\}$ y $L^a = \{x \in X : x > a\}$ entonces la colección $S = \{L_a : a \in X\} \cup \{L^a : a \in X\}$ es una sub-base para una topología que llamaremos topología inducida por el orden.

Observe en el ejemplo 4.8.2 que $T_{\mathbb{R}}$ es precisamente la topología del orden en $\mathbb{R}$.

<u>4.9 - Definición</u> - Sea x un elemento del espacio topológico (X,T). $V \subseteq X$ es una vecindad de x si existe $A \in T$ tal que $x \in A \subseteq V$.

A la colección de vecindades de x le llamamos sistema de vecindades de x y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.

De la definición de vecindad de un punto, resulta en particular, que todo abierto es vecindad de cualquiera de sus puntos.

<u>4.10 - Teorema</u> - Un subconjunto E de un espacio topológico X es abierto si y solo si para cada $x \in E$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subseteq E$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que E es abierto, así E resulta ser vecindad de cada uno de sus puntos. Así si $x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$ y $E \subseteq E$.

Inversamente, supongamos que para cada punto $x \in E$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subseteq E$. Resulta por definición que para cada V_x existe un abierto B_x tal que $x \in B_x \subseteq V_x$. Resulta ahora facil ver que $E = \bigcup_{x \in E} B_x$, lo que significa que E es abierto en X. o

Para conocer todas las vecindades de un punto x en un espacio topológico (X,T), es suficiente conocer parte de la colección de sus vecindades.

<u>4.11 - Definición</u>.- Sea (X,T) un espacio topológico y $x \in X$. Una base de vecindades de x, es una colección $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{V}(x)$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}(x)$, podemos encontrar $B_V \in \mathcal{B}_x$ con $B_V \subseteq V$.

En particular, todos los abiertos que contienen a x, forman una base para $\mathcal{V}(x)$.

<u>4.12 Observaciones:</u>

(a) Si $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades de x, entonces $\mathcal{V}(x) = \{E \subseteq X : \exists\, B \in \mathcal{B}_x \text{ con } E \supseteq B\}$.

(b) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología T, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una base de vecindades de x. Así por ejemplo, en $(\mathbb{R}, T_{\mathbb{R}})$ para que un subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ sea vecindad de un punto x es suficiente y necesario que haya un intervalo abierto (a,b) tal que $x \in (a,b) \subseteq V$.

<u>4.13 Ejemplos</u>: 1.- Sea (X,d) un espacio métrico y T_d la topología definida por la métrica d. (ver ejemplo 1.2.4). Si $x \in X$

y V vecindad de x entonces existe $A \in T_d$ tal que $x \in A \subseteq V$. Los elementos de T_d son uniones de bolas abiertas, es decir, de conjuntos de la forma $B_r(y) = \{z \in X : d(y,z) < r\}$. Asi que debe existir $y \in X$ y r real positivo tal que $x \in B_r(y) \subseteq A \subseteq V$. Sea r_o un racional estrictamente positivo tal que $r_o < r - d(x,y)$. Resulta entonces que

$$x \in B_{r_o}(x) \subseteq B_r(y) \subseteq A \subseteq V$$

Asi podemos deducir que las bolas abiertas centrada en x y de radio racional, forman una base del sistema de vecindades de x.

Observación: Del teorema 4.10 y de la definición de base de vecindades, resulta que $E \subseteq X$ es abierto si y solo si para cada punto $x \in E$ existe un elemento B de una base de vecindades para x tal que $x \in B \subseteq E$.

4.14 - Teorema - Sea X un espacio topológico y para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}_x$ una base de vecindades en x:

(i) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.

(ii) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$$

(iii) Si $V \in \mathcal{B}_x$, hay algun $V_o \in \mathcal{B}_x$ tal que si $y \in V_o$ entonces existe $W \in \mathcal{B}_y$ con $W \subseteq V$, donde $\mathcal{B}_y$ es una base del sistema de vecindades de y.

Demostración: (i) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces V es una vecindad de x y por la definción de vecindad, $x \in V$.

(ii) Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$. Por definición de vecindad existen A_1 y A_2 abiertos tales que $x \in A_1 \subseteq V_1$, $x \in A_2 \subseteq V_2$. Asi $x \in A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto y por lo tanto una vecindad de x. Por lo tanto existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_3 \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq V_1 \cap V_2$.

(iii) Sea $V \in \mathcal{B}_x$. Existe un abierto A tal que $x \in A \subseteq V$ (siempre la definición de vecindad). Como A es abierto que contiene a x, A es una vecindad de x. Por lo tanto existe $V_o \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_o \subseteq A$. Si $y \in V_o$ entonces $y \in A$ y A es una vecindad de y, por lo tanto existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $y \in W \subseteq A \subseteq V$. o

Si para cada elemento x de un conjunto X, existe una familia de subconjuntos $\mathcal{B}_x$ que satisfacen las propiedades (i), (ii) y (iii) del Teorema anterior, entonces podemos generar una topología en X de la siguiente manera:

4.15 - Teorema - $T = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X$: para cada $x \in E$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subseteq E\}$ es una topología en X y cada $\mathcal{B}_x$ resulta ser una base de vecindades de x para esta topología.

Demostración: Por la propiedad (i) resulta que $X \in T$. Ahora bien, si $E_1, \ldots, E_n \in T$ y $x \in E_1 \cap \ldots \cap E_n$, entonces como $x \in E_1, \ldots, E_n$ existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_1 \subseteq E_1, \ldots, V_n \subseteq E_n$. De la propiedad (ii) resulta que existe $V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subseteq V_1 \cap \ldots \cap V_n \subseteq E_1 \cap \ldots \cap E_n$. Por lo tanto $E_1 \cap \ldots \cap E_n \in T$.

Es facil comprobar que la unión de elementos en T está en T. Por lo tanto T es una topología para el conjunto X.

Sea ahora V una vecindad de un punto x para esta topología. Por definición de vecindad, V contiene un elemento $E \in T$ tal que $x \in E$. Asi existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_x \subseteq E \subseteq V$, por lo tanto $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades de x.

4.16 Observación: Con respecto a la topología T definida en el Teorema anterior, si $E \in T$ y $E \neq \emptyset$, para cada $x \in E$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_x \subseteq E$. Asi resulta que $E = \bigcup\{V_x : x \in E\}$. Por lo tanto si

$\mathcal{B}=\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{B}_\alpha$ $T=\{\emptyset\}\cup\{E\subseteq X : E$ es unión de elementos en $\mathcal{B}\}$.

De tal manera que $\mathcal{B}$ es una base para la topología T.

SECCION 5. Operadores.

5.1 Definición. 1.- Punto límite o punto de acumulación: Sea (X,T) un espacio topológico, decimos que $x\in X$ es un punto límite de un subconjunto E si todo conjunto abierto conteniendo x, contiene un punto de E diferente de x. Esto es, si $x\in G\in T$, entonces $E\cap G-\{x\}\neq\emptyset$.

2.- El conjunto derivado de E, que denotaremos por $d(E)$, es el conjunto de todos los puntos límites de E.

3.- Un punto x en E es punto aislado de E si $x\in E-d(E)$-

5.2 Ejemplos:

1.- Sea (X,T) el espacio discreto, entonces cada conjunto formado por un solo punto, es un conjunto abierto y por lo tanto el derivado de cualquier subconjunto E es vacio, pues

$$E\cap\{x\}-\{x\}=\emptyset$$

Así resulta que todo punto en E es punto aislado.

2.- Consideremos ahora un subconjunto E de un espacio indiscreto X. El único conjunto abierto conteniendo x es X de tal manera que para $E\subseteq X$ se tiene

$$d(E)=\begin{cases} X \text{ si E tiene más de un punto} \\ X-E \text{ si E tiene solo un punto}\end{cases}$$

(¡Verifíquelo!) (¿Cuáles son los puntos aislados de E?)

3.- Sea (X,T) el espacio del ejemplo 1.2.3 con X infinito. Sea $E\subseteq X$ diferente del vacio, entonces

$$d(E)=\begin{cases} \emptyset \text{ si E es finito} \\ X \text{ si E es infinito}\end{cases}$$

y por lo tanto todo punto en E es punto aislado si E es finito y no tiene puntos aislados si E es infinito.

En efecto: Si $E=\{x_1,\dots,x_n\}$ entonces para cualquier $x\in X$, $A=X-E\cup\{x\}$ es un abierto que contiene a x y $A-\{x\}\cap E=\emptyset$ por lo tanto $x\notin d(E)$ es decir $d(E)=\emptyset$. Si por el contrario, E es infinito, para cada $x\in X$ y cada abierto A que contiene a x se tiene X-A es finito por lo tanto $E\cap A-\{x\}\neq\emptyset$ es decir $d(E)=X$.

4.- Sea $\mathcal{S}=(X,T)$ donde $X=\{0,1\}$ y $T=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$. $\mathcal{S}$ es conocido como el espacio de Sierpinski. El único abierto que contiene a 1 es $\{0,1\}$, por lo tanto es facil ver que $d(\{0\})=\{1\}$ y $d(\{1\})=\emptyset$.

5.3 Definición: Sea X un conjunto. Un operador en X es una función $\eta:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$

En particular $d:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ dado por $E\to d(E)$ es un operador.

5.4 Teorema: Si A,B y E son subconjuntos del espacio topológico (X,T), entonces

(i) $d(\emptyset)=\emptyset$

(ii) Si $A\subseteq B$, $d(A)\subseteq d(B)$

(iii) Si $x\in d(E)\Rightarrow x\in d(E-\{x\})$

(iv) $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$

Demostración:

(i) $d(\emptyset)=\emptyset$ es verdadera ya que $\emptyset\cap G-\{x\}=\emptyset$ para todo $x\in X$ y todo abierto G.

(ii) Si $A\subseteq B$ entonces $d(A)\subseteq d(B)$, pues $A\cap G-\{x\}\subseteq B\cap G-\{x\}$ y si $A\cap G-\{x\}\neq\emptyset$ entonces $B\cap G-\{x\}\neq\emptyset$.

(iii) $E-\{x\}\cap G-\{x\}=E\cap G-\{x\}$ por lo tanto si $x\in d(E)$, $x\in d(E-\{x\})$.

(iv) Si $x \notin d(A) \cup d(B)$ entonces existen abiertos G_1 y G_2 conteniendo a x tales que $A \cap G_1 - \{x\} = \emptyset$ y $B \cap G_2 - \{x\} = \emptyset$. Entonces $G = G_1 \cap G_2$ es un abierto que contiene a x y $(A \cup B) \cap G - \{x\} = \emptyset$, de modo que $x \notin d(A \cup B)$. Por lo tanto $d(A \cup B) \subseteq dA \cup dB$. La otra contención resulta de (ii). O

A cualquier operador $\eta: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que satisface las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) se le llamaré operador derivado.

<u>5.5 - Teorema</u> - Sea (X,T) un espacio topológico, $E \subseteq X$ es cerrado si y solo si $d(E) \subseteq E$.

<u>Demostración</u>: Vamos a demostrar la proposición equivalente: $E \subseteq X$ no es cerrado si y solo si $d(E) \cap X - E \neq \emptyset$. En efecto, supongamos que $E \subseteq X$ no es cerrado entonces $X - E$ no es abierto. De la proposición 1.3 resulta entonces que existe $x \in X - E$ tal que para cualquier abierto G que contiene a x, $E \cap G \neq \emptyset$ es decir $x \in d(E)$ esto implica que $d(E) \cap X - E \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que $d(E) \cap (X-E) \neq \emptyset$. Sea $x \in d(E) \cap (X-E)$ como $x \in d(E)$, dado cualquier abierto G conteniendo x, $G \cap E \neq \emptyset$ es decir no existe ningún abierto A en X tal que $x \in A \subseteq X - E$ por lo tanto del Teorema 1.3 resulta que $X-E$ no es abierto; es decir, E no es cerrado.

<u>5.6 Corolario</u>. Sea $E \subseteq X$ arbitrario y $F \subseteq X$ cerrado tal que $E \subseteq F$, entonces

(i) $d(E) \subseteq F$

(ii) $d(d(E)) \subseteq d(E) \cup E$

(iii) $E \cup d(E)$ es cerrado

<u>Demostración</u>:

(i) Como $E \subseteq F$, $d(E) \subseteq d(F)$, pero F es cerrado, así $d(F) \subseteq F$, por lo tanto $d(E) \subseteq F$.

(ii) Si $x \in d(d(E)) - E$ esto implica que si G es un abierto conteniendo a x entonces $G - \{x\} \cap d(E) \neq \emptyset$ así si $y \in G - \{x\} \cap d(E)$ como $y \in d(E)$ y G es abierto que lo contiene entonces $G - \{y\} \cap E \neq \emptyset$. Como $x \notin E$ existe $z \in G - \{y\} \cap E$ tal que $z \neq x$ por lo tanto $z \in G - \{x\} \cap E$ es decir $x \in d(E)$.

(iii) De 5.4 y del inciso (ii) se tiene $d(E \cup d(E)) \subseteq d(E) \cup d(d(E)) \subseteq d(E) \cup d(E) \cup E = E \cup d(E)$, por lo tanto por 5.3 $E \cup d(E)$ es cerrado.

<u>5.7 Definición</u>: La cerradura de un conjunto E contenido en un espacio topológico (X,T) es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a E. La denotaremos por $c(E)$. Es decir si $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ es la colección de todos los subconjuntos cerrados de X conteniendo E, entonces $c(E) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$.

Observe del Teorema 3.2 (iii), $c(E)$ es un conjunto cerrado y <u>es el menor de los cerrados que contienen a E</u>.

<u>5.8 Teorema</u>: Sea (X,T) un espacio topológico y $E \subseteq X$. Entonces

(i) $c(E)$ es cerrado

(ii) Si F es un cerrado que contiene a E, entonces $E \subseteq c(E) \subseteq F$

(iii) E es cerrado si y solo si $E = c(E)$.

<u>Demostración</u>: Es obvio de la definición.

<u>5.9 Ejemplos</u>:

1.- Sea (X,T) un espacio donde $X = \{a,b,c,d,e\}$ y $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ (Verifique que T es una topología en X).

Los subconjuntos cerrados en X son $\emptyset$, X, $\{b,c,d,e\}$, $\{a,b,e\}$, $\{b,e\}$ y $\{a\}$. Así el menor cerrado que contiene a b es $\{b,e\}$, es decir $c(\{b\}) = \{b,e\}$. De la misma forma tenemos por ejemplo

$c(\{a,c\}) = X$ y $c(\{b,d\}) = \{b,c,d,e\}$

2.- Sea (X,T) donde T es la topología cofinita (ver ejemplo 1.2.2). Los conjuntos cerrados son los subconjuntos finitos de X, X y $\emptyset$. Por lo tanto si $A\subseteq X$, $c(A)=\begin{cases} A \text{ si } A \text{ es finito} \\ X \text{ si } A \text{ es infinito}\end{cases}$

<u>5.10 Teorema</u>: Para cualquier conjunto E en un espacio (X,T), $c(E)=E\cup d(E)$.

Demostración: Como $E\subseteq c(E)$ y $c(E)$ es cerrado, entonces por Teoremas 5.4 y 5.5 $d(E)\subseteq d(c(E))\subseteq c(E)$ asi tenemos que $E\cup d(E)\subseteq c(E)$.

Como $E\cup d(E)$ es un cerrado que contiene a E, entonces $c(E)\subseteq E\cup d(E)$. Por lo tanto $c(E)=E\cup d(E)$.

<u>5.11 Ejemplo</u>. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, el conjunto de racionales. Para cualquier intervalo abierto (a,b), $\mathbb{Q}\cap(a,b)$ es un conjunto infinito, de tal manera que cualquier real $x\in\mathbb{R}$ satisface $(a,b)-\{x\}\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ para cualquier intervalo (a,b) que contenga a x. Es decir $d(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$. Por lo tanto $c(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

<u>5.12 Definición</u>: Sea (X,T) un espacio topológico. Un punto $x\in X$ es un punto adherente de $E\subseteq X$ si y solo si $x\in c(E)$.

Del Teorema 5.10 resulta que un punto $x\in X$ es adherente de E si $x\in E$ o $x\in d(E)$. Asi del ejemplo 5.11 resulta que todo $x\in\mathbb{R}$ es adherente a $\mathbb{Q}$.

Es facil probar que:

<u>5.13 Teorema</u>: $x\in X$ es adherente a E si y solo si todo abierto que contiene a x, intersecta a E.

<u>5.14 Definición</u>: Un operador cerradura es una función $\eta:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ que satisface (los llamados axiomas de cerradura de Kuratowski):

(i) $\eta(\emptyset)=\emptyset$

(ii) $E\subseteq\eta(E)$

(iii) $\eta(\eta(E))=\eta(E)$

(iv) $\eta(A\cup B)=\eta(A)\cup\eta(B)$

Es facil constatar que la función $E\to c(E)$ es un operador cerradura.

<u>5.15 Definición</u>: Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. El interior de E es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en E. Será denotado por $i(E)$. A los puntos que pertenecen a $i(E)$ les llamamos puntos interiores de E.

De la defínción resulta obvio que:

<u>5.16 Teorema</u>: (i) $i(E)$ es abierto

(ii) $i(E)$ es el mayor abierto contenido en E.

(iii) E es abierto si y solo si $E=i(E)$.

<u>5.17 Teorema</u>: Sea (X,T) un espacio topológico y A, B, E subconjuntos de X, entonces

(i) $i(X)=X$

(ii) $i(E)\subseteq E$

(iii) $i(i(E))=i(E)$

(iv) $i(A\cap B)=i(A)\cap i(B)$

<u>Demostración</u>: (i) resulta de 5.16 (iii). (ii) es inmediato de la definición. (iii) resulta de 5.16 (i) y (iii). (iv): Como $A\cap B\subseteq A$ y $A\cap B\subseteq B$ entonces de (ii) $i(A\cap B)\subseteq i(A)\cap i(B)$. Por otro lado $i(A)\cap i(B)\subseteq A\cap B$ y es un abierto, por lo tanto $i(A)\cap i(B)\subseteq i(A\cap B)$ y la igualdad se tiene.

Cualquier operador en X que satisfaga las propiedades (i), (ii), (iii), (iv) del Teorema anterior es llamado operador interior.

<u>5.18 Observación</u>: De la definición 5.16 y de las proposiciones 1.3 y 5.16 (i) tenemos que un punto $x\in E$ es punto interior de E si existe un abierto G tal que $x\in G\subseteq E$.

El siguiente Teorema relaciona los conceptos de interior y cerradura.

5.19 Teorema: Para cualquier subconjunto E en un espacio topológico (X,T), $i(E)=X-c(X-E)$ que es equivalente a $c(E)=X-i(X-E)$.

Demostración: Sea $x\in i(E)$. $i(E)$ es un abierto que contiene a x y que no intersecta a X-E, es decir $(X-E)\cap i(E)-\{x\}=\emptyset$. Por lo tanto $x\notin d(X-E)$. Ahora, $x\notin X-E$, entonces $x\notin X-E\cup d(X-E)=c(X-E)$. Por lo tanto $x\in X-c(X-E)$ y asi $i(E)\subseteq X-c(X-E)$.

Por otra parte, si $x\in X-c(X-E)$ entonces $x\notin c(X-E)$ y $x\notin X-E$. Esto quiere decir que $x\in E$ y existe un abierto G tal que $x\in G$ y $(X-E)\cap G-\{x\}=\emptyset$. Puesto que $x\notin X-E$, se tiene que $X-E\cap G=\emptyset$, asi $G\subseteq E$. De la observación 5.19 resulta que $x\in i(E)$. Asi tenemos $X-c(X-E)=i(E)$.

5.20 Definición: (a) Sea (X,T) un espacio topológico. El exterior de $E\subseteq X$, denotado por $e(E)$, es el conjunto de puntos interiores del complemento de E, es decir $e(E)=i(X-E)$. (Claro es que $e(X-E)=i(E)$).

(b) Un punto $x\in X$ se dice que es punto frontera de E si cualquier abierto A que lo contiene satisface $A\cap E\neq\emptyset$ y $A\cap(X-E)\neq\emptyset$.

(c) La frontera de E denotado por Fr(E) es el conjunto de puntos frontera de E.

Los siguientes teoremas que satisface el exterior y la frontera, caracterizan a los operadores llamados operador exterior y operador frontera. Se deja al lector su verificación.

5.21 Teorema: Para subconjuntos E, A y B de un espacio topológico X se tiene

(i) $e(\emptyset)=X$

(ii) $e(E)\subseteq X-E$

(iii) $e(E)=e(X-e(E))$

(iv) $e(A\cup B)=e(A)\cap e(B)$

5.22 Teorema:

(i) $Fr(\emptyset)=\emptyset$

(ii) $Fr(E)=Fr(X-E)$

(iii) $Fr(Fr(E))=Fr(E)$

(iv) $A\cap B\cap Fr(A\cap B)=A\cap B\cap(Fr(A)\cap Fr(B))$

5.23 Observaciones:

(a) Del Teorema 5.19 resulta que $e(E)=X-c(E)$ y $c(E)=X-e(E)$.

(b) Es facil verificar toda una serie de relaciones entre el interior, el exterior, la frontera y la cerradura de un conjunto E y su complemento. Aquí algunas:

(i) $e(E)\cap i(E)=e(E)\cap Fr(E)=i(E)\cap Fr(E)=i(E)\cap c(X-E)=$ $=c(E)\cap e(E)=\emptyset$

(ii) $c(E)\cap Fr(E)=c(X-E)\cap Fr(E)=X-i(E)\cap X-e(E)=FrE$

(iii) $c(E)=E\cup Fr(E)$ y $i(E)=E-Fr(E)$

(iv) $i(E)\cup e(E)\cup FrE=X$.

5.24 Ejemplos: (ver figura 7)

1. Sea $X=\{a,b,c,d,e\}$ y $T=\{\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$. Consideremos el subconjunto $A=\{b,c,d\}$ de X.

Los puntos c y d son puntos interiores de A ya que $c,d\in\{c,d\}\subseteq A$ y $\{c,d\}$ es abierto. El punto b no es punto interior de A ya que los abiertos que lo contienen son $\{b,c,d,e\}$ y X que no estan contenidos en A. Asi resulta que $i(A)=\{c,d\}$. Solo el punto $a\in X$ es exterior a A (¿Por qué?). Por lo tanto $e(A)=\{a\}$ y de la observación 5.23 (b) (iii) resulta que $Fr(A)=\{b,e\}$.

2. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea I un intervalo de la forma $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$ o $[a,b)$ con $a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq b$. Entonces $i(I)=(a,b)$ y $Fr(I)=\{a,b\}$

3. Sea (X,T) el espacio indiscreto y A un subconjunto propio de X diferente del vacío. Como X y $\emptyset$ son los únicos conjuntos abiertos de X entonces $\emptyset$ es el único subconjunto abierto de A. De 5.16 (ii) tenemos entonces $i(A)=\emptyset$. De la misma manera $c(A)=i(X-A)=\emptyset$. Por lo tanto $Fr(A)=X$ (por 5.23 (b), (iii)). En el caso $A=X$ entonces se tendría $i(A)=A$ y $Fr(A)=\emptyset$.

4. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $T=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{E_a\}$, $E_a=(a,\infty)$, $a\in\mathbb{R}$

Sea $A=[o,\infty)$. $i(A)$ es el mayor abierto contenido en $[o,\infty)$ por lo tanto $i(A)=(o,\infty)$.

$X-A=(-\infty,o)$ y no contiene abiertos diferentes del vacío, por lo tanto $i(X-A)=e(A)=\emptyset$ y $Fr(A)=(-\infty,o]$.

5.25 Notemos que los operadores que hemos definido hasta el momento dependen de la topología elegida en X. En general, si T_1 y T_2 son dos topologías diferentes en X y $A\subseteq X$ entonces el interior, exterior, cerradura, etc. de A con respecto a T_1 serán diferentes de aquellas en T_2. Para poner un ejemplo extremo, si T_1 es la topología indiscreta y T_2 la discreta y $x\in X$, entonces la cerradura de $\{x\}$ en T_1 es todo el espacio X; en cambio la cerradura de $\{x\}$ en T_2 es tan solo $\{x\}$.

Si para un operador η denotamos por η_t al operador definido en relación con la topología T en X, es facil mostrar que si $T_1\leq T_2$ (ver sección 2) dos topologías en X y $A\subseteq X$

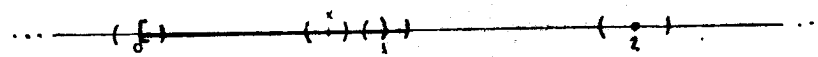
$$d_{T_2}(A)\subseteq d_{T_1}(A)$$

$$c_{T_2}(A)\subseteq d_{T_1}(A)$$

$$i_{T_2}(A)\supseteq i_{T_1}(A)$$

$$e_{T_2}(A)\supseteq e_{T_1}(A)$$

$$Fr_{T_2}(A)\subseteq Fr_{T_1}(A)$$



En este dibujo está representado el subconjunto $E=[0,1)\cup\{2\}$ de la linea real, que estamos considerando con su topología usual. Se puede apreciar que para cualquier $x\in(0,1)$ podemos dibujar un intervalo abierto que contiene a x y que está totalmente incluido en E. (En particular $(0,1)\subseteq E$). Los puntos 0 y 2 no tienen esta característica. Asi resulta que $i(E)=(0,1)$. El punto 0 comparte sin embargo una característica con los puntos $x\in(0,1)$: Cualquier intervalo abierto que lo contiene intersecta a E en puntos diferentes de 0. Esta propiedad la posee también un punto que no está en E, 1. En cambio podemos encontrar vecindades del punto 2 tal que no intersecten a E en puntos distintos de 2. De tal manera que $d(E)=[0,1]$ y asi $c(E)=[0,1]\cup\{2\}$ y 2 es un punto aislado de E.

Por último, tenemos que solo en el caso de los puntos 0,1,2, cualquier intervalo abierto que los contenga, intersecta tanto a E como a su complemento, de tal manera que $Fr(E)=\{0,1,2\}$.

Figura 7.

Veamos un ejemplo:

Sea $X=\mathbb{R}$, T_1 la topología usual y T_2 la topología discreta. Sea $A=\{1,1/2,1/3,\dots,1/n\dots\}$. Naturalmente se tiene que $T_1\subseteq T_2$ y

$$d_{T_2}(A)=\emptyset\subseteq\{0\}=d_{T_1}(A)$$

$$c_{T_2}(A)=A\subseteq A\cup\{0\}=c_{T_1}(A)$$

$$i_{T_2}(A)=A\supseteq\emptyset=i_{T_1}(A)$$

$e_{T_2}(A) = \mathbb{R} - A \supsetneq \mathbb{R} - (A \cup \{0\}) = e_{T_1}(A)$

$Fr_{T_2}(A) = \emptyset \subsetneq \{0\} = Fr_{T_1}(A)$

Esto nos manifiesta cómo topologías diferentes en un conjunto X producen "organizaciones" diferentes de los puntos de X.

Sección 6. Construcción de Topologías a partir de Operadores.

En la sección 4, vimos cómo generar topologías en un conjunto X a partir de familias de sub-conjuntos de X. En la sección anterior introdujimos conceptos como el de cerradura de un conjunto o el de interior. Es claro que podemos reproducir todos los abiertos en un espacio X, considerando la colección $\{i(E): E \subseteq X\}$ y reproducir todos los cerrados considerando la colección $\{c(E): E \subseteq X\}$. Vamos a ver ahora, siguiendo estas ideas, cómo a partir de un operador definido sobre un conjunto X que satisfaga ciertas condiciones, es posible construir topologías en X.

6.1 Teorema: Sea X un conjunto y $\eta: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una función

(i) Si η es un operador interior; es decir, si satisface las condiciones (i), (ii), (iii), (iv) del Teorema 5.17; entonces, $T = \{\eta(E): E \subseteq X\}$ es una topología en X y si $E \subseteq X$, $\eta(E)$ es el interior de E con respecto de esta topología.

(ii) Si η es un operador cerradura (ver definición 5.14). $T = \{X - \eta(E): E \subseteq X\}$ es una topología en X y si $E \subseteq X$, $\eta(E)$ es la cerradura de E con respecto a esta topología.

(iii) Si η es un operador derivado (frontera) (ver Teorema 5.4 y Teorema 5.22), entonces $T = \{X - (E \cup \eta(E)): E \subseteq X\}$ es una topología en X y si $E \subseteq X$ entonces $\eta(E)$ es el conjunto derivado (frontera) de E con respecto a esta topología.

Demostración: Demostraremos el inciso (a). Los restantes se dejan como ejercicios.

(a) En primer lugar, resulta que si $A \subseteq B$ entonces $\eta(A) \subseteq \eta(B)$ ya que $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$. Por (iv) del Teorema 5.17, tenemos que $\eta(A) \cap \eta(B) = \eta(A \cap B) = \eta(A)$. Es decir, $\eta(A) \subseteq \eta(B)$.

Ahora verifiquèmos que en efecto T es una topología:

(a) Por (i) $X \in T$ ya que $\eta(X) = X$ y por (ii) $\eta(\emptyset) \subseteq \emptyset$. Es decir $\eta(\emptyset) = \emptyset$, de esta manera $\emptyset \in T$.

(b) De (iv) y por inducción, resulta que si para una colección finita de elementos en T $\eta(A_1), \ldots, \eta(A_n)$, $\eta(A_1) \cap \ldots \cap \eta(A_n) = \eta(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.

(c) Sea ahora $\{\eta(A_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia arbitraria de elementos en T. Por (ii) sabemos que $\eta(\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha)) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha)$ y como para cada α, $\eta(A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha)$, entonces $\eta(\eta(A_\alpha)) \subseteq \eta(\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha))$ $\forall \alpha$. Es decir, (por (iii)) $\eta(A_\alpha) \subseteq \eta(\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha))$ $\forall \alpha$, por lo tanto $\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha) \subseteq \eta(\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha))$ y asi obtenemos que $\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha) = \eta(\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha))$. Es decir $\bigcup_{\alpha \in I} \eta(A_\alpha) \in T$.

6.2 Ejemplos:

1. Sea X un conjunto y $\eta: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por

$$\eta(E) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } E = \emptyset \\ E & \text{si } E \text{ es finito} \\ X & \text{si } E \text{ infinito} \end{cases}$$

tenemos entonces que:

(i) $\eta(\emptyset) = \emptyset$

(ii) $E \subseteq \eta(E)$ $\forall$ $E \subseteq X$

(iii) $\eta(\eta(E)) = \eta\left(\begin{cases} \emptyset & \text{si } E = \emptyset \\ E & \text{si } E \text{ es finito} \\ X & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}\right) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } E = \emptyset \\ E & \text{si } E \text{ es finito} \\ X & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}$

(iv) Ahora sean $A, B \subseteq X$, si $A = B = \emptyset$ entonces $\eta(A \cup B) = \emptyset = \eta(A) \cup \eta(B)$. Si A y B son finitos entonces $\eta(A \cup B) = A \cup B = \eta(A) \cup \eta(B)$. Si A o B son infinitos entonces $\eta(A \cup B) = \eta(A \cup B) = X = \eta(A) \cup \eta(B)$

Resulta así que η es un operador cerradura. (Ver definición

5.14), y por lo tanto $\{X-\eta(E):E\subseteq X\}$ es una topología para X. Observe que es precisamente la topología cofinita en X.

2. Sea X un conjunto y $E_o\subseteq X$ fijo. El operador $\eta:\mathcal{P}(X)\rightarrow\mathcal{P}(X)$ dado por $\eta(E)=E_o\cup E$ y $\eta(\emptyset)=\emptyset$ es un operador cerradura. En efecto, es claro que se satisfacen (i), (ii) de la Definición 5.14. Por otro lado $\eta(\eta(E))=\eta(E)\cup E_o=E\cup E_o\cup E_o=E\cup E_o=\eta(E)$ y finalmente $\eta(A\cup B)=(A\cup B)\cup E_o=(A\cup E_o)\cup(B\cup E_o)=\eta(A)\cup\eta(B)$ y es un operador cerradura y $T=\{X-\eta(E):E\subseteq X\}$ es una topología en X.

3. Es posible demostrar que el operador $(E)=\begin{cases}E & \text{si } E \quad E_o\\ \emptyset & \text{si } E \quad X-E_o\neq\emptyset\end{cases}$

es operador interior en X.

EJERCICIOS - CAPITULO I.

Sección 1.

1.1 - Demostrar que para un conjunto X cualquiera, $\{\emptyset,X\}$ y $\mathcal{P}(X)$, son en efecto dos topologías en X (Ver ejemplo 1.2.2).

1.2 - Construya todas las topologías posibles en el conjunto $X=\{a,b,c\}$ (Ver ejemplo 1.2.1).

1.3 - Consideremos el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ y sea $T=\{\emptyset,\mathbb{N}\}\cup\{\{1,2,\dots,n\}:n\in\mathbb{N}\}$. Demostrar que T es una topología en $\mathbb{N}$.

1.4 - Demuestra que la colección $T=\{\emptyset,\mathbb{N}\}\cup\{\{n,n+1,n+2,\dots\}:n\in\mathbb{N}\}$ es también una topología en $\mathbb{N}$

1.5 Sea X un conjunto más que numerable (Ver capítulo preliminar) y $T=\{\emptyset,X\}\cup\{E\subseteq X:X-E$ es un conjunto numerable$\}$. Demostrar que T es una topología en X. A esta topología le llamaremos la topología co-numerable en X.

1.6 - Consideremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y sea $T\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dado por $T=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{E\subseteq\mathbb{R}:$ E es unión de intervalos de la forma $[x,z)\}$ Demostrar que T es una topología en $\mathbb{R}$. A $\mathbb{R}$ con esta topología se le suele llamar la línea de Sorgenfrey. (¿Qué pasa si en vez de considerar intervalos de la forma $[x,z)$ las tomamos de la forma $(x,z]$?).

1.7 - Si $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de topologías en un conjunto X, entonces $\bigcap_{\alpha\in I}T_\alpha$ es una topología en X. En cambio, la unión de topologías no es necesariamente una topología.

1.8 - Sea X un conjunto y $d: X\times X \to \mathbb{R}$ una función definida por
$d(x_1,x_2)=\begin{cases} 0 & \text{si } x_1=x_2 \\ 1 & \text{si } x_1\neq x_2 \end{cases}$

(a) Demostrar que d es una métrica en X (Ver capítulo preliminar).

(b) Demostrar que la topología T_d definida por esta métrica coincide con la topología discreta.

1.9 - Demuestre la proposición 1.3.

Sección 2.

2.1 - Demuestre lo que se pide en el ejemplo 2.1.3.

2.2 - Sea $T_{\mathbb{R}}$ la topología usual en $\mathbb{R}$ y T la topología en $\mathbb{R}$ definida en el ejercicio 1.6.

Demostrar que $T_{\mathbb{R}} \leq T$.

¿Qué relación satisface T y la topología cofinita en $\mathbb{R}$?

2.3 - Sea X un conjunto infinito. Compare la topología cofinita con la topología co-numerable.

Sección 3.

3.1 - Sean T_1 y T_2 dos topologías en un conjunto X y F_1, F_2 las familias de cerrados correspondientes.

Demostrar que $T_1 \leq T_2 \iff F_1 \subseteq F_2$

3.2 - ¿Cuáles son los subconjuntos cerrados en los siguientes espacios topológicos?

(a) (X,T) donde $X=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

(b) El espacio del ejercicio 1.3.

(c) El espacio del ejercicio 1.4.

(d) El espacio del ejercicio 1.5.

Sección 4.

4.1 - Sean T_1 y T_2 dos topologías en X y $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases para T_1 y T_2, respectivamente.

(a) Si para cada $B_2 \in \mathcal{B}_2$ y cada $x \in B_2$ existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B_1 \subseteq B_2$ entonces $T_1 \geq T_2$. Es decir, dos bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ generan la misma topología si se satisface (a), y

(b) Para cada $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y cada $x \in B_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

4.2 - Utilizando el resultado del ejercicio anterior y lo señalado en el ejemplo 4.4.1, demuestre que la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\{(x,y): a_1 < x < a_2;\ \ b_1 < y < b_2\}$$

es una base para la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

4.3 - Demostrar que todo subconjunto finito en $\mathbb{R}^n$ es cerrado con respecto a la topología usual y no es abierto.

4.4 - Sea $(\mathbb{R},T)$ como en el ejercicio 1.6. Encontrar una base $\mathcal{B}$ y una sub-base $\mathcal{S}$ para T, no triviales (es decir, $\mathcal{B}\neq T$ y $\mathcal{S}\neq\mathcal{B}$, $\mathcal{S}\neq T$) y para cada $x\in\mathbb{R}$ encontrar una base de vecindades de x, $\mathcal{B}(x)$, diferente de $\mathcal{V}(x)$.

4.5 - Sea X el espacio discreto. Demostrar la afirmación hecha en la observación 4.6 y encontrar una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$ para cada $x \in X$, no trivial (es decir, $\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{V}(x)$).

Para el caso X indiscreto, dar una base de vecindades para cada punto $x \in X$.

4.6 - Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Demostrar que $T_{\mathcal{S}}$ (Ver párrafo anterior a la Definición 4.7), es igual a la menor topología que contiene a la colección $\mathcal{S}$. Es decir,

$$T_{\mathcal{S}} = \bigcap \{T : T \text{ es topología en } X \text{ y } \mathcal{S} \subseteq T\}.$$

4.7 - Sea X el conjunto de todas las nxn matrices de números reales.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ para todo } i,j=1,\dots,n \right\}$$

Denotemos a cada elemento en X simplemente como (a_{ij}).

Para cada $a=(a_{ij})$ y $r>0$, sea

$$U_r(a) = \{ (b_{ij}) \in X : |a_{ij}-b_{ij}| < r \ \forall\, i,j \}.$$

Demuestre que la colección de conjuntos de la forma $U_r(a)$ forma una base para una topología en X.

4.8 - Sea T la topología en $C[0,1]$ definida en 4.4.2. Demostrar que $T \leq T_{d_\infty}$ y que T y T_{d_2} no satisfacen ninguna relación de inclusión. (Ver 2.2).

4.9 - Sea $\mathbb{R}^{[0,1]}$ el conjunto de funciones reales definidas en $[0,1]$. Sea $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Para cada $\varepsilon>0$ y cada $F \subseteq [0,1]$ finito, sea $B_{(F,\varepsilon)}(f) = \{ g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : |g(x)-f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in F \}$. Demuestre que la colección $B_f = \{B_{(F,\varepsilon)}(f) : F \subseteq [0,1] \text{ finito}, \varepsilon>0\}$ es una base de vecindades de f para una topología T en $\mathbb{R}^{[0,1]}$. (Ver 4.14, 4.15 y 4.16).

Sección 5.

5.1 - Verifique el resultado del ejemplo 5.2.2 y dé el conjunto de puntos aislados de E.

5.2 - Sea $(\mathbb{N},T)$ el espacio definido en el problema 1.4.

(a) Determine los subconjuntos cerrados de $(\mathbb{N},T)$.

(b) Utilizando la observación que precede a la Definición 5.7, determine la cerradura de los conjuntos: $\{7,10,80\}$; $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) ¿Cuál es la cerradura de A si A es finito y cuál si A es infinito?

5.3 - Sea $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

(a) Demostrar que T es una topología en $\mathbb{R}$ y determine los subconjuntos cerrados.

(b) Determine la cerradura, el interior, el exterior y la frontera de los conjuntos $[3,7)$; $\{7,24\}$, $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$

5.4 - Sea (X,T) un espacio topológico y $A \subseteq X$. ¿Cuál es la cerradura, el interior, el exterior y la frontera de A, cuando

(a) T es la topología discreta.

(b) T es la topología indiscreta y A es un subconjunto propio de X.

(c) $X=\mathbb{R}$, T es la topología usual en $\mathbb{R}$ y $A=\mathbb{N}$

5.5 - Demuestre los Teoremas 5.21 y 5.22.

5.6 - Demuestre las afirmaciones hechas en las observaciones 5.2.3 (a) y (b).

5.7 - Demostrar las afirmaciones en 5.25.

5.8 - Consideremos en $\mathbb{R}$ con la topología usual, el conjunto $A=\{1/m+1/n:m,n\in\mathbb{N}\}$. Demostrar que $d(A)=\{1/n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ y $d(d(A))=\{0\}$.

5.9 - Demostrar:

(a) $d(A)=\emptyset \Rightarrow$ A es cerrado.

(b) $Fr(A)=\emptyset \Leftrightarrow$ A es cerrado y abierto.

5.10 - Verifique que las siguientes relaciones se satisfacen y dé ejemplos que muestren que la igualdad en cada una de ellas no se satisface necesariamente:

(a) $c(A\cap B)\subseteq c(A)\cap c(B)$

(b) $i(A\cup B)\supseteq i(A)\cup i(B)$

(c) $Fr(A\cup B)\subseteq Fr(A)\cup Fr(B)$

(d) $Fr(A\cap B)\subseteq Fr(A)\cap Fr(B)$

Sección 6.

6.1 - Demostrar los incisos (ii), (iii) del Teorema 6.1.

6.2 - Demuestre que el operador definido en el Ejemplo 6.2.3, es en efecto un operador interior en X.

CAPITULO II

FUNCIONES CONTINUAS, HOMEOMORFISMOS Y CONVERGENCIA.

Sección 1. - Continuidad y Homeomorfismos.

Uno de los conceptos más importantes en topología es el de continuidad de una función. En los cursos de Cálculo y Análisis, se define este concepto para funciones definidas en un subconjunto $D\in\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$. En cursos más adelantados, se define la continuidad de funciones definidas sobre un espacio métrico y con valores en un segundo espacio métrico.

Recordemos la definición:

Sea (X,d), (X',d') dos espacios métricos y $f:X\to X'$ una función con dominio X y rango en X'. f es continua en un punto $x_0\in X$, si y solo si dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $d'(f(x),\ f(x_0))<\varepsilon$ si $d(x,x_0)<\delta$. f es continua en X si es continua en cada punto de X.

Como habíamos mencionado en la introducción del Capítulo I, la definición de continuidad de una función f en un punto x_0 depende de las distancias d y d'; es decir, depende de los criterios de cercanía a x_0 y a $f(x_0)$ de los demas puntos en X y X' definidos en estos espacios.

Vamos ahora a generalizar el concepto de función contínua para espacios topológicos.

1.1 - Definición. Una función $f:X\to Y$ cuyo dominio X y rango Y son espacios topológicos, es continua en un punto $x_0\in X$, si y solo si para cualquier abierto A subconjunto de Y conteniendo a $f(x_0)$, existe un abierto B en X que contiene a x_0 tal que $f(B)\subseteq A$.

1.2 - Observaciones:

(a) De la definición de base de una topología, resulta que nuestra defínción de continuidad no se altera si cambiamos en ella la palabra conjunto abierto por elemento básico.

(b) En el caso en que X y Y son espacios métricos, resultaría entonces que $f:X \to Y$ es continua en $x_o \in X$ si y solo si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_o)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_o))$. Compare esta definición con la que dimos al principio de la sección.

1.3 - Definición. Una función $f:X \to Y$ es continua si f es continua en cada punto de X.

1.4 - Ejemplos:

1.- De los cursos de Cálculo, sabemos que todas la funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son funciones polinomiales y todas las funciones trigonométricas, son funciones continuas en el conjunto de puntos en donde estan definidas.

2.- Sea $C[0,1]$ con la topología T_{d_∞} (Ver 2.2 Capítulo I) y $\varphi: C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(f)=f(1)$. Aquí estamos considerando a $\mathbb{R}$ con la topología usual. Demostraremos que φ es continua, utilizando la Obsservación 1.2 (a):

Sea $f \in C[0,1]$ y $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $a < f(1) < b$. (El intervalo (a,b) es un abierto básico en $\mathbb{R}$).

Sea $\varepsilon = \min\{|a-f(1)|, |b-f(1)|\}$, y sea $g \in B_\varepsilon(f)$, es decir $\sup_{x\in[0,1]}\{|g(x)-f(x)|\} < \varepsilon$. En particular $|g(1)-f(1)| < \varepsilon$ y por lo tanto $a < g(1) < b$, es decir $\varphi(B_\varepsilon(f)) \subseteq (a,b)$ por lo tanto es continua en cada punto de $C[0,1]$.

1.5 - Teorema: Sea $f:X \to Y$ una función de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i.- f es continua.

ii.- Para cualquier abierto $\mathcal{U}$ de Y, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X.

iii.- Para cualquier cerrado F de Y $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

iv.- $f(c_X(A)) \subseteq c_Y(f(A))$ para cualquier $A \subseteq X$, donde c_X y c_Y son los operadores cerradura en X y Y respectivamente.

v.- $f^{-1}(c_X(B)) \supseteq c_Y(f^{-1}(B))$ para cualquier $B \subseteq Y$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$. Como f es continua en x existe un abierto V_x que contiene a x tal que $f(V_x) \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto $V_x \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$ y asi resulta que $f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{x\in f^{-1}(\mathcal{U})} V_x$; es decir, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto pues es unión de abiertos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $F \subseteq Y$ cerrado, entonces $Y-F$ es abierto y por lo tanto $f^{-1}(Y-F)$ es abierto en X, pero $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$ por lo tanto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Sea A un subconjunto de X. $c_Y(f(A))$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto $f^{-1}(c_Y(f(A))$ es cerrado en X y $A \subseteq f^{-1}(c_Y(f(A)))$. Como $c_X(A)$ es el menor cerrado que contiene a A, resulta que $c_X(A) \subseteq f^{-1}(c_Y(f(A)))$. Esto implica que $f(c_X(A)) \subseteq$ $\subseteq c_Y(f(A))$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Sea B un subconjunto de Y y $A=f^{-1}(B)$. De (iv) tenemos que $f(c_X(A)) \subseteq c_X(f(A)) \subseteq c_Y(B)$, esto implica que $c_X(A) \subseteq f^{-1}(c_Y(B))$ es decir $f^{-1}(c_Y(B)) \supseteq c_X(f^{-1}(B))$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Sea $x \in X$ cualquiera y N un abierto de Y conteniendo a f(x). $Y-N=B$ es cerrado y de (v) tenemos $c_X(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_Y(B))=f^{-1}(B)$. Por lo tanto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X y $M=X-f^{-1}(B)$ es abierto que contiene a x. Ademas $f(M) \subseteq N$.

Por lo tanto, f es continua en x. Como x es arbitrario, entonces f es continua.

1.6 - Observación: Como $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$ y $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$, entonces es facil ver que una función es continua si y solo si la imagen inversa de cualquier básico (subbásico) es un abierto.

1.7 Ejemplos: 1.- Sea X,Y dos espacios topológicos, $y_0\in Y$ y $f:X\to Y$ definida como $f(x)=y_0$ para toda $x\in X$. f es entonces continua ya que si $A\subseteq Y$ abierto entonces

$$f^{-1}(A)=\begin{cases}\emptyset & \text{si } y_0\notin A\\ X & \text{si } y_0\in A\end{cases}.$$

En cualquier caso $f^{-1}(A)$ es un abierto en X. Por lo tanto f es continua. Es decir, cualquier función constante es continua.

2.- Sea T y T' dos topologías definidas en un conjunto X tales que $T\leq T'$. Resulta entonces que la función identidad $id:(X,T')\to(X,T)$ definida como $id(x)=x$, es continua, ya que $id^{-1}(A)=A$ y si $A\in T$ entonces $id^{-1}(A)\in T'$ ya que por hipótesis $T\leq T'$.

Este segundo ejemplo es un caso particular del siguiente Teorema:

1.8 - Teorema. Supongamos que $f:(X,T_X)\to(Y,T_Y)$ es contínua y sean T_X', T_Y' dos topologías; una en X y otra en Y tales que $T_X\leq T_X'$ y $T_Y'\leq T_Y$, entonces $f:(X,T_X')\to(Y,T_Y')$ es continua.

La demostración es sencilla y se deja como ejercicio.

1.9 - Ejemplos:

1.- Si Y tiene la topología indiscreta, entonces cualquier función $f:X\to Y$ es continua, ya que los únicos abiertos en Y son $\emptyset$ y Y mismo y $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $f^{-1}(Y)=X$, que son abiertos para cualquier topología en X.

2.- Si X tiene la topología discreta, entonces cualquier función $f:X\to Y$ es continua ya que todo subconjunto de X es abierto y en particular los $f^{-1}(A)$ con A en la topología de Y.

El siguiente resultado es facil de probar y se deja la demostración al lector.

1.10 - Teorema: Sea $f:X\to Y$ continua y $g:Y\to Z$ continua, entonces $g\circ f:X\to Z$ es continua. ○

Si $f:X\to Y$ es una función biyectiva, entonces podemos hablar de la función inversa de f, $f^{-1}:Y\to X$ definida como $f^{-1}(y)$ es igual al único $x\in X$ tal que $f(x)=y$.

Si $f:X\to Y$ es continua y biyectiva, $f^{-1}:Y\to X$ no necesariamente es continua. Por ejemplo si X denota el espacio de los reales con la Topología discreta y Y los reales con la Topología usual entonces $id:X\to Y$ es continua y biyectiva, pero $id^{-1}:Y\to X$ no lo es.

1.11 - Definición: Sean X y Y dos espacios topológicos una función biyectiva $f:X\to Y$ es un homeomorfismo, si y solo si f y f^{-1} son continuas.

Si $f:X\to Y$ es un homeomorfismo, entonces diremos que X y Y son dos espacios homeomorfos.

1.12 - Ejemplos:

(1) La función $x\xrightarrow{f}\frac{x}{1+|x|}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en el intervalo abierto (-1,1), ya que f es biyectiva y continua y además su inversa $y\xrightarrow{f^{-1}}\frac{y}{1-|y|}$ es continua. En general $x\to\frac{x}{1+\|x\|}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en su bola unitaria.

(2) Si S^1 es la circunferencia unitaria en el plano y $P_0=(0,1)$, entonces $S^1-\{P_0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$: $h:S^1-P_0\to\mathbb{R}$ definida por $h((x,y))=\frac{x}{1-y}$ es un homeomorfismo. (ver figura 8).

(3) En general, si S^{n-1} es la esfera unitaria en el

espacio $\mathbb{R}^n$ y $P_o=(0,0,\ldots,1)$, la aplicación $h((x_1,\ldots,x_n)=\dfrac{(x_1,\ldots,x_{n-1})}{1-x_n}$

es un homeomorfismo de $S^{n-1}-P_o$ en el espacio $\mathbb{R}^{n-1}$. (Ver figura 8).

Nota: En estos tres ejemplos, estamos considerando la topología usual en $\mathbb{R}^n$ y en S^n-P_o y $(-1,1)$ y la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ estamos considerando la topología relativa que analizaremos en el capítulo III. En el ejemplo 1, $x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ donde $x=(x_1,\ldots x_n)$

1.13 - Definición: (a) Una función $f:X\to Y$, donde X y Y son espacios topológicos es una función abierta si la imagen bajo f de cualquier conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y.

(b) Si en la definición anterior cambiamos "conjunto abierto" por "conjunto cerrado", entonces a la función le llamaremos función cerrada.

Es posible encontrar funciones que son abiertas y no son cerradas y viceversa. Incluso funciones continuas. Veamos unos ejemplos:

1.14 - Ejemplos:

(1) Cualquier función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ constante, es una función continua y cerrada pero no abierta, ya que para cualquier valor $c\in\mathbb{R}$ el conjunto $\{c\}$ es cerrado pero no es abierto (Ver ejercicio 4.3 Cap. I).

(2) Sea $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida como $p(x,y)=x$. A esta función se le suele llamar la proyección en la 1a. variable.

Resulta que p es continua y abierta pero no es cerrada.

Es continua ya que la imagen inversa de cada intervalo abierto (a,b) es el conjunto:

$p^{-1}((a,b))=\{(x,y):\ a<x<b,\ y\in\mathbb{R}\}$ y puede verificar el lector que este conjunto es un abierto en $\mathbb{R}^2$. (Ver ejemplo 4.8.3 y ejercicio 4.2 Cap. I).

Para verificar que p es una función abierta, es suficiente probar que la imagen bajo p de una bola abierta $B_r(x_o,y_o)$, donde r es un real positivo y (x_o,y_o) es un punto cualquiera en $\mathbb{R}^2$, es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

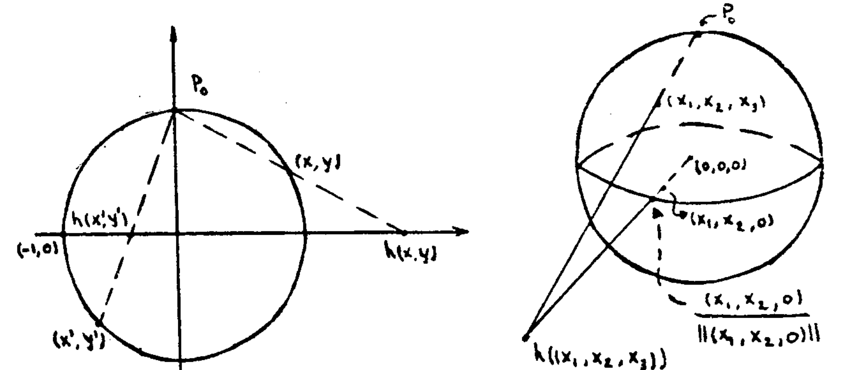
$p(B_r(x_o,y_o))=\{x\in\mathbb{R}:\exists\ y\in\mathbb{R}$ con $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<r\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\exists\ y\in\mathbb{R}$ con $|x-x_o|<\sqrt{r^2-(y-y_o)^2}\}$. Sea $E=\{y\in\mathbb{R}:(y-y_o)^2<r^2\}$ y si $y_1\in E$ sea $E_{y_1}=\{x\in\mathbb{R}:|x-x_o|<\sqrt{r^2-(y-y_o)^2}\}$. Tenemos entonces que $B_{y_1}=B_\delta(x_o)=(x_o-\delta,x_o+\delta)$ donde $\delta=\sqrt{r^2-(y-y_o)^2}$, es un abierto en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto $p(B_r((x_o,y_o)))$ es abierto ya que es unión de abiertos:

$p(B_r(x_o,y_o))=\bigcup_{y\in E} E_y$

Por último, la función p no es cerrada ya que el conjunto $F=\{(x,\frac{1}{x})\ :\ x>0\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ (Verificarlo), pero $p(F)=(0,\infty)$ no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.



En estos dibujos, se muestra cómo se define el homeomorfismo de $S^{n-1}-P_o$ sobre $\mathbb{R}^{n-1}$ en los casos n=2 y n=3.

Figura 8.

(3) Por otro lado, es posible tener funciones cerradas y abiertas, pero no continuas (incluso funciones biyectivas):

Sea X un conjunto; X_1 el conjunto X con la topología indiscreta; X_2 el conjunto X con la topología discreta. Resulta entonces que la función identidad $id: X_1 \rightarrow X_2$ que relaciona a cada $x \in X$ con él mismo: $id(x)=x$, es una función abierta y cerrada, pues envía a los únicos cerrados $X, \emptyset$ en conjuntos cerrados: $X, \emptyset$; y a los únicos abiertos $X, \emptyset$ en abiertos: $X, \emptyset$. Sin embargo, no es una función continua ya que para cualquier subconjunto propio E de X_2, E es abierto en X_2 pero $id^{-1}(E)=E$ no es abierto en X_1.

Como se puede observar en el ejemplo 1, tratamos con una función, no suprayectiva y en el ejemplo 2, con una función no injectiva.

<u>1.15 - Teorema:</u> Sean X, Y dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) f^{-1} es continua.

(b) f es abierta.

(c) f es cerrada.

<u>Corolario</u>: Una función $f: X \rightarrow Y$ biyectiva y continua es un homeomorfismo si satisface las condiciones equivalentes (a), (b), (c) del Teorema anterior.

<u>Demostración del Teorema:</u>

(a) $\Rightarrow$ (b): Sea $A \subseteq X$ abierto, $f(A)=(f^{-1})^{-1}(A)$, y como f^{-1} es continua por hipótesis, entonces $f(A)$ es abierto en Y. Por lo tanto, f es una función abierta.

(b) $\Rightarrow$ (c): Como f es biyectiva $f(X-E)=Y-f(E)$ para cualquier $E \subseteq X$. Si F es un subconjunto cerrado en X, F es de la forma $X-E$ donde E es abierto, y por lo tanto $f(F)=f(X-E)=Y-f(E)$, de tal

manera que $f(F)$ es cerrado, ya que $f(E)$ es abierto.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado. Como f es biyectiva $(f^{-1})^{-1}(F)=f(F)$. Por hipótesis $(f^{-1})^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado, es decir, f^{-1} es una función continua.

<u>Sección 2. - Convergencia</u>.

En esta sección, trataremos la convergencia de sucesiones en espacios topológicos. Como se verá en los resultados que presentamos aquí, la convergencia o no convergencia de sucesiones es un espacio topológico cualquiera, no tiene la misma fuerza que tiene en un espacio Euclideano o en un espacio Métrico. En un capítulo posterior se estudian los conceptos de red y de filtro que son generalizaciones de aquel de sucesión, y se obtienen entonces resultados paralelos a los obtenidos con solo sucesiones en espacios métricos.

<u>2.1 - Definición</u>:

(a) Una sucesión en un espacio topológico X, es una función $\bar{x}: \mathbb{N} \rightarrow X$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales $\{1,2,3,\ldots\}$. En general, denotaremos una sucesión $\bar{x}$, indicando su imagen $\{\bar{x}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio X converge a un punto $x_o \in X$ si para cada vecindad V de x_o (ver sección 4, Cap. I), existe un entero positivo $n(v)$ tal que $x_m \in V$ para toda $m \geq n(V)$.

Esto es equivalente a decir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_o si para cada <u>vecindad básica</u> V de x_o existe un entero positivo $n(V)$ tal que $x_m \in V$ para toda $m \geq n(V)$.

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en x_o lo denotaremos por $x_n \rightarrow x$.

(c) Una sucesión $\bar{x}=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diremos que es finita si la colección $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto finito. Es decir, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita si existe $x_o\in X$ tal que $x_n=x_o$ para casi toda n con excepción quizas de un conjunto finito de elementos en $\mathbb{N}$. Y $\bar{x}$ es infinita si no es finita. En este caso, el conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto infinito.

2.2 - Ejemplos:

1.- Si X tiene la topología indiscreta y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, entonces para cualquier $x_o\in X$, $x_n\to x_o$, ya que la única vecindad de x_o es todo el espacio X. En el caso en que X tiene la topología discreta, tenemos que $x_n\to x_o$ si y solo si $x_n=x_o$ para todo n mayor que un cierto natural fijo n_o. (¿Porqué?).

2.- Sea (X,T_d) un espacio Métrico. Como una base de vecindades de un punto $x_o\in X$, es la colección de bolas centradas en x_o, entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_o si para cada bola $B_r(x_o)$ (para cada real positivo r), existe un natural n(r) tal que $x_m\in B_r(x_o)$ $(d(x_m,x_o)<r)$ para toda $m\geq n(r)$.

3.- En el caso del espacio $C[0,1]$ con la topología T_{d_∞} (ver 2.2, Cap. I) un sistema básico de vecindades de un punto $f_o\in C[0,1]$ es el conjunto de bolas abiertas

$$B_r(f_o)=\{g\in C[0,1]:\sup_{x\in[0,1]}|f_o(x)-g(x)|<r\}$$

Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f_o, significa que para cada $r>0$ existe $n(r)\in\mathbb{N}$ tal que $f_m\in B_r(f_o)$ para toda $m\geq n(r)$. Es decir, $\sup_{x\in[0,1]}|f_m(x)-f_o(x)|<r$ para toda $m\geq n(r)$.

En particular, para cada $x\in[0,1]$, $|f_m(x)-f_o(x)|<r$ para toda $m\geq n(r)$. Es decir, $f_n(x)\to f_o(x)$ para cada $x\in[0,1]$. De aquí resulta que $f_n\to f_o$ en $C[0,1]$ con la topología definida en 4.4.2 Cap. I.

A la topología T_{d_∞} se le suele llamar la topología de la convergencia uniforme y a aquella definida en 4.4.2 Cap. I, la topología de la convergencia puntual. (Ver ejercicio 2.2).

El resultado mostrado en este ejemplo 3 se expresa diciendo: Toda sucesión f_n que converge uniformemente a f_o, converge puntualmente a f_o.

Es importante hacer notar que el recíproco es inexacto. Veamos un ejemplo:

Sea $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$$

(Ver figura 9).

Se puede probar fácilmente que la sucesión f_n converge puntualmente a $f_o=0$, pero esta convergencia no es uniforme ya que

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{n}{4}$$

y este número es grande cuando n lo es. (Ver ejercicio 2.4 de este capítulo).

Del ejercicio 4.8 capítulo I sabemos que T_{d_∞} es una topología más fina que la topología de la convergencia puntual y nuestro resultado aquí es un caso particular del siguiente:

Sea X un espacio topológico y T_1,T_2 dos topologías en X, tales que $T_1\leq T_2$. Si $x_n\to x_o$ en (X,T_2), entonces $x_n\to x_o$ en (X,T_1). (Ejercicio 2.6).

4.- En $L^2(C[0,1])$ (Ver 2.3 Cap. I y figura 4), la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$g_n=\begin{cases}1-nx & \text{si } 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \text{si } \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}$$

, converge a la función idénticamente

cero. En cambio $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como subconjunto de $L^{\infty}(C[0,1])$ no converge a ningún punto, ya que si $g_n \to g_o$ en $L^{\infty}(C[0,1])$, entonces $g_n \to g_o$ puntualmente. Es decir, $g_n(x) \to g_o(x)$ en $\mathbb{R}$. Esto implicaría que

$$g_o(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$$, pero ésta no es una función contínua.

5.- Sea X un conjunto infinito y T la topología cofinita en X. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos diferentes en X, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cualquier punto del espacio X. En efecto, si $x_o \in X$, y V es una vecindad de x_o, entonces X-V es un conjunto finito; entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe estar contenida en V, salvo quizas una colección finita de sus elementos. Esto es, $x_n \to x_o$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión finita, es decir, si x_n es igual a un punto $x_o \in X$ para toda n mayor a un índice n_o, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge solo al punto x_o.

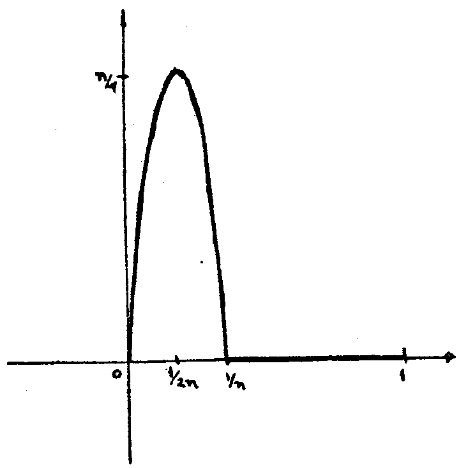


Figura 9.

2.3 - Teorema: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión infinita de puntos pertenecientes a un subconjunto E de un espacio topológico X. Si $x_n \to x_o$ entonces $x_o \in d(E)$.

Demostración: Si A es un conjunto abierto conteniendo a x_o, A contiene a los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con índices mayores que un índice $n(A) \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{x_o\}$ lo es también y por lo tanto $A-\{x_o\} \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Es decir x_o es un punto límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y el resultado se obtiene ya que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$.

2.4 - Corolario: $E \subseteq X$ es un conjunto cerrado implica que cada vez que tengamos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_n \to x_o$, entonces $x_o \in E$.

Demostración: Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E y $x_n \to x_o$, entonces $x_o \in d(E)$. Puesto que E es cerrado, entonces del Teorema 5.5 Cap. I se tiene $d(E) \subseteq E$ y en particular $x_o \in E$.

2.5 - Teorema: Sea $f: X \to Y$ una función continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión, tal que $x_n \to x_o$. Entonces $f(x_n) \to f(x_o)$.

Demostración: Sea B un conjunto abierto que contiene a $f(x_o)$. $f^{-1}(B)$ es un conjunto abierto, ya que f es continua y además contiene a x_o. Existe pues, un natural n_o que satisface $x_n \in f^{-1}(B)$ si $n \geq n_o$. Asi tenemos que $f(x_n) \in B$ si $n \geq n_o$. De aquí se desprende que $f(x_n) \to f(x_o)$.

2.6 - Observación:

(a) En espacios Euclideanos ($\mathbb{R}^n$ con la topología usual), como en general, en los espacios métricos, las condiciones suficientes que aparecen en los Teoremas 2.3 y 2.5 son también condiciones necesarias. Es decir, si (X,T_d) es un espacio métrico, se tiene

(i) $E \subseteq X$, $x_o \in d(E)$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $x_n \to x_o$.

(ii) Una función $f:X\to Y$ es continua si y solo si $f(x_n)\to f(x_o)$, siempre que $x_n\to x_o$. (Y un espacio topológico arbitrario).

En el capítulo IV se verá una clase de espacios topológicos que incluye a los espacios métricos y que conserva esta característica.

(b) En general, para espacios topológicos cualesquiera, no son verdaderos los recíprocos de los Teoremas 2.3 y 2.5. Veamos ejemplos:

(i) Consideremos el espacio de funciones reales de variable en $[0,1]$, $\mathbb{R}^{[0,1]}$ con la topología T de la convergencia puntual, es decir, $T=\{\emptyset\}\cup\{E\subseteq\mathbb{R}^{[0,1]}:E$ es unión de conjuntos de la forma $B_{(F,\varepsilon)}(f)$, con $f\in\mathbb{R}^{[0,1]}$, $\varepsilon>0$ y $F\subseteq[0,1]$ finito$\}$, donde $B_{(F,\varepsilon)}(f)=\{g\in\mathbb{R}^{[0,1]}:|g(x)-f(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in F\}$. (ver ejercicio 4.9 Cap. I).

Sea $E=\{f\in\mathbb{R}^{[0,1]}:f(x)=0$ ó $f(x)=1$ y $f(x)=0$ solo en un subconjunto finito de $[0,1]\}$

Sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función idénticamente cero.

Tenemos que $g\in d(E)$ ya que dada una vecindad básica cualquiera de g, $B_{(F,\varepsilon)}(g)$, la función

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in F\\ 1 & \text{si } x\in[0,1]-F\end{cases}\quad \text{es un elemento de } E\cap B_{(F,\varepsilon)}(g).$$

Sin embargo, no existe ninguna sucesión de elementos de E que converga a g. En efecto, sea $\{f_n\}_n\subseteq E$ una sucesión cualquiera y sea F_n el conjunto finito, tal que $f_n(x)=0$ si y solo si $x\in F_n$. $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ es un conjunto a lo más numerable y por lo tanto $[0,1]-F$ no es vacio. Sea $x_o\in[0,1]-F$. $B_{(x_o,1/2)}(g)$ es una vecindad de g que no contiene a ningún elemento de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es decir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a g. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, se obtiene lo que queríamos demostrar.

(ii) Consideremos ahora el espacio (X,T), donde X es un conjunto más que numerable y T es la topología connumerable. (Ver ejercicio 1.5 Cap. I).

$T=\{\emptyset,X\}\cup\{E\subseteq X:X-E$ es numerable$\}$

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en (X,T), digamos que $x_n\to x_0$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto numerable, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_m=x_o$ para todo $m\geq n_o$ ya que si esto no fuera cierto, entonces existiría una colección infinita (y numerable) $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de la sucesión diferentes a x_0 y su complemento sería un abierto que contiene a x_0. Pero esto no es posible pues contradice nuestra hipótesis $x_n\to x_0$.

Sea Y=X, pero ahora con la topología discreta, $id: X\to Y$ no es una función continua y sin embargo, cada vez que $x_n\to x_0$ en X, $f(x_n)\to f(x_0)$ en Y.

EJERCICIOS - CAPITULO II.

Sección 1.

1.1 - Demostrar el Teorema 1.8.

1.2 - Sea $f:X \to Y$, $g:Z \to X$ dos funciones en donde X,Y,Z son espacios topológicos.

(a) Si f y g son continuas entonces $f\circ g:Z \to Y$ lo es.

(b) Si f y g son funciones abiertas, entonces $f\circ g$ es una función abierta.

(c) Si f y g son funciones cerradas, entonces $f\circ g$ lo es.

(d) Si $f\circ g$ es abierta (cerrada) y g es continua y suprayectiva, entonces f es abierta (cerrada).

(e) Si $f\circ g$ es abierta (cerrada) y f es continua e inyectiva, entonces g es abierta (cerrada).

1.3 - Sea E un subconjunto de un espacio X y sea $\chi_E:X \to \mathbb{R}$, dada por

$$\chi_E(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\notin E \\ 1 & \text{si } x\in E \end{cases}.$$

A χ_E se lé llama la función característica de E.
Demuestre que χ_E es continua en un punto $x\in X$ sí y solo si $x\notin Fr(E)$. Es decir, χ_E es continua si y solo si E es abierto y cerrado.

1.4 - Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $\varphi:C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi:C[0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(f)=f(1) \quad ; \quad \psi(f)=\int_0^1 f(x)dx$$

(a) Demuestre que φ y ψ son continuas en $L^\infty(C[0,1])$ pero solo ψ es continua en $L^2(C[0,1])$. (Ver 2.2 Cap. I).

(b) Si consideramos en $C[0,1]$ la topología definida en 4.4.2, ¿cuál de estas funciones es continua?

1.5 - Sea X un conjunto infinito y T la topología cofinita. Demostrar que una función $f:X \to X$ es continua si y solo si para cualquier subconjunto infinito E de X, $f(E)$ es un conjunto infinito.

1.6 - Sea $(\mathbb{N},T)$ el espacio dado en el ejemplo 1.2.7 Cap. I. Demuestre que una función $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es continua si y solo si m divide a $n \Rightarrow f(m)$ divide a $f(n)$.

1.7 - Sean $f_i:X \to \mathbb{R}$ $i=1,\dots,n$ funciones continuas entonces $\min\{f_i\}$ y $\max\{f_i\}$ son continuas.

Sección 2.

2.1 - Demostrar:

(a) Si (X,T) es como en el ejercicio 1.3 Cap. I, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_o en X si y solo si existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $x_n \leq x_o$ para toda $n\geq m$.

(b) Si (X,T) es el espacio del ejercicio 1.4 Cap. I, $x_n \to x_o$ en X si y solo si $x_n \geq x_o$ para toda n mayor que algún índice.

(c) Si (X,T) es el espacio del ejercicio 1.5 Cap. I, $x_n \to x_o$ en X si y solo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito. (Es decir, $x_n=x_o$ para toda n mayor a algún índice).

2.2 - Demuestre que en el espacio $C[0,1]$ con la topología definida en 4.2.2 Cap. I, $f_n \to f_o$ si y solo si $f_n(x) \to f_o(x)$ en $\mathbb{R}$ para cada $x\in[0,1]$.

2.3 - ¿Qué características tienen las sucesiones convergentes en:

(a) La Línea de Sorgenfrey (Ejercicio 1.6 Cap. I).

(b) La recta real con la topología definida en el Ejercicio 5.3 Cap. I.

2.4 - Si (X,T_d) es un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, demuestre que $x_n \to x_o$ si y solo si $d(x_n,x_o)\to 0$.

2.5 - ¿Converge la sucesión definida en el ejemplo 2.2.3, a f=0 en el espacio $L^2(C[0,1])$?

2.6 - Sea X un espacio topológico y T_1, T_2 dos topologías en X tales que $T_1 \leq T_2$. Demostrar que si $x_n \to x_o$ en (X,T_2), entonces $x_n \to x_o$ en (X,T_1).

CAPITULO III

CONSTRUCCION DE ESPACIOS TOPOLOGICOS A PARTIR DE ESPACIOS DADOS.

Introducción: En Teoría de Conjuntos, es posible construir conjuntos nuevos a partir de conjuntos dados. Por ejemplo, sabemos que si A y B son conjuntos, entonces la colección obtenida al considerar tanto los elementos de A como aquellos de B, $A\cup B$, es un conjunto. Sabemos también de los axiomas de Zermelo-Fraenkel de la Teoría de conjuntos que $A\times B=\{(a,b):a\in A,\ b\in B\}$ es un conjunto.

Cuando definimos espacios topológicos, hablamos de parejas (X,T), en donde X es un conjunto y $T\subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfaciendo ciertas propiedades. De lo dicho antes, resulta que si tenemos dos espacios topológicos (X,T_X), (Y,T_Y), podemos considerar los conjuntos $X\cup Y$ o $X\times Y$. Nos preguntamos ahora si podemos asociar a estos nuevos conjuntos topologías nuevas relacionadas convenientemente con las Topologías T_X y T_Y.

En este capítulo, veremos reglas generales para construir espacios nuevos a partir de espacios dados y analizaremos casos particulares importantes.

Sección 1. - Topologías inducidas por funciones.

Sea X cualquier conjunto y (Y,T) un espacio topológico. Sea $f:X\to Y$ una función entre conjuntos. Sabemos (ver capítulo preliminar) que si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos de Y, entonces

(a) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$

(b) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$

(c) $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ y $f^{-1}(Y)=X$

Estas igualdades nos dan la clave para definir una topología en X a partir de aquella dada en Y.

1.1 - Teorema. El conjunto ${}_fT=\{f^{-1}(A):A\in T\}$ es una topología en X.

Demostración: La demostración resulta a partir de las igualdades (a), (b), (c) arriba y se deja como ejercicio (Ejercicio 1.1). O

Como los elementos de ${}_fT$ son precisamente las imagenes inversas de los abiertos en Y resulta claro que $f:(X,{}_fT)\to(Y,T)$ es continua.

${}_fT$ tiene además otra propiedad: Resulta que si T' es una topología en X, tal que $f:(X,T')\to(Y,T)$ es continua, entonces si $A\in T$, $f^{-1}(A)\in T'$, eso significa que ${}_fT\subseteq T'$. Es decir:

1.2 - Teorema. La Topología ${}_fT$ es la menor topología que hace continua a la función f.

Demostración: Es claro del párrafo anterior. O

Podemos definir en X muchas topologías diferentes. Sin embargo, la topología ${}_fT$ tiene particular importancia. El Teorema 1.2 es la primera muestra de ello. El siguiente resultado completa la justificación de nuestro interés por esta Topología.

1.3 - Teorema. ${}_fT$ es la única topología en X que satisface:

Para cualquier espacio topológico Z y cualquier función $g:Z\to X$, se cumple que:

g es continua $\Leftrightarrow$ $f\circ g$ lo es.

Demostración: $\Rightarrow$) Si g es continua, entonces por el Teorema 7.9 Capítulo I, $f\circ g$ lo es.

Supongamos ahora que $f\circ g$ es continua. Sea A abierto en X, es decir $A=f^{-1}(B)$ para algun $B\in T$. Asi $g^{-1}(A)=(g^{-1}\circ f^{-1})(B)=(f\circ g)^{-1}(B)$. Como $f\circ g$ es continua y B abierto en Y, $g^{-1}(A)=(f\circ g)^{-1}(B)$

es abierto en Z; es decir, g es continua.

Además ${}_fT$ es la única topología en X que satisface esta propiedad, ya que si T' es otra topología en X satisfaciendo la misma propiedad, entonces en particular $id:(X,T')\to(X,T')$ dada por $id(x)=x$ (la función identidad), es continua y por lo tanto $f=f\circ id:(X,T')\to(Y,T)$ es continua. Del Teorema 1.2, se tiene ${}_fT\subseteq T'$.

Por otro lado sea $id:(X,{}_fT)\to(X,T')$ la identidad, $f\circ id=f$ es continua, por lo tanto, por la propiedad que satisface (X,T'), id es continua. Esto implica que $T'\subseteq{}_fT$ y así $T'={}_fT$, con lo que queda demostrada la unicidad. O

Generalicemos ahora lo dicho hasta aquí de la siguiente manera: Sea $\{(X_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F}=\{f_\alpha:X\to X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de funciones definidas sobre un conjunto X. Denotaremos por ${}_{\mathcal{F}}T$ ó ${}_{\{f_\alpha\}}T$ (ó ${}_fT$ si $\mathcal{F}$ consta de una sola función), la menor de las topologías en X que hace continuas a todas las funciones f_α. Tenemos entonces

1.4 - Teorema:

(a) La familia $\mathcal{S}=\{f^{-1}(A):A\in T_\alpha,\ \alpha\in I\}$ es una sub-base para la topología ${}_{\mathcal{F}}T$.

(b) ${}_{\mathcal{F}}T$ es la única Topología en X que satisface:

Para cualquier espacio topológico Z y cualquier función $g:Z\to X$, se cumple que

g es continua $\Leftrightarrow$ $f_\alpha\circ g$ es continua para toda $\alpha\in I$.

Demostración: (a) Consideremos la topología T en X que tiene como sub-base al conjunto $\mathcal{S}$. Vamos a demostrar que en efecto T coincide con ${}_{\mathcal{F}}T$, o en otras palabras, que T es la menor topología que hace continuas a todas las funciones f_α.

Como $\mathcal{S}$ es una sub-base de T, entonces una base de T es $\mathcal{B}=\{f_{\alpha_1}^{-1}(A_1)\cap\ldots\cap f_{\alpha_n}^{-1}(A_n):\ \alpha\in I,\ A_i\in T_{\alpha_i}\ ,\ i=1,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N}\}$, y por lo tanto $T=\{U\subseteq X:\ U$ es unión de elementos en $\mathcal{B}\}$

Cualquier elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a T y por lo tanto, cualquier función f_α es continua ya que $f_\alpha^{-1}(A)\in\mathcal{S}\subseteq T$ para cualquier $A\in T_\alpha$ y cualquier $\alpha\in I$.

Por otro lado, si T' es una topología en X tal que $f_\alpha:X\to X_\alpha$ es continua para toda α , entonces en particular $f_\alpha^{-1}(A)\in T'$ para toda $\alpha\in I$ y para toda $A\in T_\alpha$ por lo tanto como T' es una topología, tenemos que para cualquier colección $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ y cualquier colección $A_1\in T_{\alpha_1},\ldots,A_n\in T_{\alpha_n}$, $f_{\alpha_1}^{-1}(A_1)\cap\ldots\cap f_{\alpha_n}^{-1}(A_n)\in T'$, es decir $T\subseteq T'$.

(b) La demostración de este inciso se puede hacer de manera análoga, salvo cambios evidentes, a la demostración del Teorema 1.3. Se deja como ejercicio (Ver ejercicio 1.2)

1.5 - Observación: Es facil ver que si $\mathcal{B}_\alpha$ es una base de la topología T_α , entonces $\mathcal{S}=\{f_\alpha^{-1}(A):\ A\in B_\alpha\ ,\ \alpha\in I\}$ es una sub-base de $\{f_\alpha\}T$. (En Teorema 3.3 se hace la demostración para un caso particular.)

1.6 - Definición: A la topología $_{\mathcal{F}}T$ le llamaremos la topología debil en X inducida por la familia $\mathcal{F}$. (y por la familia de espacios $\{(X_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha\in I}$).

1.7 - Ejemplos:

1.- Un ejemplo de gran importancia y que discutiremos en la sección dos es el siguiente. Sea X un espacio topológico y $E\subseteq X$, y sea $j:E\to X$ la función inclusión; es decir $j(x)=x$ para toda $x\in E$. Cuando E tiene la topología inducida por $\mathcal{F}=\{j\}$, $_jT$, decimos que E es sub-espacio Topológico de X.

2. Sea E un subconjunto de un conjunto X y $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Consideremos la función característica de E, $\chi_E:X\to\mathbb{R}$ dada por

$$\chi_E(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\notin E\\ 1 \text{ xi } x\in E\end{cases}$$

La topología inducida en X por χ_E es por definición el conjunto de imágenes inversas de abiertos en $\mathbb{R}$. De tal manera que $_{\chi_E}T=\{\emptyset,X,E,X-E\}$, ya que si $A\subseteq\mathbb{R}$ abierto

$$\chi_E^{-1}(A)=\begin{cases}\emptyset \text{ si } \{0,1\}\cap A=\emptyset\\ X \text{ si } \{0,1\}\subseteq A\\ X-E \text{ si } 0\in A \text{ y } 1\notin A\\ E \text{ si } 0\notin A \text{ y } 1\in A\end{cases}$$

3.- Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos con $X_\alpha\neq\emptyset$ para toda α . Por Zermelo-Freankel $\prod X_\alpha$ es un conjunto y por el axioma de elección (Ver Cap. preliminar) $\prod X_\alpha$ es diferente del vacio.

La topología en $\prod X_\alpha$ inducida por los espacios X_α y las proyecciones $p_\alpha:\prod X_\alpha\to X_\alpha$, es la topología producto que analizaremos en la sección 3 de este capítulo. O

Consideremos ahora una función definida sobre un espacio topológico (X,T) y con valores en un conjunto Y. Vamos a construir una topología en Y con propiedades deseadas a partir de f y de T.

Queremos que la topología obtenida en Y, que denotaremos por T_f, sea tal que convierta a f en función continua y que satisfaga

(P) - - - - Para cualquier espacio topológico Z, una función $g:Y\to Z$ es continua si y solo si $g\circ f$ lo es.

Sea $T_f\subseteq\mathcal{P}(Y)$ dado por

$T_f=\{E\subseteq Y:\ f^{-1}(E)\in T\}$

Tenemos entonces:

1.8 - Teorema:

(i) T_f es una topología en Y.

(ii) $f:(X,T) \to (Y,T_f)$ es continua y T_f es la mayor topología en Y que satisface esta propiedad.

(iii) T_f es la única topología que satisface la afirmación P.

<u>Demostración</u>:

(i) Es rutina y se deja como ejercicio.

(ii) f es continua a causa de la definición de T_f. Además si T' es una topología en Y que hace continua a f, $f^{-1}(A) \in T$ si $A \in T'$, es decir $T' \subseteq T_f$.

(iii) Supongamos que $g:Y \to Z$ es tal que $g \circ f$ es continua, es decir, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in T$ para todo A abierto en Z. Por definición de T_f tenemos que $g^{-1}(A) \in T_f$, es decir, g es continua.

Por otro lado, si T' fuera una topología en Y que satisface (P), entonces en particular $id:(Y,T') \to (Y,T_f)$ es continua ya que $idof$ lo es. Por lo tanto, $T_f \subseteq T'$.

Pero $f:(X,T) \to (Y,T')$ es continua pues ahora la composición $(X,T) \xrightarrow{f} (Y,T') \xrightarrow{id} (Y,T')$ lo es, y como T' satisface (P), entonces f es continua. Por (ii) resulta que $T' \subseteq T_f$ y así, la igualdad. o

En general, dada una familia de espacios $\{(X_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ y una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X_\alpha \to X\}$ donde X es un conjunto, podemos definir una topología $T_{\mathcal{F}}$ en X de la siguiente manera: $A \in T_{\mathcal{F}}$ si y solo si $f_\alpha^{-1}(A) \in T_\alpha$ para toda α.

Tenemos que:

<u>1.9 - Teorema</u>:

(i) $T_{\mathcal{F}}$ es una topología en X.

(ii) Cada $f_\alpha : (X_\alpha,T_\alpha) \to (X,T_{\mathcal{F}})$ es continua y $T_{\mathcal{F}}$ es la mayor topología en X con esta propiedad.

(iii) $T_{\mathcal{F}}$ es la única topología que satisface: Para cualquier espacio (Z,T), una función $g:(X,T_{\mathcal{F}}) \to (Z,T)$ es continua si y solo si $g \circ f_\alpha$ es continua para toda $\alpha \in I$.

<u>Demostración</u>: La demostración se deja como ejercicio.

<u>1.10 - Definición</u>: A la topología $T_{\mathcal{F}}$ le llamaremos la topología fuerte en X inducida por la familia de funciones $\mathcal{F}$ y por los espacios topológicos (X_α,T_α).

<u>1.11 - Ejemplos</u>:

1.- Para cualquier espacio topológico y cualquier conjunto Y, la topología en Y inducida por una función constante $k:X \to y_0$ es la topología discreta, ya que si $E \subseteq Y$,

$$k^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y_0 \notin E \\ X & \text{si } y_0 \in E \end{cases},$$

es decir, cualquier subconjunto de Y pertenece a T_k.

(¿Bajo qué condiciones en $f:X \to Y$ y en la topología de X se obtiene T_f la topología indiscreta?).

2.- Sea $\{(X_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Podemos considerar en X la topología fuerte inducida por la familia de inclusiones $j_\alpha : X_\alpha \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ $(j_\alpha(x)=x)$.

A la pareja $(X,T_{\{j_\alpha\}})$ le llamaremos la suma topológica de los espacios X_α y a $T_{\{j_\alpha\}}$, la topología suma.

De esta manera, un subconjunto A es abierto en X si y solo si $A \cap X_\alpha = j_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en X_α para cada α.

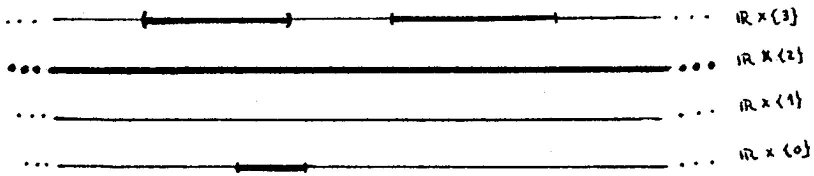
Veamos un ejemplo más concreto:

Para $X_1=\{a,b,c\}$, $X_2=\{0,1\}$ con las topologías $T_1=\{\emptyset,X_1,\{a\},\{a,b\}\}$, $T_2=\{\emptyset,X_2,\{0\}\}$ respectivamente, la topología suma es:

$$T=\{\emptyset, X_1 \cup X_2, \{a\}, \{a,b\}, \{0\}, \{a,0\}, \{a,b,0\}, \{a,0,1\}, \{a,b,0,1\}, \{a,b,c,0\}\}$$

En la figura 10 se dibuja un abierto en la suma topológica de los espacios $\mathbb{R}\times\{0\}$, $\mathbb{R}\times\{1\}$, $\mathbb{R}\times\{2\}$, $\mathbb{R}\times\{3\}$, donde cada $\mathbb{R}\times n$ con $n \in \{0,1,2,3\}$ tiene la topología T_n cuya base es

$\mathcal{B}_n = \{ B^n_{(a,b)} = (x,n) : a<x<b,\ a,b \in \mathbb{R} \}$



Marcado con línea más gruesa, se muestra un abierto en el espacio suma $\bigcup_{n=0}^{3} \mathbb{R}\times\{n\}$.

Figura 10.

Sección 2. - Subespacios.

2.1 - Definición: Sea (X,T) un espacio topológico y $E \subseteq X$. A la pareja $(E, {}_jT)$ le llamamos subespacio topológico de X, donde ${}_jT$ es la topología debil inducida por la inclusión. (Ver sección anterior. En particular, ver ejemplo 1.7.1).

A la topología ${}_jT$ le llamamos la topología relativa en E.

${}_jT$ es la colección de imágenes inversas $j^{-1}(A)$, donde A es abierto en X. Es decir, ${}_jT = \{ j^{-1}(A) = A \cap E : A \in T \}$.

2.2 - Ejemplos:

1.- Si (X,T) es el conjunto de los reales con la topología usual y $E = \mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros, la topología relativa en $\mathbb{Z}$ es la topología discreta. En efecto, cualquier subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de los enteros es igual a $\{x_i\}_{i\in I} = \mathbb{Z} \cap A$ donde $A = \bigcup_{i\in I} (x_i - 1/2, x_i + 1/2)$.

Como A es unión de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, entonces A es abierto en $\mathbb{R}$ y $\{x_i\}_{i\in I}$ es abierto en $\mathbb{Z}$ con la topología relativa.

2.3 - Teorema: Sea (X,T) un espacio topológico y $E \subseteq X$. Si $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in I\}$ es una base (Sub-base) para T, entonces $\mathcal{B}^* = \{E \cap B_\alpha : \alpha \in I\}$ es una base (sub-base) para la topología relativa en E.

Demostración: Si $A^* \in {}_jT$, A [illegible] para alguna $A \in T$, asi $A = \bigcup_{\alpha\in I'} B$ para algun $I' \subseteq I$ y por lo tanto $A^* = \bigcup_{\alpha\in I'} B_\alpha \cap E = \bigcup_{\alpha\in I'} (B_\alpha \cap E)$. De tal manera que cualquier elemento en ${}_jT$ es unión de elementos en $\mathcal{B}^*$; es decir, $\mathcal{B}^*$ es una base de ${}_jT$. o

De este teorema se desprende que podemos describir la topología relativa de un subconjunto de X a partir de una base o una sub-base en X.

2.4 - Ejemplos:

(1) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual $T_{\mathbb{R}}$ y consideremos el intervalo $[0,1]$. Como $\{(a,b) : a<b\}$ es una base para $T_{\mathbb{R}}$, entonces $\{(a,b) \cap [0,1] : a<b\}$ es una base para $[0,1]$; es decir, los abiertos en $[0,1]$ con la topología relativa son uniones de conjuntos de la forma $[0,b)$, (a,b), $(a,1]$ con $0<a<b<1$.

(2) Del ejemplo 4.8.3 Cap. 1 sabemos que la colección de conjuntos de la forma

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_1<x<a_2;\ y\in\mathbb{R}\}$$
y
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R},\ b_1<y<b_2\}$$

forma una sub-base para la topología usual en $\mathbb{R}^2$. (Ver figura 4). De tal manera que el conjunto $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ (el eje de las equis), tiene como sub-base las intersecciones:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_1<x<a_2;\ y\in\mathbb{R}\} \cap \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} = \{(x,0) : a_1<x<a_2\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R} : b_1<y<b_2\} \cap \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0<b_1 \text{ ó } b_2>0 \\ \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} & \text{si } b_1<0<b_2 \end{cases}$$

Como la intersección de cualquier colección finita de conjuntos de esta forma, es también de esta forma, entonces resulta que la colección

$$\{\{(x,0):a_1<x<a_2\}:a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$$

es una base para $\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$. Este resultado lo expresamos diciendo que la topología usual en $\mathbb{R}$ coincide con la topología relativa de $\mathbb{R}$ considerado como sub-espacio de $\mathbb{R}^2$.

<u>2.5 - Teorema</u>: Sea E un subespacio de X. Para $G\subseteq E$ se tiene:

(i) $c_E(G)=E\cap c_X(G)$; $d_E(G)=E\cap d_X(G)$.

(ii) $E\cap i_X(G)\subseteq i_E(G)$; $Fr_E(G)\subseteq E\cap Fr_X(G)$.

(iii) $G\subseteq E$ es cerrado en $(E,{}_jT)$ si y solo si $G=E\cap F$, donde F es un cerrado en (X,T). Es decir, los conjuntos cerrados en E son las intersecciones de E con los conjuntos cerrados en X.

(El sub-índice E ó X nos indica el espacio en donde estamos considerando el operador c,d,i ó Fr.).

<u>Demostración</u>:

(i) Sea A abierto en X conteniendo un punto $x\in E$. Como $G\subseteq E$, $(A-\{x\})\cap G=((A\cap E)-\{x\})\cap G$ y como los abiertos en E son precisamente de la forma $A\cap E$, $x\in d_E(G)\Leftrightarrow x\in d_X(G)$ para $x\in E$, es decir $d_E(G)=d_X(G)\cap E$.

Ahora, $c_E(G)=c_X(G)\cap E$ resulta de lo anterior y de la igualdad $c(G)=G\cup d(G)$.

(ii) $i_X(G)$ es un abierto en X contenido en G. Como $G\subseteq E$, $i_X(G)\subseteq E$ y así $i_X(G)\cap E=i_X(G)$ es abierto en E contenido en G. Como $i_E(G)$ es el mayor abierto contenido en G, entonces $i_X(G)\cap E\subseteq i_E(G)$.

Sea ahora $x\in Fr_E(G)$. Naturalmente $x\in E$. Veamos que también pertenece a $Fr_X(G)$.

Si A es un abierto en X que contiene a x, $(A\cap E)\cap G\neq\emptyset$ y $(A\cap E)\cap(E-G)\neq\emptyset$ ya que $x\in Fr_E(G)$ y $A\cap E$ es un abierto en E.

Como $A\cap E\subseteq A$ y $E-G\subseteq X-G$, entonces $A\cap G\neq\emptyset$ y $A\cap(X-G)\neq\emptyset$, es decir $x\in Fr_X(G)$.

(iii) Si $G\subseteq E$ es cerrado en E, tendríamos $c_E(G)=G$, pero $G=c_E(G)=c_X(G)\cap E$. Así G es de la forma $F\cap E$ donde $F=c_X(G)$ es un cerrado en X.

Supongamos ahora que G es de la forma $F\cap E$ donde F es un cerrado en X. Por (ii) y del ejercicio 5.10 (a) del Cap. I tenemos que: $c_E(G)=c_E(F\cap E)=c_X(F\cap E)\cap E\subseteq c_X(F)\cap c_X(E)\cap E=F\cap E=G$, y por lo tanto G es cerrado en E.

<u>2.6 - Observación:</u> Podemos encontrar ejemplos en los que se obtenga la contensión propia en el inciso (ii) del Teorema anterior:

Sea $X=\mathbb{R}$ con la topología usual, $E=[0,1]$ y $G=[0,1/2)$. Resulta que $i_X(G)=(0,1/2)$ pero $i_E(G)=[0,1/2)$.

Dé un ejemplo en donde $Fr_E(G)$ sea un subconjunto propio de $E\cap Fr_X(G)$.

<u>2.7 - Teorema:</u> Un subespacio E de un espacio X es abierto (cerrado) en X si y solo si la función inclusión $j:E\to X$ es una función abierta (cerrada).

Por lo tanto, cualquier abierto (cerrado) de un subespacio abierto (cerrado) es abierto (cerrado).

<u>Demostración:</u> Se deja como ejercicio.

Sección 3. - Espacios Producto.

Consideremos una familia $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ de espacios topológicos, donde cada $X_\alpha \neq \emptyset$.

El conjunto producto $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es el conjunto de funciones $x:A \to \bigcup_{\alpha\in A} X$ tal que $x(\alpha) \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. En el caso en que el conjunto de índices A es finito, digamos $A=\{1,\dots,n\}$, se acostumbra denotar a los elementos en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ como eneadas ordenadas. Más precisamente, si $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, a x lo denotaremos como $(x(1),\dots,x(n))$ ó $(x_1,\dots,x_n)$.

Sea $p_\alpha : \prod_{\alpha\in A} X \to X_\alpha$ la función definida por $p_\alpha(x)=x(\alpha)$. A p_α le llamaremos la proyección sobre el α-ésimo factor.

<u>3.1 - Definición</u>: A la pareja $(\prod_{\alpha\in A} X, {}_{\{p_\alpha\}}T)$ (Ver ejemplo 1.7.3 de este capítulo) le llamamos el producto topológico de los espacios X_α. A la topología debil inducida por $\{p_\alpha\}$, ${}_{\{p_\alpha\}}T$, le llamamos la topología producto.

<u>3.2</u> - De lo visto en la sección 1, tenemos pues que:

(a) p_α es continua, cualquiera que sea $\alpha \in A$.

(b) ${}_{\{p_\alpha\}}T$ es la menor topología que hace a todas las p_α continuas.

(c) Si Z es un espacio topológico y $g:Z \to \prod X_\alpha$, entonces g es continua si y solo si $p_\alpha \circ g$ lo es, para toda α.

(d) La familia $\mathcal{S}=\{p_\alpha^{-1}(B):B\in T_\alpha, \alpha \in A\}$ es una sub-base de esta topología.

<u>3.3 - Ejemplos</u>:

1.- Cuando X_α es un mismo espacio topológico para toda $\alpha \in A$, al producto $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ lo denotamos por X^A. En el caso en que $A=\{1,\dots,n\}$, entonces a X^A le llamaremos la enésima potencia de X y lo denotaremos por X^n.

2.- Sea $\mathbb{R}$ la recta real con la topología usual. Consideremos el producto topológico en el conjunto $\mathbb{R}^2$. De la observación 1.5 resulta que una sub-base de la topología producto, es la colección de conjuntos de la forma

$p_1^{-1}((a,b))$, $p_2^{-1}((c,d))$ donde (a,b) y (c,d) son intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Pero $p_1^{-1}((a,b))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a<x<b;\ y\in\mathbb{R}\}$

$p_2^{-1}((c,d))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R};\ c<y<d\}$

Así tenemos que la topología producto en $\mathbb{R}^2$ coincide con la topología usual en $\mathbb{R}^2$. (Ver Cap. I ejemplo 4.8.3, ejercicios 4.2 y figura 6).

Se puede demostrar que la topología usual en $\mathbb{R}^n$ coindice con la topología producto para cualquier n.

3.- Sea $A=[0,1]$, $\mathbb{R}^A$ es el conjunto de funciones reales con dominio en $[0,1]$.

Para un intervalo abierto (a,b) en $\mathbb{R}$, y un punto $x\in[0,1]$, $p_x^{-1}((a,b))=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} : f(x)\in(a,b)\}$ de tal manera que un elemento básico en la topología producto de $\mathbb{R}^A$ es de la forma $p_{x_1}^{-1}((a_1,b_1))\cap\dots\cap p_{x_n}^{-1}((a_n,b_n))=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} : f(x_1),\dots,f(x_n)\in (a_1,b_1)\cap\dots\cap(a_n,b_n)\}$. y un sistema básico de vecindades de un elemento $f\in\mathbb{R}^A$ es de la forma

$\{B_{(F,r)}(f)=\{g:[0,1]\to\mathbb{R} : |f(x)-g(x)|<r$ para todo $x\in F\}: F\subseteq[0,1]$ finito, $r\in\mathbb{R}^+\}$

Es decir, la topología producto en $\mathbb{R}^A$ coincide con aquella descrita en 2.6 (b) Cap. II. (Ver también ejercicio 4.9 del Cap. I).

Resulta también cierto que la topología relativa en $C[0,1]$ definida por la topología producto en $\mathbb{R}^{[0,1]}$ coincide con aquella del ejemplo 4.4.2 Cap. I.

3.4 - Teorema: La proyección $p_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ es una función abierta para toda β. (Ver ejemplo 1.14.2 Cap. II).

Demostración: Sea A un abierto arbitrario en $\prod X_\alpha$. Vamos a demostrar que $p_\beta(A)$ es un conjunto abierto en X_β. Sea $x \in p_\beta(A)$. Existe un punto $f \in A$ tal que $f(\beta)=a$. Existe un elemento básico B en $\prod X_\alpha$ tal que $f \in B \subseteq A$ (Ver Teorema 4.5 Cap. I). Esto es, existen una colección finita de índices $\beta_1,\ldots,\beta_n$ y una colección de conjuntos $A_{\beta_1},\ldots,A_{\beta_n}$ donde A_{β_i} es un abierto en X_{β_i} para $i=1,\ldots,n$ tales que $f \in B = p_{\beta_1}^{-1}(A_{\beta_1}) \cap \ldots \cap p_{\beta_n}^{-1}(A_{\beta_n}) \subseteq A$.

Esto implica que $x \in p_\beta(f) \in p_\beta(B) \subseteq p_\beta(A)$.

Queda por demostrar que $p_\beta(B)$ es un abierto en X_β. Esto resulta ya que $p_\beta(B)=A_{\beta_i}$; si $\beta=\beta_i$ para alguna i y $p_\beta(B)=X_\beta$ si $\beta \neq \beta_i$ para todo $i=1,\ldots,n$.

3.5 - Teorema: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en el producto $\prod X_\alpha$ y $x_o \in \prod X_\alpha$. $x_n \to x_o$ sí y solo si $p_\alpha(x_n) \to p_\alpha(x_o)$ para toda α.

Demostración: Si $x_n \to x_o$, como p_α es continua para toda α entonces del Teorema 2.5 Capítulo II se tiene: $p_\alpha(x_n) \to p_\alpha(x_o)$ para toda α.

Supongamos ahora que para cada α, $p_\alpha(x_n) \to p_\alpha(x_o)$ y sea A un abierto cualquiera conteniendo a x_o. Existe un abierto básico $B = p^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p^{-1}(A_k)$ en el espacio producto tal que $x_o \in B \subseteq A$, donde A_i es un abierto en X_{α_i} conteniendo a $p_{\alpha_i}(x_o)$, $i=1,\ldots,k$.

Como $p_{\alpha_i}(xn) \to p_{\alpha_i}(x_o)$ para cada i, entonces existe $n(i) \in \mathbb{N}$ tal que $p_{\alpha_i}(x_n) \in A_i$ para toda $n \geq n(i)$, $i=1,\ldots,n$.

Si $n_o=\max\{n(1),\ldots,n(k)\}$, entonces $x_n \in B$ para toda $n \geq n_o$, lo que completa la demostración.

Sección 4. Espacios Cociente

4.1 - Definición: Sean (X,T) un espacio topológico, Y un conjunto y $f:X \to Y$ una función suprayectiva. La pareja (Y,T_f), donde T_f es la topología fuerte inducida por f y (X,T), es llamada espacio cociente y a T_f le llamaremos la topología cociente en Y inducida por f y (X,T). (Si no hay posibilidad de confusión, diremos simplemente, topología inducida por f). Es decir $T_f=\{A \subseteq X : f^{-1}(A) \in T\}$.

Del Teorema 1.8 tenemos el siguiente:

4.2 - Teorema: Si (Y,T_f) es la topología cociente en Y inducida por $f:X \to Y$ y (X,T), entonces T_f es la mayor topología que hace a f contínua y es la única que satisface: Para cualquier espacio Z, $g:Y \to Z$ es continua, si y solo si $g \circ f$ lo es. $\circ$

Dada una función continua y suprayectiva f con dominio en el espacio (X,T_X) y rango (Y,T_Y), nos preguntamos bajo qué condiciones T_Y coincide con la topología cociente T_f.

Como T_f es la mayor topología que hace continua a f, entonces se debe cumplir que $T_Y \subseteq T_f$. Para que estas dos topologías coincidan es pues suficiente tener $T_f \subseteq T_Y$. Es decir, si $A \subseteq Y$ es tal que $f^{-1}(A) \in T_X$, entonces $A \in T_Y$. Como f es suprayectiva $f(f^{-1}(A))=A$ para cualquier subconjunto A de Y. Así si $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ es una función abierta, entonces en efecto $A \in T_Y$ si $f^{-1}(A) \in T_X$.

4.3 - Teorema: Sea X,Y espacios topológicos y $f:X \to Y$ es una función suprayectiva y continua. Si f es abierta o cerrada, entonces la topología de Y coincide con la topología cociente.

Demostración: Lo dicho en el párrafo anterior, demuestra nuestro teorema para el caso en que f es una función abierta. Si f es cerrada y $A \in T_f$ entonces $f(X-f^{-1}(A))$ es un conjunto cerrado en (Y,T_Y). Pero en este caso $f(X-f^{-1}(A))=Y-A$ y por lo tanto $A \in T_Y$. Así obtenemos que $T_f \subseteq T$ y por consiguiente la igualdad.

4.4 - Ejemplo: Sea $[0,1]$ con la topología relativa definida por $T_{\mathbb{R}}$. Sea S^1 el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ con la topología relativa definida por $T_{\mathbb{R}^2}$. La función $f:[0,1] \to S^1$ dada por $f(x)=(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ es suprayectiva continua y cerrada. Asi que S^1 con esta topología es un espacio cociente.

Vamos ahora a obtener topologías cocientes de tal manera que nos permita describir fácilmente estos espacios topológicos.

4.5 - Definición:

1.- Sea X un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ en X es una colección de subconjuntos de X ajenos por pares y cuya unión es X. (Es decir si $A,B \in \mathcal{D}$ entonces $A \cap B=\emptyset$ y $\bigcup\{B:B \in \mathcal{D}\}=X$).

2.- Sea $\mathcal{D}$ una partición de un espacio X. A la aplicación $p:X \to \mathcal{D}$ que manda a cada elemento $x \in X$ al único elemento de la partición que lo contiene, le llamaremos proyección natural.

3.- Sea $\mathcal{D}$ una partición en un espacio topológico (X,T). Consideremos en el conjunto $\mathcal{D}$ la siguiente topología $T_{\mathcal{D}}$:

$\mathcal{A} \in T_{\mathcal{D}}$ si y solo si $\bigcup\{A:A \in \mathcal{A}\}$ es abierto en X.

A la pareja $(\mathcal{D},T_{\mathcal{D}})$ le llamaremos espacio partición de X.

4.6 - Ejemplo: En el conjunto de los números reales,

$\mathcal{D}_1=\{\{x\}:x \in \mathbb{R}\}$; $\mathcal{D}_2=\{(n,n+1]:n \in \mathbb{Z}\}$; $\mathcal{D}_3=\{\{x \in \mathbb{R} :x > 0\}, \{x \in \mathbb{R} :x \leq 0\}\}$ son tres particiones diferentes.

Si $p_i:\mathbb{R} \to \mathcal{D}_i$ es la proyección natural para $i=1,2,3$, entonces $p_1(x)=\{x\}$; $p_2(x)=(n,n+1]$ si $n<x\leq n+1$ y

$$p_3(x)=\begin{cases}(-\infty,0] & \text{si } x\leq 0\\ (0,\infty) & \text{si } x>0\end{cases}$$

Si A es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}=\{\{x\}:x \in A\}\in T_{\mathcal{D}_1}$.

Los únicos abiertos en $(\mathcal{D}_3,T_{\mathcal{D}_3})$ son $\emptyset$, $\mathcal{D}_3$ y $\{\{x \in \mathbb{R} :x>0\}\}$.

Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ el conjunto $\{(n,n+1]:n\geq k\}$ es un abierto en el espacio partición $\mathcal{D}_2$.

4.7 - Teorema: Si $\mathcal{D}$ es una partición del espacio topológico X, $T_{\mathcal{D}}$ es la topología cociente inducida por la proyección natural $p:X \to \mathcal{D}$.

Demostración: Sea T_p la topología cociente. Observemos que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ entonces $p^{-1}(\mathcal{A})=\{x \in X:p(x)\in \mathcal{A}\} =\bigcup\{A \subseteq X:A \in \mathcal{A}\}$. De tal manera que $\mathcal{A} \in T_p \Leftrightarrow p^{-1}(A)$ es abierto en X $\Leftrightarrow$ $\bigcup\{A \subseteq X:A \in \mathcal{A}\}$ es abierto en X $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in T_{\mathcal{D}}$.

4.8 - Observaciones:

(a) La proyección natural $p:X \to \mathcal{D}$, no necesariamente es abierta o cerrada. Por ejemplo si $X=\mathbb{R}$ con la topología usual y $\mathcal{D}=\{(n,n+1]:n \in \mathbb{Z}\}$, resulta que p no es una función abierta, ya que $p((n,n+1))=\{(n,n+1]\}$ y este conjunto no es abierto en $\mathcal{D}$ ya que $p^{-1}\{(n,n+1]\}=(n,n+1]$ que no es abierto en $\mathbb{R}$.

Además p no es una función cerrada pues $p([n,n+1])=\{(n-1,n],(n,n+1]\}$ que no es cerrado ya que $p^{-1}(\{(n-1,n], (n,n+1]\}=(n,n+1]$.

Esto muestra que el recíproco del Teorema 4.3 no es necesariamente cierto.

(b) Si X es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces $\sim$ induce una partición en X. En efecto, las clases de equivalencia forman una partición $\mathcal{D}$ en X. (Ver Capítulo Preliminar y ejercicio 4.2).

Recíprocamente, si $\mathcal{D}$ es una partición, la relacion: $x \sim y \Leftrightarrow x$ y y pertenecen al mismo elemento de la partición, es una relación de equivalencia.

A cualquier partición $\mathcal{D}$ en X con la topología cociente inducida por p, se suele denotar también como $X/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por $\mathcal{D}$.

El siguiente Teorema es fundamental y nos muestra que todo espacio cociente es esencialmente un espacio partición.

<u>4.9 - Teorema</u>: Si Y posee la topología cociente inducida por una función continua y suprayectiva $f:X \to Y$, entonces existe un homeomorfismo h de Y en el espacio partición $\mathcal{D} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$.

Ademas $h \circ f$ es igual a la proyección natural $p:X \to \mathcal{D}$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Y \arrow[rr, "h"'] & & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>: Sea $h:Y \to \mathcal{D}$ definida por $h(y)=f^{-1}(y)$. De esta manera $h(f(x))=f^{-1}(f(x))=p(x)$ ya que evidentemente $x \in f^{-1}(f(x))$.

Como f es una función, entonces $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ si $y_1 \neq y_2$, es decir, h es inyectiva. Además es evidente que h es suprayectiva.

Por otra parte tenemos que
$h^{-1}(B)=A \in T_f \Leftrightarrow f^{-1}(A)=\cup\{f^{-1}(y):y \in A\}$ es abierto en $X \Leftrightarrow \{f^{-1}(y):y \in A\}=h(A)=B$ es abierto en $\mathcal{D}$. Es decir, h es continua y abierta.

<u>4.10 - Ejemplos</u>:

1.- Sea (X,T) un espacio topológico y $id:X \to X$ la función identidad. La topología cociente en X inducida por id, T_{id}, está dada por: $A \in T_{id}$ si y solo si $id^{-1}(A) \in T$. Como $A = id^{-1}(A)$, entonces resul-

ta que $T_{id}=T$. Del Teorema 4.9 se tiene que el espacio partición $\mathcal{D} = \{\{x\}:x \in X\}$ es homeomorfo a X.

2.- Del ejemplo 4.4 sabemos que el círculo unitario S^1 con la topología relativa inducida por la topología usual en $\mathbb{R}^2$ coincide con la topología cociente en S^1 inducida por la función $x \xrightarrow{f} (\cos 2\pi x, \text{ sen } 2\pi x)$, definida sobre el intervalo $[0,1]$.

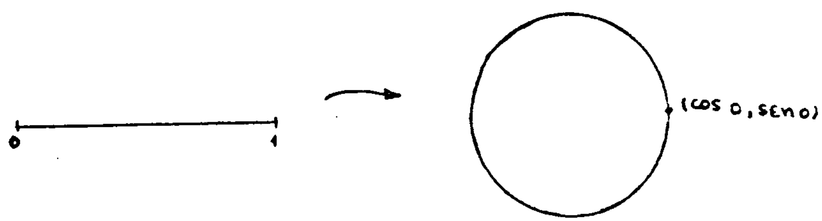
La relación de equivalencia en $[0,1]$ definida por $f: x \sim y \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f^{-1}(y)$, nos determina la siguiente partición: $=\{\{x\}:x \in (0,1)\} \cup \{\{0,1\}\}$. Es decir $x \sim y \Leftrightarrow x=0$ y $y=1$ o $x=y$.

Todo esto lo expresamos diciendo que el círculo es obtenido de $[0,1]$ identificando los puntos extremos. (Ver Figura 11).

En los ejemplos que siguen, cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología relativa inducida por la topología usual en $\mathbb{R}^n$.

3.- Consideremos en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$; la partición $\mathcal{D}$ dada por los conjuntos formados por un solo punto (x,y) si $x \in \{0,1\}$ y y por los conjuntos de la forma $\{(0,y),(1,y)\}$.

El espacio partición (o espacio cociente) $(\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo al cilindro $S^1 \times [0,1]$.



<u>Figura 11</u>.

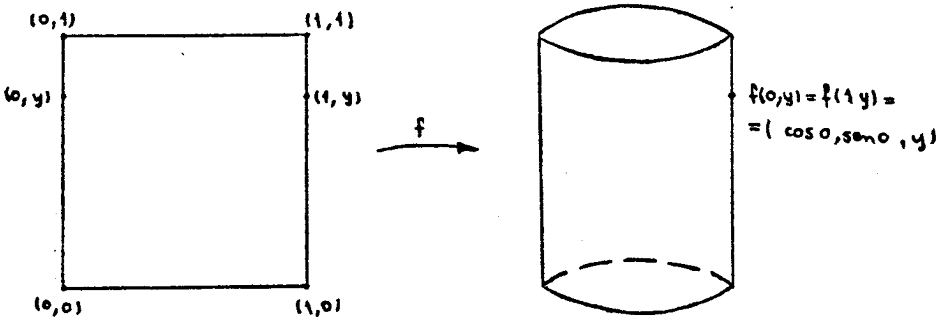


Figura 12.

En efecto, la topología usual en el cilindro coincide con la topología cociente definida por la función $f:[0,1]\times[0,1]\to S^1\times[0,1]$ dada por $f(x,y)=((\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x),y)$. (Ver Figura 12.)

4.- El espacio cociente $(S^1 x S^1, T_f)$ donde $f:[0,1]\times[0,1]\to S^1 x S^1$ es la función dada por $f(x,y)=((\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x),(\cos 2\pi y,\ \operatorname{sen} 2\pi y))$. Se puede mostrar que T_f coincide con la topología usual en $S^1 x S^1$. Del Teorema 4.9 este espacio resulta ser homeomorfo al espacio partición $(\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}})$ donde

$\mathfrak{D}=\{\{(0,y),(1,y)\}:0\leq y\leq 1\}\cup\{\{(x,0),(x,1)\}:0\leq x\leq 1\}\cup\{\{(x,y)\}:0<x<1,0<y<1\}$.

(Ver figura 13).

Este espacio es llamado el Toro.

5.- Consideremos ahora la siguiente partición en $[0,1]\times[0,1]$,

$=\{\{(x,0),(1-x,1)\}:0\leq x\leq 1\}\cup\{\{(x,y)\}:0\leq x\leq 1,0<y<1\}$.

El espacio partición $(\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}})$ es llamado la banda de Moebius. (Ver figura 14).

6.- Sea X un espacio topológico. Sea en $X\times[0,1]$ la partición que tiene como elementos los conjuntos de la forma $\{(x,t)\}$ con $x\in X$ y $t\in[0,1)$ y además el elemento $X\times\{1\}$ induce un espacio cociente llamado el cono de X y denotado por Con(X). (Ver figura 15).

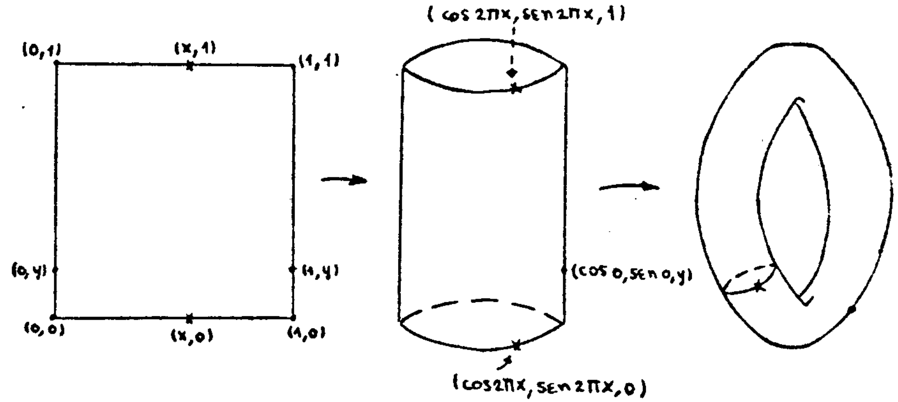


Figura 13.

7.- El espacio cociente obtenido por la partición en $X\times[0,1]$ cuyos elementos son los conjuntos de la forma $\{(x,t)\}$ tales que $x\in X$, $t\in(0,1)$ y además los elementos $X\times\{0\}$, $X\times\{1\}$, es llamado la suspensión de X y denotado por $S(X)$. (Ver figura 16).

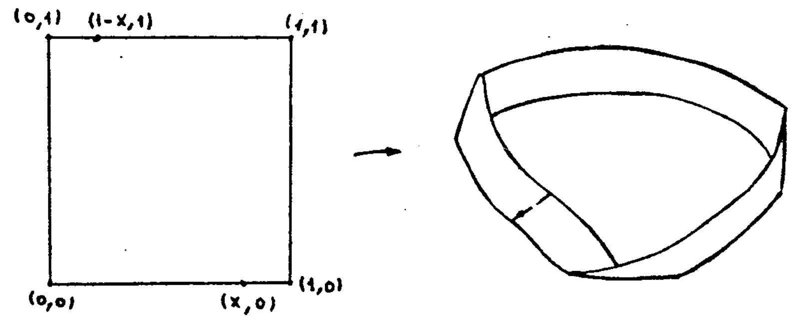


Figura 14.

4.11 - Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores y en las figuras 11 a la 16, intuitivamente se obtiene un espacio cociente de un espacio dado al "pegar" o "identificar" unos puntos con otros. Como en el caso del ejemplo 4.10.2. (Ver Figura 11).

El resultado que se da en este ejemplo se podría traducir en un lenguaje ingénuo de la siguiente manera: Se puede construir un círculo a partir de un segmento de línea, pegando sus extremos. Es importante tener presente esta idea pues así el concepto de espacio cociente pierde parte de su apariencia compleja y gana en naturalidad.

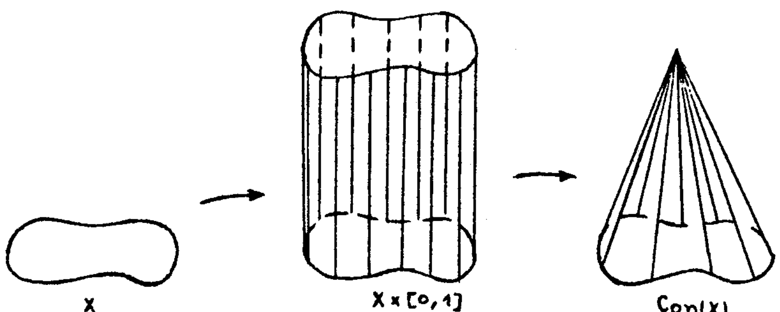


Figura 15.

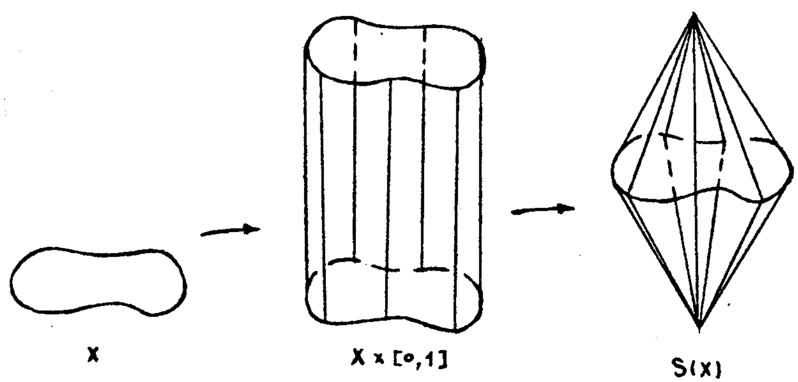


Figura 16.

4.12 - Nota. A cualquier conjunto Y con la topología cociente definida por un espacio (X,T) y por una función $f:X \to Y$ le llamaremos también espacio cociente de X. Del Teorema 4.9 cualquier espacio partición que hemos denotado por $\mathcal{D}$ o por $X/\sim$ es un espacio cociente de X. Con esta terminología, la notación $X/\sim$ resulta ser la más sugestiva.

EJERCICIOS - CAPITULO III

Sección 1.

1.1 - Hacer la demostración del Teorema 1.1.

1.2 - Demostrar el inciso (b) del Teorema 1.4 y el Teorema 1.9.

1.3 - Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la topología T definida en el ejercicio 5.3 del capítulo I, y sea $j:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ la inclusión: $j(n)=n$.
¿Cuál es la topología en $\mathbb{N}$ inducida por j y T?

1.4 - Sea $(\mathbb{N},T)$ el espacio descrito en el ejercicio 1.3 del Cap. I y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ dada por $f(x)$=menor natural n tal que $|x|\leq n$. Describa la topología ${}_fT$ en $\mathbb{R}$.

1.5 - Demostrar que si $\mathbb{R}$ tiene la topología definida en el ejercicio 5.3 del primer capítulo y f es la función definida en el ejercicio anterior, entonces T_f es la topología indiscreta en $\mathbb{N}$. ¿Cómo es esta topología si consideramos en $\mathbb{R}$ la topología T donde

(a) T es la topología usual.

(b) T es la topología definida en el ejercicio 1.6 Cap. I.

1.6 - Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y Y el conjunto de los reales. Describa los conjuntos abiertos del espacio (Y,T_f), en donde $f:\mathbb{R}\to Y$ está definida como $f(x)=|x|$.

Sección 2.

2.1 - Sea (X,T) un espacio topológico y $E\subseteq X$. Sean F y ${}_jF$ las colecciones de cerrados en (X,T) y $(E,{}_jT)$ respectivamente.

Demostrar (a) ${}_jT\subseteq T \Leftrightarrow E\in T$

(b) ${}_jF\subseteq F \Leftrightarrow E\in F$

Este resultado es equivalente al Teorema 2.7.

2.2 - Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$ y $x_o\in E$. $x_n\to x_o$ en E si y solo si $x_n\to x_o$ en X.

2.3 - Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual

(a) Demuestre que la topología relativa de cualquier conjunto finito en $\mathbb{R}$, es la topología discreta.

(b) Describa los elementos de la topología relativa de $\mathbb{Q}$.

2.4 - Sea $(\mathbb{N},T)$ como en el ejercicio 1.3 Cap. I. Describa las topologías relativas de los siguientes subconjuntos:

(a) El conjunto de números pares.

(b) $\{1,\dots,n\}$

(c) $E\subseteq\mathbb{N}$ finito

(d) $E\subseteq\mathbb{N}$ infinito

2.5 - Hacer el mismo análisis del problema anterior pero considerando ahora la topología en $\mathbb{N}$ definida en el Ejercicio 1.4 Cap. I.

2.6 - Sea X un conjunto infinito y T la topología co-finita en X. Determine la topología relativa en $E\subseteq X$, cuando

(a) E es finito

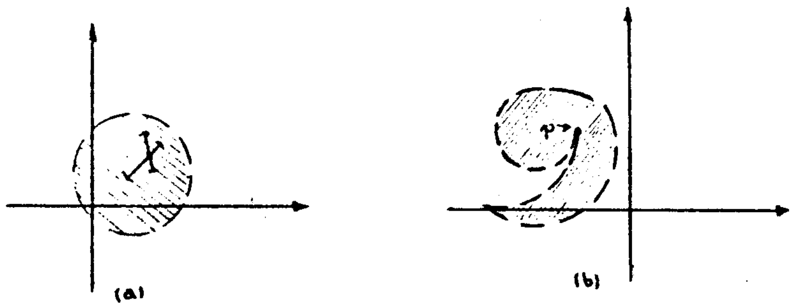
(b) E es infinito

2.7 - Un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es radialmente abierto si y solo si contiene un segmento abierto de línea en cada dirección al rededor de cualquiera de sus puntos. (Ver Figura 17). Demostrar que

(a) La colección de conjuntos radialmente abiertos y el conjunto vacio, forman una topología en $\mathbb{R}^2$.

(b) Esta topología es estrictamente más fina que la topología usual.

(c) La topología relativa del círculo con respecto a esta topología es la topología discreta.



Aquí se muestran dos conjuntos radialmente abiertos. Las líneas punteadas significan que no se estan considerando los bordes como parte del conjunto. En (b) el punto p pertenece al conjunto.

Figura 17.

Sección 3.

3.1 - Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y $E_1 \subseteq X_1$, $E_2 \subseteq X_2$. Demuestre que en el producto topológico $X_1 x X_2$, se satisface:

(a) $c(E_1 x E_2) = c(E_1) x\ c(E_2)$

(b) $i(E_1\ x\ E_2) = i(E_1)\ x\ i(E_2)$

(c) $Fr(E_1\ x\ E_2) = [Fr(E_1)\ x\ c(E_2)] \cup [c(E_1)\ x\ Fr(E_2)]$.

3.2 - Sea $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos y para cada $\alpha \in A$, sea $\mathcal{B}_\alpha$ una base para T_α, entonces se tiene que

(a) La colección $\mathcal{U} = \{p_\alpha^{-1}(B_\alpha) : B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, \alpha \in A\}$ es una sub-base para la topología producto.

(b) La colección de conjuntos de la forma $\prod_{\alpha \in A} B_\alpha$ donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para una colección finita de índices F y $B_\alpha = X_\alpha$ para toda $\alpha \notin F$, forma una base para el producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(c) Los conjuntos abiertos en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ son de la forma $\prod_{\alpha \in A} B_\alpha$ donde B_α es un conjunto abierto propio de X_α para una colección finita de índices F y $B_\alpha = X_\alpha$ para toda $\alpha \notin F$.

3.3 - Describa la topología producto X x X, en donde X es la linea de Sorgenfrey. (Ver ejercicio 1.6 Cap. I).

3.4 - Sea ΠX_α un producto no vacio de espacios topológicos y para cada α sea a_α un punto fijo en X_α. Demostrar que el sub-espacio $Y_\beta = \{x \in \Pi X_\alpha : x_\alpha = a_\alpha$ si $\alpha \neq \beta$ y $x_\beta \in X_\beta\}$ es homeomorfo a X_β.

Sección 4.

4.1 - Verifique que si $\mathcal{D}$ es una partición de un espacio topológico X, entonces $T_{\mathcal{D}}$ satisface las condiciones que definen una topología.

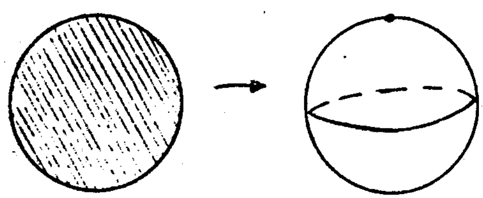
4.2 - Demostrar que toda partición en un conjunto X induce una relación de equivalencia en X y vice-versa. (Sugerencia: $x \sim y \Leftrightarrow$ x,y estan en el mismo elemento de la partición).

4.3 - Sea Y un espacio con la topología cociente definida por la función $f: X \to Y$. Pruebe que un subconjunto F de Y es cerrado si y solo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

4.4 - Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia:

$(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2)$ si y solo si $x_2=y_2$. Entonces $\mathbb{R}^2/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

4.5 - Sea D^n la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$; es decir, $D^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:(\sum_i x_i^2)^{1/2}\leq 1\}$ y S^{n-1} la esfera unitaria: $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:(\sum_i^n x_i^2)^{1/2}=1\}$. Consideremos en D^n la partición $\mathcal{D}$ cuyos elementos son los conjuntos de un solo elemento $\{\bar{x}\}$ si $\bar{x}\in D^n-S^{n-1}$ y el conjunto S^{n-1}:
$\mathcal{D}=\{\{\bar{x}\}:\bar{x}\in D^n-S^{n-1}\}\cup\{S^{n-1}\}$
Demostrar que el espacio partición $(\mathcal{D},T_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$. (Ver figura 18).



Aquí se muestra el resultado del ejercicio 4.4 para el caso n=2. Haciendo hincapié en lo expuesto en la observación 4.11, vemos que nuestro resultado lo podemos expresar diciendo: Se obtiene una esfera a partir de un disco, uniendo todos los puntos del borde.

Figura 18

4.6 - Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente partición $\mathcal{D}=\{C_r:r\in[0,\infty)\}$ donde C_r es la circunferencia con centro en el origen y radio r. Demuestre que $\mathcal{D}$ es homeomorfo a $[0,\infty)$.

CAPITULO IV

AXIOMAS DE NUMERABILIDAD Y AXIOMAS DE SEPARACION

INTRODUCCION

Los espacios topológicos, como hemos visto hasta ahora, constituyen una estructura de alto grado de generalidad. En este capítulo iremos adicionando axiomas a aquellos que determinan una topología para obtener clases de espacios topológicos que satisfagan propiedades convenientes. En particular, una de las motivaciones de llevar a cabo tal experiencia, es la posibilidad de obtener propiedades fuertes como aquellas que poseen los espacios Euclidianos o más generalmente, los espacios métricos, utilizando menos axiomas que aquellos que definen a estos espacios.

En las dos primeras secciones, veremos algunas propiedades de suma importancia en donde la numerabilidad juega un papel importante. Espacios topológicos cuya topología puede ser determinada con solo una colección numerable de abiertos; espacios cuyos elementos se adhieren a un subconjunto numerable y espacios tales que para cada punto x, es posible encontrar una colección numerable de abiertos que determina completamente la relación de cercanía o lejanía con respecto a los demas puntos.

En las secciones posteriores estudiaremos los llamados axiomas de separación. Es decir, analizaremos espacios topológicos que poseen una cantidad suficiente de abiertos y con una disposición tal que nos permiten reproducir, como dijimos al principio de esta introducción, propiedades importantes de espacios, tales como la recta real, los espacios de funciones y en general los espacios métricos.

Sección 1. - Conjuntos densos y separabilidad.

En los cursos de Cálculo y Análisis se analizan las propiedades que los números racionales poseen dentro del conjunto de números reales. En esos cursos como ya se ha hecho notar, se considera siempre a $\mathbb{R}$ con lo que hemos llamado aquí, la topología usual que es igual a la topología definida por la distancia $d(x,y)=|x-y|$. Una de esas propiedades de los números racionales se expresa diciendo:

Dados $x,y\in\mathbb{R}$ con $x<y$, existe un número racional r tal que $x<r<y$. Esta propiedad la expresamos diciendo: El conjunto de números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

Esta propiedad la podemos expresar de la siguiente manera: Dado cualquier intervalo abierto (x,y), se tiene que

$$(x,y)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$$

Vamos ahora a definir el concepto de densidad en espacios topológicos cualesquiera.

1.1 - Definición: Un subconjunto D de un espacio topológico (X,T), decimos que es denso en X si para todo abierto diferente del vacio $A\subseteq X$, $A\cap D\neq\emptyset$.

De la definición de base de una topología resulta que para constatar que $D\subseteq X$ es denso, es suficiente tener $D\cap A\neq\emptyset$ para toda $A\in\mathcal{B}$, en donde $\mathcal{B}$ es una base de X.

1.2 - Ejemplos:

1.- En efecto, el conjunto de los racionales es un conjunto denso en $\mathbb{R}$, ya que $\mathbb{Q}\cap(a,b)\neq\emptyset$ para cualquier intervalo abierto (a,b).

2.- Es facil ver que si J es cualquier intervalo abierto, cerrado o semi-cerrado, entonces $J\cap\mathbb{Q}$ es denso en J (Se puede ver

el ejercicio 1.7).

3.- Del Teorema de Stone Weierstrass resulta que el conjunto de polinomios con coeficientes racionales es un conjunto denso en $L^{\infty}([0,1])$. (Para una demostración de esta afirmación consultar [4] o [17]).

4.- Si $X=\{a,b,c\}$ y $T=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ entonces $\{a,b\}$ es denso en X ya que este conjunto intersecta a cualquier elemento de T diferente del vacio.

5.- Si (X,T) es un espacios indiscreto, entonces es claro que para cualquier $x\in X$, $\{x\}$ es un conjunto denso en X. Si por el contrario (X,T) es discreto, entonces el único subconjunto denso de X es él mismo, ya que si $E\subseteq X$ y $E\neq X$ entonces para cualquier $x\in X-E$, $\{x\}$ es abierto y $\{x\}\cap E=\emptyset$; es decir, E no es denso en X.

6.- Sea X un conjunto infinito, y consideremos en él la topología cofinita. Es decir: $T=\{\emptyset,X\}\cup\{E\subseteq X: X-E$ es un conjunto finito$\}$. En este espacio, cualquier subconjunto D infinito es denso ya que si $A\subseteq X$ abierto y $A\cap D=\emptyset$ entonces $D\subseteq X-A$; es decir, D sería finito, lo que no es posible.

1.3 - Teorema: Sea (X,T) un espacio topológico y $D\subseteq X$. D es denso en X si y solo si $c(D)=X$.

Demostración: Supongamos que D es denso en X y sea $x\in X$ cualquiera. Si $V\in\mathcal{V}(x)$, entonces existe A abierto tal que $x\in A\subseteq V$. Por la definición de densidad, resulta que $A\cap D\neq\emptyset$. Es decir $V\cap D\neq\emptyset$. Por lo tanto x es un punto adherente de D: $c(D)=X$.

Supongamos ahora que $c(D)=X$ y que A es un conjunto abierto en X diferente del vacio. Sea $x\in A$, A es una vecindad de x y como $x\in c(D)$, entonces $A\cap D\neq\emptyset$. Es decir, todo abierto intersecta a D o en otras palabras D es denso en X.

1.4 - Definición: Un espacio topológico (X,T) es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

1.5 - Ejemplos:

1.- De los ejemplos 1, 2, 3 y 6 del 1.3 tenemos que $\mathbb{R}$ con la topología usual, $L^{\infty}([0,1])$ y X con la topología cofinita son espacios separables. (Recuerde que la reunión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable. Vea el Capítulo Preliminar).

2.- Como todo espacio X es denso en si mismo $(c(X)=X)$, entonces cualquier espacio numerable es separable.

3.- Del ejemplo 1.3.5 resulta que cualquier espacio indiscreto es separable y un espacio discreto lo es si y solo si es numerable.

1.6 - Teorema:

(a) Sean X y Y dos espacios topológicos y $f:X\to Y$ continua y suprayectiva. Si $D\subseteq X$ es denso, entonces $f(D)$ es denso en Y. En particular, si X es separable, Y lo es.

(b) Sea $D\subseteq X$ denso y $E\subseteq X$ abierto en X, entonces $E\cap D$ es denso en el subespacio E. Así cualquier subconjunto abierto de un espacio separable es separable.

(c) Un subconjunto D de un producto de espacios $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ es denso, si es de la forma $\prod_{\alpha\in I}D_\alpha$, donde D_α es denso para toda $\alpha\in I$ y por lo tanto si I es numerable, X_α es separable para toda α si y solo si $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ es separable.

Demostración:

(a) Sea $A\subseteq Y$ abierto. Como f es una función continua, $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X y por lo tanto $f^{-1}(A)\cap D\neq\emptyset$. Si x está en esta intersección, entonces $f(x)\in f(D)\cap A$.

(b) Sea $A\subseteq E$ abierto cualquiera en E. Como E es abierto en X, entonces A es abierto en X y por lo tanto $A\cap D\neq\emptyset$. Así resulta que $D\cap E$ es denso en E.

(c) Sea $D=\prod_{\alpha\in I}D_\alpha$, donde D_α es denso en X_α para cada $\alpha\in I$ y sea $A\subseteq\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ un conjunto abierto del producto. Del ejercicio 3.2 (c) Cap. III resulta que A es de la forma $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$, donde A_α es un conjunto abierto en X_α para toda $\alpha\in I$. Así resulta que $A_\alpha\cap D_\alpha\neq\emptyset$ para cada $\alpha\in I$ y si $x_\alpha\in A_\alpha\cap D_\alpha$ entonces el elemento en $\prod X_\alpha$ cuya α-ésima cordenada es x_α pertenece a $D\cap A$.

En el caso en que I es numerable y cada X_α es separable, entonces $\prod_{\alpha\in I}D_\alpha$ es denso y numerable en $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$, donde D_α es un subconjunto denso numerable en X_α. Por otro lado, si $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ es separable y $D\subseteq\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ denso y numerable, entonces como cada proyección es continua y suprayectiva, del inciso (a), resulta que $p_\alpha(D)$ es denso y naturalmente numerable en X_α. Es decir X_α es separable para cualquiera que sea α.

1.7 - Ejemplos:

1.- Del Teorema anterior, resulta que $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso en $(\mathbb{R}^n, T_{\mathbb{R}^n})$, y este espacio es separable.

2.- No todo subconjunto de un espacio separable es separable:

Sea X un conjunto más que numerable y x_0 un punto fijo en X. La colección $T=\{\emptyset\}\cup\{E\subseteq X: x_0\in E\}$ es una topología en X y es claro que el conjunto $\{x_0\}$ es denso en X y por lo tanto X es separable. Sin embargo, el subespacio $X-\{x_0\}$ es discreto y más que numerable. De 1.3.5, $X-\{x_0\}$ no es separable. Observe que $X-\{x_0\}$ no es abierto en X.

3.- Si X es un espacio separable, cualquier espacio cociente de X (Ver sección 4 Cap. III y en particular la nota 4.12 de esa sección) es separable ya que en particular es imagen continua de X.

Sección 2. Espacios Primero Numerables y Espacios Segundo Numerables.

En esta sección veremos dos clases importantes de espacios que están determinadas, como en el caso de los espacios separables, en función del concepto de numerabilidad.

2.1 - Definición: 1.- Un espacio topológico (X,T) se dice que es primero numerable si existe una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ numerable para cada $x \in X$. (Ver definición 4.11 Cap. I).

2.- X se dice que es segundo numerable si tiene una base numerable.

2.2 - Observación:

1.- En el 4.12(b), haciamos notar que si $\mathcal{B}$ es una base para un espacio topológico (X,T), entonces para cualquier $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una base de vecindades de x. De aqui resulta que si $\mathcal{B}$ es numerable, entonces cada $\mathcal{B}_x$ lo es. Es decir, cualquier espacio segundo numerable es primero numerable.

2.- Sea (X,T) un espacio segundo numerable y $\mathcal{B}$ una base para T, numerable. Para cada $B \in \mathcal{B}$ escojamos $x_B \in B$. Entonces $D = \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$ es un conjunto denso en X, ya que cualquier conjunto abierto A en X contiene por lo menos un elemento B en $\mathcal{B}$ y por lo tanto $x_B \in D \cap A$. Asi resulta que cualquier espacio segundo numerable es separable.

2.3 - Ejemplos:

1.- Del ejemplo 4.13.1 Cap. I resulta que cualquier espacio métrico es un espacio primero numerable. En particular $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$, con la topología usual y los espacios $L^2([0,1])$, $L^\infty([0,1])$ son espacios primero numerable.

2.- Sea X cualquier conjunto con la topología discreta. Para cada $x \in X$, establezcamos $B_x = \{\{x\}\}$. Entonces B_x es una base de vecindades de x. Así X es primero numerable (B_x consta de un solo elemento).

Sabemos que cualquier base para la topología discreta en X contiene la colección $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ (Ver 4.6 Cap. I) de tal manera que un espacio discreto es segundo numerable si y solo si X es numerable. (En particular $\mathcal{B}$ es una base).

3.- Consideremos la pareja (X,T), donde X es un conjunto más que numerable y T la topología cofinita. Este no es un espacio primero numerable:

En efecto si $x \in X$ posee una base de vecindades numerables $\mathcal{B}_x$, es facil constatar que $\{x\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B$, por lo tanto $X - \{x\} = X - \bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_x} (X - B)$. Como cada $X - B$ es un conjúnto finito y $\mathcal{B}_x$ es una familia numerable, entonces $X - \{x\}$ es numerable, lo que contradice nuestra hipótesis: X es más que numerable. De tal manera que no podemos encotrar para ningún punto en X una base de vecindades numerable. En particular (X,T) no es primero numerable.

2.4 - De las observaciones hechas en 2.2 y del ejemplo 2.3.1, surgen varias preguntas:

- ¿Existirán espacios primero numerables que no sean segundo numerables?

- ¿Existirán espacios separables que no sean segundo numerables?

- ¿Cualquier espacio métrico es segundo numerable?

La respuesta a la primera de las preguntas es afirmativa. Por ejemplo, un conjunto X más que numerable con la topología discreta es un espacio primero numerable, pero no es segundo numerable. Vea ejemplo 2.3.2.

La respuesta a la segunda pregunta es también afirmativa. Veamos un ejemplo:

En $X=\mathbb{R}$, (o cualquier otro conjunto más que numerable), consideremos la topología cofinita T. Del ejemplo 1.3.6 de la sección anterior, sabemos que X con esta topología es un espacio separable pero no es segundo numerable, ya que si lo fuera entonces sería primero numerable (Observación 2.2.1), pero no lo es. (Ejemplo 2.3.3).

La tercera de nuestras preguntas es respondida por el siguiente Teorema:

2.5 - Teorema: Un espacio métrico X es segundo numerable si y solo si es separable.

Demostración: De 2.2.2 sabemos que si X es segundo numerable, entonces es separable. Nos queda por ver pues que cualquier espacio métrico separable es segundo numerable.

Sea $D\subseteq X$ denso y numerable. Vamos a demostrar que el conjunto numerable $\mathcal{B}=\{B_r(p): p\in D, r\in\mathbb{Q}\}$ es una base para X.

Sea $A\subseteq X$ abierto y $x\in A$. Como la colección de bolas abiertas forma una base para X, existe un real positivo t, que satisface $B_t(x)\subseteq A$. Sea s un racional tal que $0<3s<t$. Como D es denso en X. existe un punto $p\in D\cap B_s(x)$. Sea $B=B_{2s}(p)$. entonces $p\in B$ y además si $y\in B$. $d(y,x)\leq d(y,p)+d(p,x)<s+2s=3s<t$ donde d es la distancia en X. Esto significa que $y\in B_t(x)\subseteq A$. Por lo tanto $p\in B\subseteq A$ y como $B\in\mathcal{B}$ queda demostrado que $\mathcal{B}$ es una base para la topología en X.

2.6 - Ejemplo:

Como los espacios $\mathbb{R}^n$ son métricos y separables, entonces son segundo numerables: Las bolas abiertas con centro en puntos de coordenadas racionales y radio racional, forman una base numerable.

En los siguientes dos importantes teoremas, se demuestra que la noción de sucesión introducida en el Capítulo II es bastante satisfactoria en espacios primero numerables (Ver 2.6 Cap. II).

2.7 - Teorema: Si X es primero numerable y $E\subseteq X$, entonces $x_0\in c(E)$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en E, la cual converge a x_0.

Demostración: Supongamos que $x_0\in c(E)$ y sea $\mathcal{B}'_{x_0}=\{B'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de x_0, numerable. Sea $B_1=B'_1$, $B_2=B'_1\cap B'_2$ y en general $B_n=\bigcap_{i=1}^{n}B'_i$. Así tenemos que $\mathcal{B}_{x_0}=\{B_1,\ldots,B_n\ldots\}$ es una base de vecindades de x_0, numerable y $B_n\supseteq B_{n+1}$ para toda n. Como $x_0\in c(E)$, $E\cap B_n\neq\emptyset$ para cada n. Si $x_n\in E\cap B_n$ entonces es claro que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en E y tal que $x_n\to x_0$. Como cualquier vecindad de x_0 contiene elementos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces intersecta a E, es decir $x_0\in c(D)$.

2.8 - Teorema: Sea X un espacio primero numerable y $f:X\to Y$ una función en donde Y es un espacio topológico arbitrario.

f es continua en un punto $x_0\in X$ si y solo si para cualquier sucesion $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a x_0 en X, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$ en Y.

Demostración: La condición es necesaria por el Teorema 2.5 Cap. II. Supongamos ahora que f no es continua en x_0. Así debe existir un conjunto abierto B conteniendo a $f(x_0)$ tal que $f(A)\cap(Y-B)\neq\emptyset$ para cualquier conjunto abierto A que contenga a x_0. Como X es primero numerable, podemos considerar una base de vecindades de x_0, numerable $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y decreciente (como se hizo en la demostración del Teorema anterior). Así $B_1\supseteq B_2\supseteq\ldots$ Para cada n, $f(B_n)\cap(Y-B)\neq\emptyset$. Sea $y_n\in f(B_n)\cap(Y-B)$. Como $y_n\in f(B_n)$, existe $x_n\in B_n$ tal que $f(x_n)=y_n$. Resulta que $x_n\to x_0$ ya que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de x decreciente. Sin embargo, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x_0)$ ya que $f(x_n)\in Y-B$ para toda n.

2.9 - El espacio cociente de un espacio segundo numerable o primero numerable no hereda necesariamente estas propiedades. Veamos un ejemplo:

Sea J_n una copia del intervalo $[0,1]$ con su topología usual (es decir, su topología relativa con respecto a la recta. Ver Ejemplo 2.4 Cap. III) y sea X el espacio suma $\bigcup_{n\in N} J_n$ de los espacios ajenos J_n. (Vea ejemplo 1.11.2 y figura 10). Como cada J_n es segundo numerable (y por lo tanto primero numerable) si $\mathcal{B}_n$ es una base numerable de J_n, $\mathcal{B}=\bigcup \mathcal{B}_n$ es una base numerable en X, por lo tanto X es segundo numerable (y primero numerable).

Sea Z el espacio cociente de X que se obtiene al identificar los puntos extremos izquierdos de cada J_n. (Ver figura 19). Este espacio ya no es primero numerable (y por lo tanto ya no es segundo numerable). Veamos porqué: Sea p_o la clase de equivalencia de todos los puntos extremos izquierdos y sea $\mathcal{B}_{p_o}=\{B_1,\dots,B_n,\dots\}$ una colecciómn numerable de abiertos conteniendo a p_o. Vamos a demostrar que no puede ser una base de vecindades de p_o. Para esto constuiremos un abierto que contenga a p_o y que no contenga a ninguno de los elementos de $\mathcal{B}_{p_o}$.

Si $p:X\to Z$ es la proyección natural, para cada $B_i\in\mathcal{B}_{p_o}$, tenemos que $p^{-1}(B_i)\cap J_n$ es un conjunto abierto en $[0,1]$ que contiene a 0 para toda n. En particular $p^{-1}(B_i)\cap J_i$. Sea A_i una vecindad del 0 tal que $0\in A_i\subseteq p^{-1}(B_i)\cap J_i$ y $A_i\neq p^{-1}(B_i)\cap J_i$.

El conjunto $\bigcup_{i\in N} A_i$ es abierto en X y $p(\bigcup_{i\in N} A_i)$ es un conjunto abierto en Z que contiene a p_o. Sin embargo no existe ningún elemento de $\mathcal{B}_{p_o}$ contenido en $p(\bigcup_{i\in N} A_i)$, ya que si

$B_n\subseteq p(\bigcup A_i)\Rightarrow p^{-1}(B_n)\subseteq\bigcup_{i\in N} A_i\Rightarrow p^{-1}(B_n)\cap J_n\subseteq A_n$, lo que es una contradicción. Esto muestra, pues, que no existe ninguna base local de vecindades del punto p_o en Z; es decir, Z no es primero numerable y por ende no es segundo numerable.

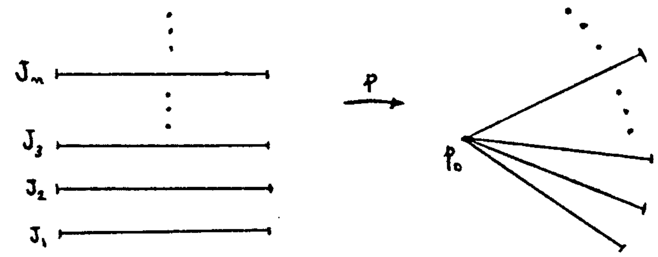


Figura 19

La demostración del último Teorema de esta Sección, se deja al lector.

2.10 - Teorema:

a) La imagen continua y abierta de un espacio segundo numerable es segundo numerable.

b) La imagen continua y abierta de un espacio primero numerable es primero numerable.

c) Cualquier subespacio de un espacio primero numerable es primero numerable.

d) Todo subespacio de un segundo numerable es segundo numerable y de aquí, separable.

e) El espacio producto de una familia numerable de espacios no vacios es segundo numerable si y solo si cada espacio factor es segundo numerable.

2.11 - Definición:

Sea P una propiedad aplicable a espacios topológicos.

(a) Se dice que P es una propiedad hereditaria si cada vez que un espacio X satisface P, entonces cualquier subespacio de X la satisface también.

(b) Se dice que P es una propiedad topológica si cada vez que un espacio X satisface P entonces cualquier espacio homeomorfo a X satisface P.

En particular, si P es una propiedad tal que si X posee P entonces cualquier imagen continua de X satisface P,, entonces P es una propiedad topológica.

Asi resulta que primero numerable, segundo numerable y separable son propiedades topológicas y solo las dos primeras son propiedades hereditarias.

Sección 3. - Espacios T_0, T_1, T_2.

3.1 - Definición: Un espacio topológico (X,T) será llamado T_0 si dados dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$, existe $A \in T$ tal que A contiene a uno de ellos pero no al otro.

3.2 - Ejemplos:

1.- Sea $(\mathbb{N},T)$ como en el ejercicio 1.3 del Cap. I; es decir, $T=\{\emptyset,\mathbb{N}\}\cup\{\{1,2,\dots,n\},\ n\in\mathbb{N}\}$. Este espacio es T_0 ya que si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y digamos que $n_1 < n_2$, $\{1,2,\dots,n_1\}$ es un abierto que contiene a n_1 pero no a n_2.

2.- Es facil ver que cualquier espacio indiscreto con más de un punto no es un espacio T_0.

3.- Subespacio y producto de espacios T_0 son espacios T_0. Verifíquelo. (Ver ejercicio 3.1).

3.3 - Teorema: Un espacio topológico (X,T) es T_0 si y solo si las cerraduras de puntos distintos, son distintas.

Demostracion: Sean x,y puntos distintos de X y supongamos que $c(\{x\})\neq c(\{y\})$. Entonces digamos, existe $t\in c(\{x\})$ tal que $t\notin c(\{y\})$. Esto implica que $x\notin c(\{y\})$, pues si $x\in c(\{y\})$, $c(\{x\})\subseteq \subseteq c(c(\{y\})=c(\{y\})$, de donde $t\in c(\{y\})$, en contradicción con lo supuesto. En consecuencia $x\notin c(\{y\})$ y asi $X-c(\{y\})$ es un abierto que contiene a x pero no a y. Por otra parte, supongamos que (X,T) es un espacio T_0, y sean x y y puntos distintos de X. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $A\in T$ tal que $x\in A$ y $y\notin A$. Entonces $y\in X-A$ y $c(\{y\})\subseteq X-A$. En consecuencia $x\notin c(\{y\})$; es decir, $c(\{x\})\neq c(\{y\})$, y el Teorema está demostrado.

3.4 - Definición: Un espacio topológico (X,T) se llama T_1 si dados dos puntos distintos cualesquiera $x,y\in X$ existen dos abiertos A_1, A_2 tales que $x\in A_1-A_2$ y $y\in A_2-A_1$. (Ver figura 20).

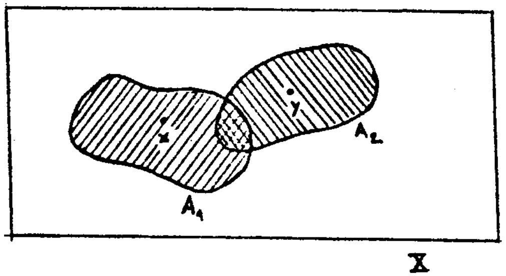


Figura 20

3.5 - Observación:

1.- De la definición 3.4 es inmediato que todo espacio T_1 es T_0. Ademas es facil probar que la propiedad de ser T_1 es una propiedad hereditaria y una propiedad topológica. (Ver ejercicio 3.4).

2.- No todo espacio T_0 es un espacio T_1. El espacio del ejemplo 3.2.1 es un espacio T_0 pero no es T_1 ya que si n_1 y $n_2 \in \mathbb{N}$ distintos y si $n_1 < n_2$, entonces cualquier abierto que contiene a n_2 contiene también a n_1.

3.6 - Ejemplo:

Sea X cualquier conjunto con más de un punto, con la topología cofinita. Si x y y son dos puntos cualesquiera de X, entonces $A_1 = X-\{x\}$ y $A_2 = X-\{y\}$ son dos abiertos tales que $x \in A_2$, $x \notin A_1$, $y \in A_1$ y $y \notin A_2$. Es decir X con la topología cofinita es un espacio T_1.

Es posible también obtener una caracterización sencilla de los espacios T_1:

3.7 - Teorema: Un espacio (X,T) es T_1 si y solo si cualquier subconjunto de X formado por un elemento, es cerrado.

Demostración: Sean x,y dos puntos distintos de X y supongamos de acuerdo a la hipótesis del Teorema que $\{x\}$ y $\{y\}$ son ambos cerrados. Entonces $X-\{x\}$ es un abierto conteniendo a y y no a x y

$X-\{y\}$ es un abierto que contiene a x y no a y. Esto muestra que X es T_1.

Recíprocamente, sea (X,T) un espacio T_1 y $x \in X$ cualquiera. Probaremos que $X-\{x\}$ es abierto. Sea $y \in X-\{x\}$. Como $x \neq y$, existe un abierto A_y tal que $y \in A_y$ y $x \notin A_y$. Luego $y \in A_y \subseteq X-\{x\}$. En consecuencia podemos escribir $X-\{x\} = \bigcup_{y \in X-\{x\}} A_y$ y por lo tanto $X-\{x\}$ es abierto pues es unión de conjuntos abiertos. El Teorema está demostrado. (Ver también ejercicio 3.5).

3.8 - Corolario: Todo subconjunto finito de un espacio T_1, es cerrado.

3.9 - Corolario: (X,T) es T_1 si y solo si T contiene a la topología cofinita en X.

Es hasta ahora, al introducir el concepto de espacio T_1, que empezamos a recuperar algunas de las propiedades familiares de $\mathbb{R}$. Por ejemplo:

3.10 - Teorema: Sea (X,T) un espacio T_1. $x \in X$ es un punto límite de $E \subseteq X$ si y solo si todo abierto conteniendo a x contiene una infinidad de puntos de E.

Demostracion: Sea (X,T) un espacio T_1, y x punto límite de $E \subseteq X$. Supongamos que A es abierto tal que $x \in A$ y $A \cap E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces, dado $x_i \in A \cap E$, existe G_i abierto tal que $x \in G_i$ y $x_i \notin G_i$. $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i \cap A$ es un abierto y claramente $x \in G$ pero $G \cap E = \emptyset$, luego x no es punto límite de E, contra lo supuesto. En consecuencia, cualquier abierto conteniendo a x, deberá contener una infinidad de puntos de E. El recíproco es obviamente cierto.

3.11 - Corolario: En un espacio T_1, un conjunto finito no posee puntos límites.

<u>3.12 - Definición</u>: Un espacio topológico (X,T) es llamado T_2 o espacio de Hausdorff si satisface: Dados dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$, existen $A_1, A_2 \in T$ tales que $x \in A_1, y \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

<u>3.13 - Ejemplos</u>:

1.- Cualquier espacio T_2 es un espacio T_1 y T_0.

2.- Cualquier espacio métrico es un espacio T_2: Si x y y son dos puntos diferentes del espacio métrico (X,d) y $d(x,y)=r$, entonces $B_{r/2}(x)$ y $B_{r/2}(y)$ son dos abiertos ajenos; el primero conteniendo a x y el segundo a y. En particular, los espacios $\mathbb{R}^n$, $L^2([0,1])$, $L^\infty([0,1])$ son espacios T_2. (Ver figura 2.1).

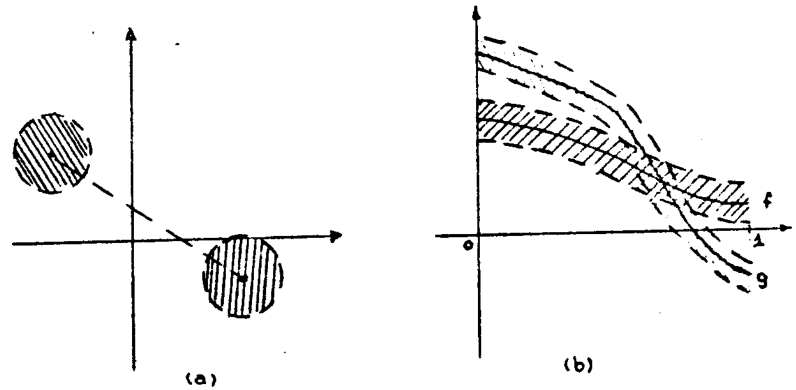
3.- Cualquier espacio discreto X es T_2, ya que si x,y son dos puntos diferentes en X, entonces $\{x\}$, $\{y\}$ son dos abiertos con las propiedades requeridas.

4.- Sea X infinito con la topología cofinita T. Si $A,B \in T$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$ ya que si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X-B$ es decir A finito, lo que no es posible. Por lo tanto X no es un espacio T_2. Sin embargo, es un espacio T_1 como mostramos en el ejercicio 3.5.1. Naturalmente, si X es finito, entonces X con la topología cofinita es un espacio discreto y por lo tanto T_2.

El comportamiento de la convergencia de sucesiones en espacios Hausdorff es sumamente satisfactoria. Es similar al de las sucesiones en $\mathbb{R}$ con la topología usual: Dada una sucesión convergente, <u>ésta converge a un solo punto</u>. En espacios no Hausdorff esto no necesariamente sucede. Veamos un ejemplo de un espacio en el cual cualquier sucesión converge a todos y cada uno de sus puntos.

Sea $(\mathbb{N},T)$ el espacio definido en el ejercicio 1.4 del Cap. I. Los conjuntos abiertos no vacios en $\mathbb{N}$ son de la forma $\{n,n+1,n+2,\ldots\}$. Es claro que cualquier pareja de estos conjuntos se

intersecta y por lo tanto, el espacio no es T_2. Si $\{x_n\}_n$ es una sucesión en $\mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ cualquiera, entonces todo abierto que contenga a n_0 contiene a toda la sucesión con excepción quizas de un número finito de puntos; es decir, n_0 es punto límite de $\{x_n\}_n$. Como n_0 es arbitrario, hemos mostrado lo que queríamos.



En (b) las franjas sombreadas significan las vecindades ajenas que separan a f y a g. Es claro que la gráfica de una función que se encuentre totalmente contenida en una de estas franjas, no estará contenida en la otra.

<u>Figura 2.1</u>.

<u>3.14 - Teorema</u>: Sea (X,T) un espacio T_2. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en X, entonces converge a un límite único.

<u>Demostración</u>: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en (X,T) espacio T_2, y supongamos que $x_n \to x$ y $x_n \to y$, $x \neq y$. Como X es T_2 existen dos abiertos ajenos $A_1, A_2 \in T$ tales que $x \in A_1$, $y \in A_2$. Por otro lado, por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y a y, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$

tales que si $n \geq N_1$, $x_n \in A_1$ y si $n \geq N_2$, $x_n \in A_2$. Si $n \geq \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow$ $x_n \in A_1 \cap A_2$ lo que contradice nuestra suposición anterior, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. En consecuencia $\{x_n\}_n$ converge a un límite único. O

En nuestro siguiente resultado, respondemos algunas de las preguntas naturales acerca de subespacios, espacios cocientes y producto de espacios T_2. En este caso desarrollaremos las demostraciones que pueden servir de guias para que el lector resuelva los ejercicios análogos concernientes a espacios T_0 y T_1.

3.15 - Teorema:

(a) T_2 es una propiedad hereditaria.

(b) Un producto no vacio de espacios es T_2 si y solo si cada factor es T_2.

Demostración:

(a) Sea X T_2 y $E \subseteq X$. Sean $x, y \in E$ diferentes. Existen A_1, A_2 abiertos en X y ajenos tales que $x \in A_1$, $y \in A_2$. Así resulta que $A_1 \cap E$, $A_2 \cap E$ son abiertos ajenos tales que $x \in A_1 \cap E$, $y \in A_2 \cap E$, es decir E es T_2. ($A_1 \cap E$, $A_2 \cap E$ abiertos en E).

(b) Supongamos que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios T_2, y sean $x, y \in \Pi X_\alpha$ dos puntos distintos. Como son diferentes, entonces existe un índice β tal que la β-ésima coordinada de x, x_β es diferente a la β-ésima coordenada de y, y_β. Como X_β es T_2 existen A_1, A_2 dos abiertos en X_β ajenos tales que $x_\beta \in A_1$, $y_\beta \in A_2$. Resulta entonces que $x \in p_\beta^{-1}(A_1)$, $y \in p_\beta^{-1}(A_2)$ y $p_\beta^{-1}(A_1) \cap p_\beta^{-1}(A_2) = \emptyset$. (Naturalmente estos conjuntos son abiertos en el producto).

Recíprocamente, si ΠX_α es un espacio T_2 no vacio y elijamos un punto fijo $a_\alpha \in X_\alpha$ para cada α. El subespacio $Y_\alpha = \{x \in \Pi X_\alpha : x_\beta = a_\beta$ si $\beta \neq \alpha$, y $x_\alpha \in X_\alpha\}$ es T_2 por el inciso (1) y es homeomorfo a X_α (Ver ejercicio 3.4 Cap. III), y por lo tanto X_α es T_2, para cada α. (Ver ejercicio 3.9 de éste capítulo).

3.16 -

(a) Como $\mathbb{R}$ es un espacio Hausdorff, entonces del Teorema 3.14 resulta que el espacio producto $\mathbb{R}^{[0,1]}$ es un espacio T_2. (Ver ejercicio 4.9 Cap. I y 3.3.3 Cap. III). En la figura 21 se muestran dos elementos en este espacio y dos vecindades que los separan.

(b) Consideremos en $C[0,1]$ la topología definida en el ejemplo 4.4.2 Cap. I. Como $C([0,1])$ con esta topología es subespacio de $\mathbb{R}^{[0,1]}$, entonces es también un espacio T_2. (Ver Figura 22).

3.17 - Observación:

1.- La imagen continua de un espacio T_2 no es necesariamente T_2. Cualquier función sobre de un T_2 en un espacio indiscreto con más de un punto es un ejemplo de ello. En el caso en que $\{0,1\}$ tiene la topología indiscreta y $f: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

resulta que f es continua y abierta pero $\{0,1\}$ no es T_2.

2.- $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio T_2. Sea la partición en $\mathbb{R}$ dada por $\mathcal{D} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$. La topología $T_{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{D}$ (Ver 4.5 Cap. III) es la topología indiscreta, de tal manera que el espacio cociente $(\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}})$ es un espacio indiscreto con más de un punto, y por lo tanto no es T_0.

De aquí resulta que los espacios cocientes de cualquier espacio T_0, T_1 o T_2 no son necesariamente T_0, T_1 o T_2.

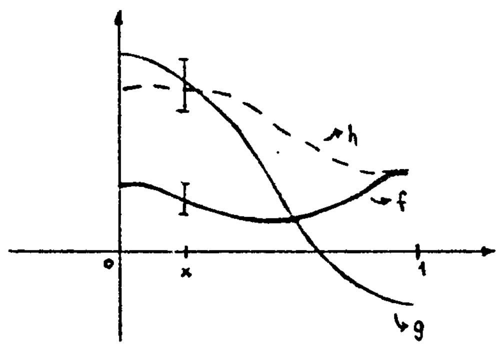
Sección 4.- Espacios Regulares; Espacios Normales y Espacios Completamente Regulares.

En la sección anterior, vimos espacios topológicos que satisfacían axiomas que nos garantizaban poder separar puntos de puntos. En esta sección veremos axiomas de separación más fuertes. Estos axiomas son extensiones naturales de los primeros. Son espacios que poseen tal número y disposición de sus conjuntos abiertos que podemos, en ellos, separar puntos de conjuntos cerrados o conjuntos cerrados de conjuntos cerrados.

4.1 - Definición: Un espacio topológico X es regular o T_3 si satisface:

(a) X es un espacio T_1.

(b) Para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y cualquier $x \in X-F$, existen dos conjuntos abiertos A_1, A_2 ajenos, tales que $F \subseteq A_1$, $x \in A_2$.



En esta figura, se muestran dos elementos $f, g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Los segmentos verticales que cortan a cada una de ellas sobre el punto X, nos determinan vecindades V_1, V_2 ajenas conteniendo a f y g respectivamente: La gráfica de cualquier función que cruce alguno de estos segmentos no pasará por el otro.

Figura 22.

4.2 - Ejemplos:

1. Como cualquier espacios regular, X es T_1, entonces cualquier conjunto formado por un solo punto es un conjunto cerrado en X, de tal manera que todo espacio T_3 es T_2. Sin embargo, no todo espacio Hausdorff es Regular: Sea X el conjunto de los números reales con la topología T que tiene como sub-base a los intervalos abiertos y al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Es decir, una base para T son los intervalos abiertos y los conjuntos de la forma $(a,b) \cap \mathbb{Q}$, $a,b \in \mathbb{R}$. En particular, la topología usual $T_{\mathbb{R}}$ está contenida en T y por lo tanto (X,T) es un espacio Hausdorff. (Ver ejercicio 3.8) Sin embargo este espacio no es regular ya que $X-\mathbb{Q}$ es un conjunto cerrado que no es posible separar por medio de dos abiertos ajenos del punto 0: (El único abierto que contiene a $X-\mathbb{Q}$ es todo el espacio X).

2. $(\mathbb{R}, T_{\mathbb{R}})$ es un espacio regular: Sabemos que éste es un espacio T_1. Consideremos $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y $x \in \mathbb{R}-F$. $\mathbb{R}-F$ es unión de intervalos abiertos; asi existen dos reales a,b tales que $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}-F$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (x-1/n, x+1/n) \subseteq (a,b)$. Asi tenemos que $x \in (x-1/2n, x+1/2n) \subseteq [x-1/2n, x+1/2n] \subseteq (a,b) \subseteq \mathbb{R}-F$. Ahora resulta que $(x-1/2n, x+1/2n)$ y $\mathbb{R}-[x-1/2n, x+1/2n]$ son dos abiertos ajenos que separan a x y a F.

3. De los dos ejemplos anteriores, vemos entonces que si T_1 y T_2 son dos topologías en X y $T_1 \leq T_2$, (X,T_1) regular no implica necesariamente (X,T_2) regular. Por otro lado, si (X,T_2) es regular, (X,T_1) tampoco es necesariamente regular. Por ejemplo si T_1 es la topología cofinita en $\mathbb{R}$ y T_2 la topología usual. (Ver ejercicio 4.2.(c))

4. Cualquier espacio métrico es un espacio regular: Sea (X,d) un espacio métrico, $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X-F$. Como $X-F$ es un conjunto abierto, entonces existe $r > 0$ tal que la bola $B_r(x)$ no inter-

secta a F. De tal manera que $x \in B_{r/2}(x) \subseteq c(B_{r/2}(x)) \subseteq B_r(x)$ entonces $F \subseteq A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ si $A_1 = B_{r/2}(x)$ y $A_2 = X - c(B_{r/2}(x))$. Como A_1 y A_2 son abiertos y X es un espacio T_1, entonces, X es regular.

4.3 - Teorema: Un espacio X, T_1, es regular si y solo si dado cualquier abierto A en X y $x \in A$, existe un abierto B tal que $x \in B \subseteq c(B) \subseteq A$

Demostración: Si X es regular y $x \in A$, donde A es abierto, entonces $X-A$ es un subconjunto cerrado que no contiene a x. Como X es regular, existen dos abiertos A_1, A_2 ajenos, tales que $x \in A_1$, $X-A \subseteq A_2$. Así tenemos que $X-A_2 \subseteq A$ es un conjunto cerrado. Como $A_1 \subseteq X-A_2$ (ya que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), entonces $c(A_1) \subseteq X-A_2$. Tomando B=A, se obtiene lo que se quería.

Sea X un espacio T_1 y $F \subseteq X$ cerrado no conteniendo al punto $x \in X$. X-F es un abierto que contiene a x de tal manera que por nuestra hipótesis, existe $B \subseteq X$ abierto, tal que $x \in c(B) \subseteq X-F$. Resulta entonces que B y X-c(B) son dos abiertos ajenos, tales que $x \in B$ y $F \subseteq X-c(B)$; es decir, X es regular. (Observe que en los ejemplos 4.2.2 y 4.2.4 para demostrar la regularidad, se utilizó esta técnica).

4.4 - Ejemplo: Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de todas las parejas de reales (x,y), tales que $y \geq 0$. En X consideremos la topología T definida como sigue: Para cualquier punto $\bar{z}=(x,y)$ con $y > 0$, una base de vecindades es la colección de bolas abiertas centradas en $\bar{z}$ contenidas en X. Para cada punto de la forma (x,0), una base de vecindades es la colección de discos abiertos tangentes a (x,0), incluyendo en cada uno de estos discos el punto (x,0). (Ver figura 23). (Se puede verificar a partir de los Teoremas 4.14 y 4.15 del capítulo I, que T es en efecto una topología en X).

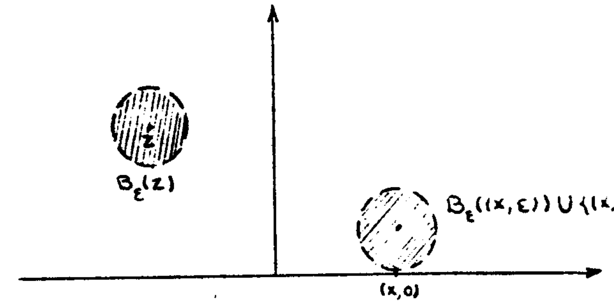


Figura 23

Este espacio es llamado el Plano de Moore o Espacio de Nieminski y es un espacio regular:

En efecto, es facil probar que (X,T) es un espacio T_1. Ahora sea $\bar{z}=(x,y)$ un punto en X y A un abierto conteniendo a z. Si $y > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{z}) \subseteq A$ de tal manera que $\bar{z} \in B_{\varepsilon/2}(\bar{z}) \subseteq c(B_{\varepsilon/2}(\bar{z})) \subseteq B_\varepsilon(\bar{z}) \subseteq A$.

Si $y=0$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B((x,\varepsilon)) \cup \{(x,0)\} \subseteq A$. De la misma manera es facil ver que:

$c(B_{\varepsilon/2}((x,\varepsilon/2)) \subseteq B_\varepsilon((x,\varepsilon)) \cup \{x,0\}$ y por lo tanto

$\bar{z} \in B_{\varepsilon/2}((x,\varepsilon/2)) \cup \{z\} \subseteq c(B_{\varepsilon/2}(x,\varepsilon/2)) \subseteq A$.

Del Teorema 4.3 tenemos entonces que el Plano de Moore es un espacio regular.

Es facil demostrar que cualquier subespacio de un espacio regular, es también un espacio regular y lo dejamos como ejercicio: Ejercicio 4.5.

4.5 - Teorema: La propiedad de regularidad es una propiedad topológica.

Demostración: Sea X un espacio regular y $h:X\to Y$ un homeomorfismo. Si $F\subseteq Y$ es cerrado en Y y $y\in Y-F$, existe $x\in X$ tal que $h(x)=y$ y $x\notin h^{-1}(f)$. Ademas por la continuidad de h, $h^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X. Como X es regular, entonces existen abiertos ajenos A_1, A_2 tales que $x\in A_1$, $h^{-1}(F)\subseteq A_2$ y por lo tanto $h(A_1)$, $h(A_2)$ son dos conjuntos abiertos que satisfacen $y\in h(A_1)$, $F\subseteq h(A_2)$ y $h(A_1)\cap h(A_2)=\emptyset$.

4.6 - Observación: Los ejemplos dados en la Observación 3.17 nos muestran que la imagen continua y abierta de un espacio regular y el cociente de un espacio regular, no son necesariamente espacios regulares. En estos casos, el espacio imagen (el espacio cociente) es un espacio indiscreto de dos puntos. Este espacio no es T_1, pero no contradice el axioma de separación (b) de la definición 4.1. Nos preguntamos si las imágenes continuas y abiertas o los espacios cocientes de espacios regulares satisfacen este axioma.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el subespacio $X=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,1):x\in\mathbb{R}\}$ y sea Y el espacio partición $(\mathcal{D},T_{\mathcal{D}})$ donde los elementos en $\mathcal{D}$ son $\{(x,0),(x,1)\}$ para toda $x\neq 0$, $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$. Del ejercicio 3.6 resulta que $\mathcal{D}$ es T_1 y por lo tanto $\{\{(0,0)\}\}$ es cerrado, pero no existen dos abiertos en $\mathcal{D}$ que separen a $\{\{(0,0)\}\}$ del punto $\{(0,1)\}$ y por lo tanto $(\mathcal{D},T_{\mathcal{D}})$ no es regular. La proyección natural $p:X\to\mathcal{D}$ es continua. Se deja al lector que verifique que es también una función abierta.

4.7 - Teorema: Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos (no vacios). El espacio producto ΠX_α es regular si y solo si cada uno de sus factores lo es.

Demostración: Si ΠX_α es regular, entonces para cualquier α, X_α es homeomorfo a un subespacio de ΠX_α (Ver problema 3.4 Cap. III).

De lo dicho anteriormente resulta entonces que X_α es regular para cualquier α. (Ver también el ejercicio 3.4 (c) de este capítulo).

Supongamos ahora que para cada α, X_α es regular. Sea $x\in\Pi X_\alpha$ y A un conjunto abierto en ΠX_α conteniendo a x. Existe un elemento básico $B'=p_{\alpha_1}^{-1}(A_1)\cap\ldots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(A_n)$ tal que $x\in B'\subseteq A$, y cada A_i es un conjunto abierto en $X_{\alpha i}$ conteniendo a la α_i-ésima coordenada de x, $x_{\alpha i}$ para $i=1,\ldots,n$. Como X_α es regular cualquiera sea α, del Teorema 4.3, sabemos que existe un abierto B_i en $X_{\alpha i}$ para cada $i=1,\ldots,n$, tal que $x_{\alpha i}\in B_i\subseteq c(B_i)\subseteq A_i$

Tenemos entonces que $p_{\alpha 1}^{-1}(c(B_1))\cap\ldots\cap p_{\alpha n}^{-1}(c(B_n))$ es un conjunto cerrado en ΠX_α conteniendo al abierto $B=p_{\alpha 1}^{-1}(B_1)\cap\ldots\cap p_{\alpha n}^{-1}(B_n)$ y contenido en A.

Por lo tanto
$x\in B\subseteq c(B)\subseteq p_{\alpha 1}^{-1}(c(B_1))\cap\ldots\cap p_{\alpha n}^{-1}(c(B_n))\subseteq A$. Es decir, ΠX_α es un espacio regular.

Un axioma de separación más fuerte que aquel de regularidad es el siguiente.

4.8 - Definición: Un espacio topológico (X,T) es normal o T_4 si

(a) (X,T) es un espacio T_1.

(b) Dados F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados ajenos en X, existen dos abiertos ajenos A_1, A_2 tales que $F_1\subseteq A_1$, $F_2\subseteq A_2$.

Como en espacios T_1, cualquier conjunto formado por un solo punto es cerrado, resulta que todo espacio normal es regular, y claro, es también Hausdorff.

4.9 - Ejemplos:

1.- Cualquier espacios métrico es un espacio normal:

Sea (X,d) un espacio métrico y F_1, F_2 dos cerrados ajenos en X. Para cada $x \in F_1$ sea $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}(x)$ no intersecta a F_2 y para cada $y \in F_2$, sea $\varepsilon_y > 0$ tal que $B_{\varepsilon_y}(y) \cap F_1 = \emptyset$. Los conjuntos

$$A_1 = \bigcup_{x \in F_1} B_{\delta_x/3}(x) \quad y \quad A_2 = \bigcup_{y \in F_2} B_{\varepsilon_y/3}(y)$$

son abiertos y ajenos ya que si $z \in A_1 \cap A_2$ entonces $z \in B_{\delta_x/3}(x)$ para alguna $x \in F_1$ y $z \in B_{\varepsilon_y/3}(y)$ para alguna $y \in F_2$; es decir, $d(z,x) < \delta_{x/3}$ y $d(y,z) < \varepsilon_{y/3}$.
Asi $d(x,y) \leq d(z,x)+d(y,z) < \delta_{x/3}+\varepsilon_{y/3} < \max\{\delta_x, \varepsilon_y\}$. Pero esto significa que $y \in B_{\delta_x}(x)$ o $x \in B_{\varepsilon_y}(y)$, lo que es imposible. Por lo tanto $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $F_1 \subseteq A_1$, $F_2 \subseteq A_2$, es decir (X,d) es un espacio normal.

2.- El Plano de Moore (Ver ejemplo 4.4) es un espacio regular pero no es un espacio normal.

En efecto $F_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\}$, $F_2 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ son conjuntos cerrados en el Plano de Moore. (Verifíquelo). Sin embargo, no existen abiertos ajenos A_1, A_2 que contengan a F_1, F_2 respectivamente.

Otra caracterización de normalidad es dado en el Teorema siguiente, el cual es análogo, para el caso de regularidad al Teorema 4.3.

4.10 - Teorema: Un espacio topolǵocio X, T_1, es normal si y solo si para cualquier conjunto cerrado F y cualquier abierto A que lo contenga, existe un conjunto abierto B tal que

$$F \subseteq B \subseteq c(B) \subseteq A.$$

Demostración: Dejamos esta demostración como ejercicio. Vea la demostración del Teorema 4.3. O

Hemos mostrado hasta aquí que todos los axiomas que hemos visto (T_0, T_1, T_2, T_3) tienen un "buen comportamiento" cuando se trata de subespacios y de productos. Es decir, cualquier subespacio de un es-

pacio T_i con $i=0,1,2,3$, es T_i, y el producto de espacios T_i $(i=0,1,2,3)$ es tambien un espacio T_i. En el caso de los espacios normales, estos resultados ya no se tienen.

4.11 - Teorema:

(a) Si (X,T) es un espacio normal y $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F con la topología relativa es un espacio normal.

(b) La propiedad de normalidad es una propiedad topológica.

Demostracion:

(a) Si $F \subseteq X$ es cerrado y $F_1, F_2 \subseteq F$ cerrados en F, entonces son tambien cerrados en X y de la normalidad de X podemos separar a F_1 y F_2 por dos abiertos ajenos A_1, A_2. Es decir, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $F_1 \subseteq A_1$, $F_2 \subseteq A_2$. Entonces $F \cap A_1$, $F \cap A_2$ son dos abiertos en F ajenos que separan a F_1 y F_2 en F.

(b) Sea $f: X \to Y$ un homeomorfismo. Como T_1 es una propiedad topológica, entonces Y es T_1. Consideremos en Y un conjunto cerrado F y un conjunto abierto A conteniendo a F. Como f es una función continua entonces $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X contenido en el abierto $f^{-1}(A)$. Como X es normal, existe $B \subseteq X$ abierto tal que

$$f^{-1}(F) \subseteq B \subseteq c(B) \subseteq f^{-1}(A)$$

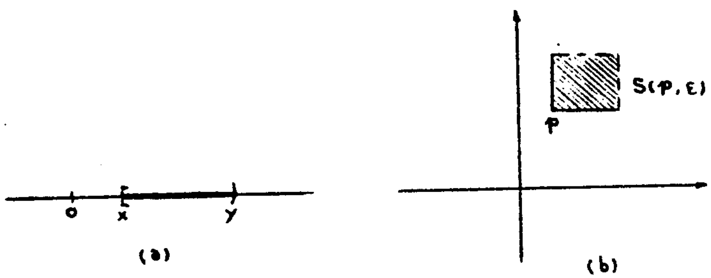
Por lo tanto $F \subseteq f(B) \subseteq f(c(B)) \subseteq A$. Como f es un homeomorfismo $f(B)$ abierto y $f(c(B)$ es cerrado, por lo tanto $F \subseteq f(B) \subseteq c(f(B)) \subseteq A$. Es decir, Y es normal.

4.12 - Ejemplos:

1.- Existen, naturalmente, espacios normales cuyo producto es aun un espacio normal. Por ejemplo $\mathbb{R}$ es normal y $\mathbb{R}^n$ lo es tambien para cualquier n.

La línea de Sorgenfrey (X,T), ($X = \mathbb{R}$ y T la topología generada por la colección de intervalos de la forma $[x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$), es un espacio normal. En el Corolario 4.7 del capítulo V se demuestra esta afirmación.

Sin embargo, el producto XxX no es un espacio normal. En la figura 24 se muestra un elemento básico en XxX y en la figura 25 se muestra cómo cualquier subconjunto de la diagonal $\Delta=\{(x,-x):x\in X\}$ es un conjunto cerrado en XxX (es decir Δ con la topología relativa es un espacio discreto). Resulta que los cerrados ajenos $F_1=\{(x,-x):x\in \mathbb{Q}\}$ y $F_2=\{(x,-x):x\in \mathbb{R}-\mathbb{Q}\}$ no es posible separarlos por medio de dos abiertos ajenos ([16] Pag. 108; [17] Pag. 100).



En (a) se muestra un elemento básico de X y en (b) un elemento básico en XxX. Por S(P,ε) denotamos al cuadrado con vértice inferior izquierdo en p y lado igual a ε. Observe que el lado superior y el lado derecho estan excluidos.

Figura 24.

2.- No todo subespacio de un espacio normal es normal. Del ejemplo 4.13.2 de esta misma sección y del Teorema 5.7 de la sección siguiente, resulta que el Plano de Moore es homeomorfo a un subespacio Y del espacio producto $[0,1]^M$, para algun conjunto M. Del Teorema 2.1 y del Corolario 1.11 del capítulo 5, sabemos que $[0,1]^M$ es un espacio Normal, sin embargo Y no lo es.

Ahora trataremos un último axioma de separabilidad, intermedio entre regularidad y normalidad. Esta nueva clase de espacios, que llamaremos Completamente Regulares, fue introducida por Urysohn en 1925 y sus propiedades básicas fueron estudiadas mas tarde por el matemático

soviético Tychonoff. Esta clase de espacios es de gran importancia y el Teorema 5.7 de la siguiente sección, lo muestra.

4.13 - Definición: Un espacio topológico (X,T) es Completamente Regular si satisface:

(a) (X,T) es un espacio T_1.

(b) Para cualquier $A\subseteq X$ cerrado y cualquier $x\notin A$, existe una función continua $f:X\to[0,1]$ tal que $f(x)=0$ y $f(A)=\{1\}$.

De la definición resulta que todo espacio completamente regular es regular ya que como f es continua entonces

$f^{-1}([0,1/2))$ y $f^{-1}((1/2,1])$ son dos abiertos ajenos que separan a F y x. El Teorema de Urysohn que veremos en la siguiente sección demuestra que todo espacio normal es un espacio completamente regular. (Ver Teorema 5.1). Esta localización intermedia de los espacios completamente regulares, entre los espacios regulares o T_3 y los espacios normales o T_4, justifica la tambien muy empleada denominación de espacios $T_{3(1/2)}$.

4.13 - Ejemplos:

1.- Cualquier espacio métrico es completamente regular ya que estos espacios son normales. (Ejemplo 4.9.1).

2.- No todo espacio Completamente Regular es Normal. El Plano de Moore no es un espacio normal como hicimos notar en el ejemplo 4.9.2. Sin embargo, es un espacio completamente regular. Veamos:

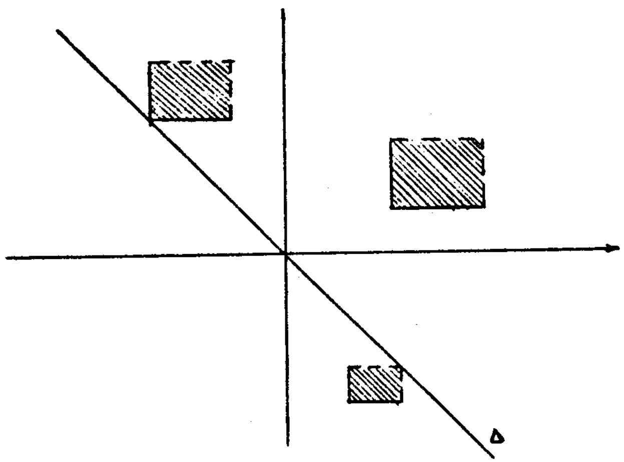
Sea $\bar{z}\in X$ y F un conjunto cerrado de X donde (X.T) es el Plano de Moore y supongamos que $\bar{z}\notin F$. Si $\bar{z}=(x,y)$ es tal que $y>0$, entonces existe un disco $B_\varepsilon(\bar{z})$ el cual está contenido en X-F. $B_\varepsilon(\bar{z})$ es también un conjunto abierto en la topología usual. Como $X-B_\varepsilon(\bar{z})$ es un conjunto cerrado en la topología usual y ésta es completamente regular, luego existe una función continua $f:X\to[0,1]$ tal que $f(\bar{z})=0$ y

$f(X-B_\varepsilon(\bar{z}))=\{1\}$, considerando a X con la topología usual. Esta función f sigue siendo continua para la topología T y satisface $f(\bar{z})=0$ y $f(F)=\{1\}$.

Si $\bar{z}$ es de la forma $(x,0)$, debe existir un disco D tangente al eje-x en el punto $\bar{z}$ y el cual no intersecta a F. Si δ es el radio del disco D, definimos $f:X\to[0,1]$ de la siguiente manera

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 \text{ si } (x,y)\notin D\cup\{\bar{z}\} \\ 0 \text{ si } (x,y)=\bar{z} \\ [(x-b)^2+y^2]/2\delta y \text{ si } (x,y)\in D \end{cases}$$

f es continua puesto que $f^{-1}([0,\alpha))$ es el conjunto abierto $\{\bar{z}\}\cup D_\alpha$, donde D_α es el disco abierto de radio $\delta\alpha$ tangente al eje-x en el punto $\bar{z}$ y $f^{-1}((\alpha,1])$ es el conjunto abierto $X-c(D_\alpha)$. Ademas $f(\bar{z})=0$ y $f(F)=1$. De esta manera queda demostrado que el Plano de Moore es completamente Regular.



Para cualquier punto $p=(x,y)$ con $-x\leq y$, $S(p,\varepsilon)\cap\Delta-\{p\}=\emptyset$ para cualquier ε. Para $p=(x,y)$ con $-x>y$, $S(p,\varepsilon)\cap\Delta=\emptyset$ si $\varepsilon\leq(1/2)((x-y)^2+(y-x)^2)^{1/2}$.

Figura 25

3.- Hewitt en 1946 construyó un ejemplo de un espacio regular X tal que las únicas funciones $f:X\to\mathbb{R}$ continuas, son las funciones constantes. En el caso de los espacios Completamente Regulares con más de un punto, siempre podemos garantizar la existencia de funciones reales continuas no constantes como se ve en el siguiente Teorema.

El ejemplo de Hewitt es pues una muestra de un espacio regular que no es completamente regular. ([16] Ejemplo 90; [17] ejercicio 18 G.; [8]).

4.14 - Teorema: Sea (X,T) un espacio completamente regular y x,y dos puntos distintos en X. Existe, entonces, una función continua $f:X\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)\neq f(y)$.

Demostración: Como X es un espacio T_1 entonces $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos cerrados y por tanto existe una función continua real f, tal que $f(x)=0$ y $f(y)=1$.

Los resultados con respecto a subespacios e imágenes continuas de espacios Completamente Regulares, los hemos dejado como ejercicio: Ejercicio 4.6.

Nuestro último resultado será pues con respecto al producto de espacios Completamente Regulares.

4.15 - Teorema: Sea $\{(X_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios no vacios. El espacio producto ΠX_α es completamente regular si y solo si para cada $\alpha\in I$, X_α es completamente regular.

Demostración. Supongamos que ΠX_α es completamente regular. Como cada X_α es homeomorfo a un subespacio de ΠX_α, entonces X_α es completamente regular. (Ver ejercicio 4.6 y del Cap. III ver el ejercicio 3.4).

Ahora supongamos que para cada $\alpha\in I$, X_α es completamente regular. Como cada X_α es T_1, entonces ΠX_α lo es.

Sean $x\in \Pi X_\alpha$ y F un subconjunto cerrado del producto que no contiene a x. Existe un abierto básico B de ΠX_α tal que $x\in B\subseteq(\Pi X_\alpha)-F$. Es decir, existe una colección finita de índices $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ y conjuntos $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$, abiertos en $X_{\alpha_1},\dots,X_{\alpha_n}$ respectivamente, tales que

$$x\in B=p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \quad \dots \quad p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})\subseteq(\Pi X_\alpha)-F$$

Si x_{α_i} es la α_i-ésima coordenada de x. entonces $x_{\alpha_i}\in U_{\alpha_i}$ para $i=1,\dots,n$. Como X_{α_i} es completamente regular, entonces existe una función continua $f_i:X_{\alpha_i}\to[0,1]$ tal que $f_i(x_{\alpha_i})=1$ y $f_i(X_{\alpha_i}-U_i)=\{0\}$ para $i=1,\dots,n$. Sea $g:\Pi X_\alpha\to[0,1]$ definida por

$$g(y)=\min\left\{f_i(y_{\alpha_i}):\ i=1,\dots,n\right\}$$

La función g es el mínimo de las funciones continuas $f_i\circ p_{\alpha_i}$, $i=1,\dots,n$, y por lo tanto es una función continua. (Ver ejercicio 1.7 Cap. II). Además $g(x)=\min\{f_i(x_{\alpha_i}):i=1,\dots,n\}=1$ y si $y\in(\Pi X_\alpha)-F$, entonces $y_{\alpha_i}\notin U_i$ para alguna $i=1,\dots,n$, y por lo tanto $f_i(y_{\alpha_i})=0$. Así $g(y)=0$. Es decir, $g((\Pi X_\alpha)-F)=\{0\}$.

Sección 5. Tres Teoremas Importantes: Lema de Urysohn; Teorema de Tietze; Teorema de Tychonoff.

En esta sección mostramos al lector tres teoremas de gran importancia. Los hemos colocado en una sección aparte para remarcar esta importancia y además para que las demostraciones, que no son de manera alguna triviales, sean mejor analizadas.

El primero de nuestros teoremas es el llamado Lema de Urysohn, que muestra en particular que todo espacio normal es completamente regular.

5.1 - Teorema: (Lema de Urysohn)

Si F_1 y F_2 son dos conjuntos cerrados ajenos en un espacio normal X, entonces existe una función continua $f:X\to[0,1]$ tal que $f(F_1)=\{0\}$ y $f(F_2)=\{1\}$.

Demostración: Sea D el conjunto de los números racionales diádicos, es decir, los números de la forma $a/2^q$ donde a y q son números naturales.

Vamos a construir una familia de conjuntos abiertos de X indicada por $D:\mathcal{A}=\{A_t:t\in D\}$ tal que si $s,t\in D$ con $s<t$ entonces $c(A_s)\subseteq A_t$.

Para $t>1$, A_t será todo el espacio X y $A_1=X-F_2$. Como X es normal y F_1, F_2 son ajenos, existen dos abiertos M y N de X tales que $F_1\subseteq M$, $F_2\subseteq N$ y $M\cap N=\emptyset$. Sea $A_o=M$. Así tenemos que $c(A_o)\subseteq X-N\subseteq X-F_2=A_1$. Sea $0<t<1$ perteneciendo al conjunto D. t puede expresarse de manera única como $t=(2m+1)/2^n$. Construiremos A_t por inducción sobre n. Sean $\alpha=2m/2^n=m/2^{n-1}$ y $\beta=(2m+2)/2^n=(m+1)/2^{n-1}$, entonces $\alpha<t<\beta$ y por hipótesis de inducción los abiertos A_α y A_β ya construidos, satisfacen $c(A_\alpha)\subseteq A_\beta$. Por lo tanto $c(A_\alpha)$ y $X-A_\beta$ son dos conjuntos cerrados ajenos en el espacio normal X. De tal manera que existen abiertos V y W en X tales que $c(A_\alpha)\subseteq V$, $X-A_\beta\subseteq W$, $V\cap W=\emptyset$ Sea $A_t=V$. Entonces se tiene que $c(A_\alpha)\subseteq A_t$; $c(A_t)\subseteq X-W\subseteq A_\beta$. Esto completa la construcción inductiva de la familia $\mathcal{A}$.

Sea $f:X\to[0,1]$ definida por $f(x)=\inf\{t:x\in A_t\}$. Tenemos que $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$. Nos queda pues por demostrar que f es continua:

Para cada $a\in[0,1]$, sea $L_a=\{t\in[0,1]:t<a\}$ y $R_a=\{t\in[0,1]:t>a\}$. La colección $\{L_a,R_a:a\in[0,1]\}$ forma una sub-base de la topología en $[0,1]$

De la Observación 1.6 Cap. II, es pues suficiente demostrar que $f^{-1}(L_a)$ y $f^{-1}(R_a)$ son abiertos en X para cada $a\in[0,1]$.

$f^{-1}(L_a)=\{x\in X:f(x)<a\}$. Como $f(x)=\inf\{t:x\in A_t\}$ y como el ínfimo es menor que a si y solo si algun miembro de $\{t:x\in U_t\}$ es menor que a, el conjunto $f^{-1}(L_a)$ consiste de todos los puntos $x\in X$ tales que $x\in A_t$ para alguna $t<a$. Por lo tanto $f^{-1}(L_a)=\bigcup\{A_t:t\in D$ y $t<a\}$. Como cada A_t es abierto, entonces $f^{-1}(L_a)$ lo es.

Para demostrar que $f^{-1}(R_a)$ es abierto, lo que haremos es demostrar la condición equivalente $f^{-1}([0,1]-R_a)$ es cerrado.

Tenemos que $f^{-1}([0,1]-R_a)=\{x\in X:f(x)\leq a\}$. Como $f(x)=\inf\{t:x\in A_t\}$, $f(x)\leq a$ si y solo si $x\in A_t$ para toda $t>a$. Por lo tanto $f^{-1}([0,1]-R_a=\bigcap\{A_t:t\in D$ y $t>a\}$.

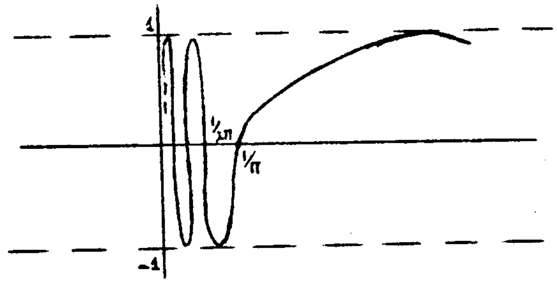
Pero resulta que $\bigcap\{A_t:t\in D$ y $t>a\}=\bigcap\{c(A_t):t\in D$ y $t>a\}$. En efecto, sea $r\in D$ tal que $r>a$. Como D es denso en $[0,1]$, existe $s\in D$ tal que $a<s<r$ y por lo tanto $c(A_s)\subseteq A_r$. Como $s>a$, tenemos que $\bigcap\{c(A_t):t\in D$ y $t>a\}\subseteq c(A_s)\subseteq A_r$. Como r es arbitrario en D con $r>a$, entonces $\bigcap\{c(A_t):t\in D$ y $t>a\}\subseteq f^{-1}([0,1]-R_a)$. Y puesto que la inclusión contraria es obvia, entonces obtenemos lo que deseábamos demostrar.

<u>5.2 - Corolario</u>: Un espacio X es normal si y solo si para cualquier par de conjuntos cerrados F_1 y F_2, existe una función continua $f:X\to[0,1]$ tal que $f(F_1)=\{0\}$ y $f(F_2)=\{1\}$.

<u>5.3 - Corolario</u>: Cualquier espacio normal es un espacio completamente regular.

Consideremos ahora el siguiente problema: Sea (X,T) un espacio topológico y $f:E\to\mathbb{R}$ una función continua en donde E es un subespacio de X. ($\mathbb{R}$ con la topología usual). ¿Bajo qué condiciones podremos obtener una función $g:X\to\mathbb{R}$ continua tal que $g(x)=f(x)$ para todo $x\in E$? (Esto se expresa diciendo: ¿Bajo qué condiciones existe una extensión continua de f?. A g se le llama extensión de f).

En general no es posible encontrar tal extensión. Por ejemplo, la función $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ es continua, pero es imposible encontrar una extensión continua al espacio $[0,1]$ (Ver figura 26).



<u>Figura 26.</u>

El siguiente teorema está relacionado con la pregunta anterior y es una propiedad importante de los espacios normales. Fue demostrado por Urysohn y lleva el nombre de Tietze ya que este último lo demostró antes para una clase de espacios más restringida, los espacios métricos.

<u>5.4 - Teorema</u>: (de Extensión de Tietze)

Un espacio X es normal si y solo si para cualquier función continua $f:F\to[a,b]$, de un subconjunto cerrado F de X en un intervalo cerrado $[a,b]$, existe una extensión continua de f en todo X. Es decir, existe $g:X\to\mathbb{R}$ continua tal que $f(x)=g(x)$ para todo $x\in F$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que X es normal, $F\subseteq X$ cerrado y $f:F\to[-1,1]$ continua. Tomamos a $[-1,1]$ en lugar de $[a,b]$ por conveniencia y no altera la demostración, ya que son homeomorfos. Para cada entero n, denotaremos por b_n al número $(1/3)\cdot(2/3)^n$ y por a_n al número $-(1/3)\cdot(2/3)^n$.

Sea $h_0:F \to [-1,1]=[3a_0,3b_0]$ la función definida por $h_0(x)=f(x)$ para todo $x \in F$. Los conjuntos $A_0=h_0^{-1}([3a_0,a_0])$ y $B_0=h_0^{-1}([b_0,3b_0])$ son cerrados en F y por lo tanto en X. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $g_0:X \to [a_0,b_0]$ tal que $g_0(A_0)=\{a_0\}$ y $g_0(B_0)=\{b_0\}$. Sea $h_1:F \to [3a_1,3b_1]$ dada por $h_1(x)=h_0(x)-g_0(x)$ para todo $x \in F$. Los conjuntos $A_1=h_1^{-1}([3a_1,a_1])$ y $B_1=h_1^{-1}([b_1,3b_1])$ son conjuntos cerrados en F y por lo tanto en X. Por el Lema de Urysohn existe una función continua $g_1:X \to [a_1,b_1]$ tal que $g_1(A_1)=\{a_1\}$ y $g_1(B_1)=\{b_1\}$.

Sea $h_2:F \to [3a_2,3b_2]$ dado por $h_2(x)=h_1(x)-g_1(x)=h_0(x)-g_0(x)-g_1(x)$. Continuamos esta construcción por inducción. Supongamos que para cada $k=0,1,\dots,n-1$, tenemos una función $g_k:X \to [a_k,b_k]$. Definimos $h_n:F \to [3a_n,3b_n]$ como $h_n(x)=h_0(x)-\sum_0^{n-1} g_k(x)$ para todo $x \in F$. Como los conjuntos $A_n=h_n^{-1}([3a_n,a_n])$ y $B_n=h_n^{-1}([b_n,3b_n])$ son cerrados en X, el Lema de Urysohn nos garantiza la existencia de una función $g_n:X \to [a_n,b_n]$ tal que $g_n(A_n)=\{a_n\}$ y $g_n(B_n)=\{b_n\}$. Definimos entonces la función $h_{n+1}(x)=h_n(x)-g_n(x)=h_0(x)-\sum_0^{n} g_k(x)$ para todo $x \in F$.

El rango de h_{n+1} está contenido en efecto en $[3a_{n+1},3b_{n+1}]$ ya que si $x \in A_n$, entonces $3a_n \leq h_n(x) \leq a_n$ y $g_n(x)=a_n$, así que $0 \geq h_n(x)-g_n(x) \geq 3a_n-a_n=-2(1/3)(2/3)^n=3a_{n+1}$. De manera semejante, si $x \in B_n$, entonces $b_n \leq h_n(x) \leq 3b_n$ y $g_n(x)=b_n$, y por lo tanto $0 \leq h_n(x)-g_n(x) \leq 3b_n-b_n=3b_{n+1}$. Si $x \notin A_n \cup B_n$, entonces $a_n < h_n(x) < b_n$ y $a_n \leq g_n(x) \leq b_n$, de tal manera que $3a_{n+1}=a_n-b_n < h_n(x)-g_n(x) < b_n-a_n=3b_{n+1}$ y de esta manera terminamos la inducción.

Consideremos la serie $g(x)=\sum_0^{\infty} g_n(x)$ definida en cualquier punto $x \in X$. Como $|g_n(x)| \leq b_n$, $\left|\sum_0^{\infty} g_n(x)\right| \leq \sum_0^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_0^{\infty} b_n=1$ y por lo tanto la serie $g(x)$ es absolutamente y uniformemente convergente para todo $x \in X$. Del análisis clásico, resulta que g es una función continua.

Por otro lado, como $|h_n(x)| \leq 3b_n$ entonces $|h_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, y $h_0(x)=g(x)$ para todo $x \in F$. De la definición de h_n es claro que $g(x)=f(x)$ para toda $x \in F$, es decir, g es una extensión continua de f.

Supongamos ahora que X satisface las condiciones del Teorema y sean F_1, F_2 dos conjuntos cerrados y ajenos en X y $[a,b]$ cualquier intervalo cerrado. La función $f:F_1 \cup F_2 \to [a,b]$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x \in F_1 \\ b & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$$

es continua y por lo tanto tiene una extensión continua $g:X \to [a,b]$. Del Corolario 5.2 resulta que X es un espacio Normal. (Recuerde que $[a,b]$ es homeomorfo a $[0,1]$).

El último de los teoremas en cuestión, es una caracterización de espacios completamente regulares. Antes de tratarlo, veremos algunas definiciones y algunos lemas.

Sea X un espacio topológico, $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F}=\{f_\alpha:X \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de funciones. Podemos definir la función $f:X \to \Pi Y_\alpha$ dada por, $f(x)$ es el elemento de ΠY_α cuya α-ésima coordenada es $f_\alpha(x)$.

Si cada una de las funciones f_α es continua, como $f_\alpha=p_\alpha \circ f$, entonces de 3.2(c) Cap. III, f es continua.

<u>5.5 - Definiciones</u>:

1.- Decimos que la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos si y solo si para cualquiera dos puntos a,b en X, existe $\alpha \in I$ tal que $f_\alpha(a) \neq f_\alpha(b)$.

2.- Decimos que la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos de conjuntos cerrados de X si y solo si para cualquier conjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \in X-F$, existe $\alpha \in I$ tal que $f_\alpha(x) \notin c(f_\alpha(F))$.

<u>5.6 - Lema</u>:

(a) Si la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos de puntos, entonces la función f es inyectiva.

(b) Si la familia $\mathfrak{F}$ distingue puntos de cerrados, entonces para cualquier abierto A en X, f(A) es un abierto en f(X).

Demostración:

(a) Sean x y y dos puntos distintos en X. Entonces por hipótesis, existe $f_\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. De la definición de la función f, esto implica que $f(x) \neq f(y)$; es decir, f es inyectiva.

(b) Sea $A \subseteq X$ abierto y sea q un punto en f(A). Tomemos $p \in A$ que satisfaga $f(p)=q$. Tenemos ahora que X-A es un cerrado que no contiene a p. Por hipótesis, existe $f_\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $f_\alpha(p)$ no está en $c(f_\alpha(X-A))$.

Como $Y_\alpha - c(f_\alpha(X-A))$ es un conjunto abierto en Y_α, $V = p_\alpha^{-1}(Y_\alpha - c(f_\alpha(X-A)) = \{y \in \Pi Y_\alpha : y(\alpha) \notin c(f_\alpha(X-A))\}$ es un conjunto abierto en ΠY_α.

Resulta que $q=f(p) \in V \cap f(X) \subseteq f(A)$ y $V \cap f(X)$ es abierto en f(X), por lo tanto f(A) es abierto en f(X).

5.7 - Teorema: (Tychonoff)

Un espacio topológico es completamente regular si y solo si es homeomorfo a un subespacio de un cubo.(Un cubo es cualquier espacio topológico producto,$[0,1]^M$, donde M es un conjunto).

Demostración: $\Leftarrow$) Supongamos que X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^M$. Como $[0,1]$ es completamente regular y el producto de espacios con esta propiedad la conserva, entonces $[0,1]^M$ es completamente regular. Además es hereditaria y topológica, por lo tanto, de nuestra hipótesis resulta que X es completamente regular.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es completamente regular. Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de funciones reales continuas $f_\alpha : X \to [0,1]$ y sea M un conjunto que indique a todos los elementos de $\mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F} = \{f_\alpha : X \to [0,1] : \alpha \in M\}$. Como X es completamente regular es facil ver que $\mathfrak{F}$ puede distinguir puntos de conjuntos cerrados y como todo conjunto formado por un solo

punto es un conjunto cerrado de X (X es un espacio T_1), entonces tambien distingue puntos de puntos. De tal manera que la función $f : X \to [0,1]^M$ dada por $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$,(recuerde que los elementos de $[0,1]^M$ son funciones de M en $[0,1]$), es un homeomorfismo de X en f(X).

EJERCICIOS - CAPITULO IV

Sección 1.

1.1 - Sea $X=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$. ¿Cuáles son los subconjuntos densos de (X,T)?

1.2 - Demuestre que en un espacio infinito con la topología co-finita, cualquier subconjunto infinito es denso.

1.3 - Sea $T=\{\emptyset,\mathbb{N}\}\cup\{\{1,\dots,n\}:n\in\mathbb{N}\}$. Demuestre que T es una topología en $\mathbb{N}$; que el conjunto $\{1\}$ es denso en $\mathbb{N}$ para esta topología, pero que $\{2n:n\in\mathbb{N}\}$ no lo es.

1.4 - Demuestre que $\mathbb{Q}$ es denso en la linea de Sorgenfrey.

1.5 - Sea X un conjunto y T_1, T_2 dos topologías en X tales que $T_1\leq T_2$. Si D es denso en (X,T_2), entonces lo es en (X,T_1).

1.6 - Sea $D\subseteq X$ denso y $E\subseteq X$. Si E contiene un subconjunto abierto denso en E, entonces $E\cap D$ es denso en E.

1.7 - Verifique que la colección T en el ejemplo 1.7.2 es una topología en X y que la topología relativa en $X-\{x_0\}$ es la topología discreta.

Sección 2.

2.1 - Demostrar el Teorema 2.9.

2.2 - Demostrar que si ΠX_α es primero numerable, entonces cada X_α lo es.

2.3 - Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto no es primero numerable a pesar de que cada uno de sus factores lo es.

2.4 - Demuestre que la Linea de Sorgenfrey es un espacio primero numerable pero no es segundo numerable.

Sección 3.

3.1 - Demuestre que cualquier subespacio de un espacio T_0, es T_0 y que el producto de espacios T_0 lo es tambien.

3.2 - Demuestre que la imagen continua de un espacio $T_0(T_1)$, no necesariamente es un espacio $T_0,(T_1)$.

3.3 - Demuestre que T_0 es una propiedad topológica.

3.4 - (a) Demostrar que T_1 es una propiedad topológica y dar un ejemplo de una función $f:X\to Y$ continua y abierta, con X T_1 y Y no T_1.

(b) Demuestre que T_1 es una propiedad hereditaria.

(c) Demuestre que el producto de espacios es un espacio T_1 si y solo si cada factor es un espacio T_1.

(Sugerencia: Semejante a la demostración del Teorema 3.15).

3.5 - Un espacio X es T_1 si y solo si para cada $x\in X$, la intersección de los abiertos que lo contienen es igual a $\{x\}$.

3.6 - Demuestre que un espacio cociente $X/\sim$ de un espacio X T_1 es T_1 si y solo si cada elemento de $X/\sim$ es un subconjunto cerrado en X.

3.7 - Demuestre que el espacio de Sierpinski (Ver 5.2.4 Cap. I) y cualquier espacio indiscreto con más de un punto, no son espacios T_2.

3.8 - Sea T_1 y T_2 dos topologías en un conjunto X tales que $T_1\leq T_2$. Si (X,T_1) es Hausdorff, entonces (X,T_2) lo es.

3.9 - Demuestre que la propiedad de ser T_2 es una propiedad topológica.

3.10 - X es un espacio T_2 si la diagonal $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ es un conjunto cerrado en el producto $X\times X$.

3.11 - Sea f una función continua de un espacio X en un espacio Hausdorff Y. Demuestre que $\{(x_1,x_2):f(x_1)=f(x_2)\}$ es un conjunto cerrado en $X\times X$.

3.12 - Si f es una función continua de un espacio X en un espacio Hausdorff Y, entonces $\{(x_1,x_2):f(x_1)=f(x_2)\}$ es un conjunto cerrado en XxX.

3.13 - Si $f:X\to Y$ es continua, abierta y suprayectiva, entonces Y es T_2 si y solo si $\{(x_1,x_2): f(x_1)=f(x_2)\}$ es un subconjunto cerrado en XxX.

3.14 - Si $f,g:X\to Y$ son funciones continuas y Y es un espacio T_2, entonces $\{x:f(x)=g(x)\}$ es un conjunto cerrado en X.
En particular si $f:X\to X$ es continua y X es un espacio T_2, entonces el conjunto de puntos fijos $\{x:f(x)=x\}$ es un conjunto cerrado en X.

3.15 - Sean f y g dos funciones continuas definidas en un espacio X y con valores en un espacio Y Hausdorff. Si f y g coinciden en un subconjunto denso de X, entonces f=g. (Sugerencia: Utilice el ejercicio anterior).

Sección 4.

4.1 - Demostrar que cualquier espacio discreto es normal.

4.2 - Demuestre que los espacios siguientes no satisfacen el axioma de separación dado en la Definición 4.1(b) y por lo tanto no son regulares.

(a) El espacio definido en 1.3 Cap. I.

(b) El espacio definido en 1.4 Cap. I.

(c) Cualquier conjunto infinito con la topología cofinita.

4.3 - Demuestre que la Línea de Sorgenfrey es un espacio regular. (Ejer. 1.6 Cap. I).

4.4 - Demuestre que un espacio T_1 es regular si y solo si cada punto posee una base de vecindades consistente de conjuntos cerrados.

4.5 - Demuestre que la propiedad de regularidad es una propiedad hereditaria.

4.6 - Demuestre que la propiedad de un espacio de ser completamente regular es una propiedad topológica y tambien hereditaria.

4.7 - Demuestre que los espacios cocientes de un espacio completamente regular, no satisfacen necesariamente el axioma de separación (b) en la Definición 4.13.

4.8 - Demuestre el Teorema 4.10.

CAPITULO V

COMPACIDAD

INTRODUCCION

En este capítulo, estudiaremos compacidad en espacios topológicos y algunos otros conceptos cercanos a éste.

El concepto de compacidad es una abstracción de una propiedad de gran importancia que poseen algunos subconjuntos de los números reales. Esta propiedad está expresada en el Teorema de Heine-Borel:

Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual, $F\subseteq\mathbb{R}$ es cerrado y acotado si y solo si cada vez que se tenga una familia de subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ cuya unión contiene a F, es posible extraer una subcolección finita que contiene aun a F.

Esta propiedad de los subconjuntos cerrados y acotados en la recta real tiene importantes consecuencias. Por ejemplo, dada cualquier función real continua f definida sobre un conjunto cerrado y acotado F de $\mathbb{R}$, existen $a,b\in F$ tales que $f(a)=\sup\{f(x):x\in F\}$; $f(b)=\inf\{f(x):x\in F\}$. En particular, f es una función acotada. Además f es uniformemente continua; es decir, para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$, tal que si $|x-x'|<\delta$ entonces $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

Estas propiedades no se mantienen necesariamente para funciones continuas definidas sobre conjuntos no cerrados o no acotados, como es el caso de la función $f(x)=1/x$ definida en el conjunto $(0,1)$.

La propiedad de los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$, que menciona el Teorema de Heine-Borel, nos servirá para definir los espacios compactos.

En la sección 2 veremos espacios que a pesar de no ser compactos, localmente tienen un mismo "comportamiento".

En la sección 3 haremos una breve discusión de espacios también definidos por medio del concepto de cubiertas abiertas. En este caso la numerabilidad jugará un papel fundamental.

En la última sección, hablaremos de una clase de espacios de gran importancia: Los espacios Paracompactos, que fueron introducidos por el matemático francés Dieudonné en 1944. La importancia de esta clase de espacios radica en que es suficientemente reducida para poseer propiedades fuertes y además contiene a los espacios compactos y a los espacios métricos (Teorema de Stone).

Sección 1. Espacios Compactos.

1.1 - Definición:

1.- Sea (X,T) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una cubierta abierta de X si $\mathcal{B}\subseteq T$ y $\bigcup\{C:C\in\mathcal{B}\}=X$.

2.- Sea $\mathcal{B}$ una cubierta abierta de X. Una subcubierta $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ es una subcolección de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup\{C:C\in\mathcal{D}\}=X$.

1.2 - Ejemplos:

(1) Para cualquier espacio topológico (X,T), $\mathcal{B}=\{X\}$ es una cubierta abierta de X.

(2) En $(\mathbb{R},T_{\mathbb{R}})$, $\mathcal{B}_1=\{(-n,n):n\in\mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_2=\{(n,n+\ ):n\in\mathbb{Z}\}$ y $\mathcal{B}_3=\{(-\infty,1),(0,\infty)\}$ son tres cubiertas abiertas diferentes.

(3) Si X es un espacio métrico, entonces la familia de bolas abiertas es una cubierta abierta para X.

(4) Cualquier base o sub-base de un espacio topológico es una cubierta abierta.

1.3 - Definición:

1.- Un espacio (X,T) es compacto si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

2.- Un subconjunto F de un espacio topológico X, es compacto, si considerado con la topología relativa, satisface la definición de compacidad.

1.4 - Ejemplos:

1.- Del Teorema de Heine-Borel, resulta que cualquier conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ es compacto. Así todo intervalo cerrado $[a,b]$ es compacto.

2.- Del mismo Teorema de Heine-Borel se tiene que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que no sea cerrado o que no sea acotado, no es compacto. En particular, cualquier intervalo de la forma (a,b), $(a,b]$ o $[a,b)$, incluyendo a $\mathbb{R}$, no son compactos.

Veamos como en efecto $\mathbb{R}$ no satisface la definición de compacidad. Para ello es suficiente dar una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ tal que sea imposible extraer de ella una subcubierta finita.

Consideremos la cubierta $\mathcal{B}_1$ dada en el ejemplo 1.2.2 y sea $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}_1$ finito. $\mathcal{D}$ es entonces de la forma $\{(-n_1,n_1),\ldots,(-n_k,n_k)\}$ de tal manera que $\bigcup_{i}^{k}(-n_i,n_i)=(-n_0,n_0)$, donde $n_0=\max\{n_1,\ldots,n_k\}$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ no cubre a $\mathbb{R}$ (En particular $n_0\notin(-n_0,n_0)$).

3.- Sea X un espacio discreto. En este caso $\mathcal{B}=\{\{x\}:x\in X\}$ es una cubierta abierta de X y es claro que podremos extraer una subcubierta finita sí y solo si X es un conjunto finito. Es decir, X con la topología discreta es compacto si y solo si es un conjunto finito.

4.- Sea X un conjunto, $p_0\in X$ un punto fijo y $T\subseteq\mathcal{P}(X)$ dado por $T=\{\emptyset\}\cup\{A\subseteq X:(i)\,p_0\notin A$ ó $(ii)\,p_0\in A$ y $X-A$ es finito$\}$.

T es una topología en X y coincide con la topología discreta si X es finito.

Consideremos el caso no trivial, X infinito. Si $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta de X, entonces p_0 pertenece a algun elemento C_0 de $\mathcal{B}$. Esto implica que $X-C_0$ es finito: $X-C_0=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Para cada x_i existe $C_i\in\mathcal{B}$ tal que $x_i\in C_i$ y asi $\{C_0,C_1,\ldots,C_n\}$ es una subcubierta finita de X. Es decir, X es compacto. A este espacio se le llama el espacio de Fort.

Cada vez que hemos introducido alguna nueva clase de espacios topológicos, una de nuestras preocupaciones ha sido investigar si la propiedad que determina a esa clase es o no hereditaria; si se conserva al considerar productos y si se conserva bajo funciones satisfaciendo alguna propiedad (continuas, continuas y abiertas, homeomorfismos).

En el caso de la compacidad, los ejemplos 1.4.1 y 1.4.2 nos muestran que no es una propiedad hereditaria. El intervalo $[0,1]$ es compacto pero su subespacio $(0,1)$ no lo es. El espacio de Fort es compacto, pero su subespacio $X-\{p_0\}$ como es discreto, si X es infinito, no es compacto.

Sin embargo, se tiene que:

1.5 - Teorema: Cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.

Demostración: Sea $E\subseteq X$ cerrado y $\mathcal{B}$ una cubierta abierta de E. Cada elemento $C\in\mathcal{B}$ es de la forma $E\cap A_C$, donde A_C es un conjunto abierto en X. La colección $\{X-E\}\cup\{A_C:C\in\mathcal{B}\}$ es una cubierta abierta de X y como X es compacto, entonces tiene una subcubierta finita. Las intersecciones con E de los elementos de esta cubierta finita, forman una subcubierta finita de $\mathcal{B}$ para E.

1.6 - Teorema: Sea $f:X\to Y$ una función continua suprayectiva. Si X es un espacio compacto, entonces Y es compacto.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una cubierta abierta de Y. Como f es continua, $\mathcal{D}=\{f^{-1}(C):C\in\mathcal{B}\}$ es una colección de conjuntos abiertos de X que cubre a X. Asi podemos encontrar conjuntos $C_1,\ldots,C_n$ tales que

$\bigcup\limits_{i}^{m} f^{-1}(C_i)=X.$

Ahora es facil ver que $\{C_1,\ldots,C_n\}$ es una cubierta de Y.

1.7 - Ejemplo: Si X es compacto, entonces cualquier espacio cociente de X, que es imagen continua de X, es compacto.

La compacidad es una propiedad de suma importancia y fuerza. En el siguiente Teorema se puede apreciar cómo los subconjuntos compactos de un espacio topológico se "comportan como puntos".

1.8 - Teorema:

(a) Sea X un espacio Hausdorff y K_1, K_2 dos subconjuntos compactos ajenos de X. Entonces existen dos abiertos A y B en X tales que $A\cap B=\emptyset$ y $K_1\subseteq A, K_2\subseteq B$.

(b) Sea X un espacio regular. Si $F\subseteq X$ cerrado y $K\subseteq X$ compacto son tales que $K\cap F=\emptyset$, entonces existen dos abiertos A,B en X que los separan; es decir, $A\cap B=\emptyset$, $F\subseteq A$, $K\subseteq B$.

Demostración:

(a) Sea $x\in K_1$ fijo. Para cada $y\in K_2$, existen dos abiertos ajenos A_y, B_y tales que $x\in A_y$, $y\in B_y$ (X es Hausdorff). $\{B_y\cap K_2 : y\in K_2\}$ es una cubierta abierta de K_2. Sea $\{B_{y_1}\cap K_2,\ldots,B_{y_n}\cap K_2\}$ una subcubierta finita. $K_2\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{y_i}=B_x$ y si $A_x=\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_{y_i}$, resulta que A_x es un abierto (es intersección finita de conjuntos abiertos) que contiene a x. Además $A_x\cap B_x=\emptyset$.

Así para cada $x\in K_1$ hemos hallado dos abiertos ajenos A_x, B_x tales que $x\in A_x$ y $K_2\subseteq B_x$.

La colección $\{A_x\cap K_1 : x\in K_1\}$ forma una cubierta abierta de K_1. Si $\{A_{x_1}\cap K_1,\ldots,A_{x_m}\cap K_1\}$ es una subcubierta finita, entonces $K_1\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_{x_i}=A$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{m} B_{x_i}=B$ es un abierto que contiene a K_2. Ahora es fácil ver que $A\cap B=\emptyset$.

(b) La demostración se hace de manera semejante a aquella del inciso anterior y se deja como ejercicio.

1.9 - Corolario: Un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración: Sea X un espacio Hausdorff y $K\subseteq X$ compacto. Vamos a demostrar que X-K es un conjunto abierto (Ver Teorema 13 Cap. I). Sea $x\in X-K$. Como $\{x\}$ es compacto, resulta del Teorema anterior que existe un abierto B_x tal que $x\in B_x\subseteq X-K$. Es decir, X-K es abierto y K es cerrado.

1.10 - Corolario: Si f es una función biyectiva y continua de un compacto en un Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración: Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f:X\to Y$ satisfaciendo las hipótesis de nuestra afirmación. Del Teorema 1.15 Cap. II, es suficiente probar que f es una función cerrada.

Sea $F\subseteq X$ cerrado. Como X es compacto, F lo es también. Como f es continua, f(F) es compacto en Y y por lo tanto cerrado. Es decir, f es una función cerrada.

1.11 - Corolario: Cualquier espacio Hausdorff compacto es normal.

Demostración: Sean F_1 y F_2 dos cerrados ajenos en un espacio X Hausdorff compacto. De 1.7 resulta que F_1 y F_2 son compactos y de 1.8(a) resulta que existen dos abiertos A_1 y A_2 tales que $F_1\subseteq A_1$, $F_2\subseteq A_2$ y $A_1\cap A_2=\emptyset$. Como F_1 y F_2 son dos conjuntos cerrados arbitrarios, entonces queda demostrado que X es normal.

1.12 - Ejemplo: El espacio de Fort (ejemplo 1.4.4) es un espacio Hausdorff (verifíquelo) compacto, por lo tanto es un espacio normal.

Sección 2. Teorema de Tychonoff.

En esta sección demostraremos uno de los teoremas más importantes de la topología abstracta, el Teorema de Tychonoff:

2.1 - Teorema: Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. El producto topológico ΠX_α es compacto si y solo si cada factor X_α es compacto.

Demostración: Para demostrar el Teorema, usaremos algunas nociones de teoría de conjuntos:

(a) Una clase $\mathcal{B}$ de conjuntos se dice que es de caracter finito si y solo si satisface:

Un conjunto $E\in\mathcal{B}$ si y solo si cualquier subconjunto finito de E pertenece a $\mathcal{B}$.

(b) Lema de Tukey: Cualquier elemento A de una clase $\mathcal{B}$ de conjuntos de caracter finito, está contenido en un miembro maximal M en $\mathcal{B}$.

Este Lema es equivalente al Axioma de Elección.

Veamos ahora la demostración de nuestro teorema. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos compactos y sea X el espacio producto ΠX_α. Vamos a demostrar la compacidad de X. Del ejercicio 1.8 es suficiente demostrar la siguiente afirmación: Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita, entonces $\bigcap\{c(F):F\in\mathcal{F}\}\neq\emptyset$.

Consideremos la clase $\mathcal{B}$ de todas las familias de subconjuntos de X, las cuales poseen la propiedad de intersección finita. Esta clase $\mathcal{B}$ claramente es de caracter finito. Del Lema de Tukey, existe un miembro maximal $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{B}$ el cual contiene a $\mathcal{F}$.

De la maximalidad de $\mathcal{F}'$ se obtiene que la intersección de los miembros de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}'$ pertenece a $\mathcal{F}'$.

Ademas si un subconjunto E de X intersecta a cualquier miembro de $\mathcal{F}'$ entonces $E\in\mathcal{F}'$.

Para cada $\alpha\in I$ consideremos la familia

$$\mathcal{F}_\alpha=\{p_\alpha(F):F\in\mathcal{F}'\}.$$

$\mathcal{F}_\alpha$ tiene la propiedad de intersección finita y como X es compacto, entonces $H_\alpha=\bigcap\{c(p_\alpha(F)):F\in\mathcal{F}'\}\neq\emptyset$. Tomemos $x_\alpha\in H_\alpha$ para cada índice $\alpha\in I$ y sea x el elemento en X cuya α-ésima coordenada es x_α. Vamos a demostrar que $x\in c(F)$ para cualquier $F\in\mathcal{F}'$.

Con este fin, consideremos un conjunto abierto sub-básico arbitrario $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ de X que contenga a x, donde $\alpha\in I$ y U_α es un conjunto abierto en X_α conteniendo a x_α. Como $x_\alpha\in c(p_\alpha(F))$ para cada $F\in\mathcal{F}'$, se sigue que U_α intersecta a $p_\alpha(F)$ para cada $F\in\mathcal{F}'$. Por lo tanto $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ intersecta a cualquier elemento de $\mathcal{F}'$. De la maximalidad de $\mathcal{F}'$ resulta que $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ pertenece a $\mathcal{F}'$ y por lo tanto, la intersección de cualquier número finito de sub-básicos conteniendo a x, es un miembro de $\mathcal{F}'$. Esto significa que cualquier vecindad de x en X intersecta a cualquier elemento de $\mathcal{F}'$; es decir, $x\in c(F)$ para cualquier $F\in\mathcal{F}'$ y por lo tanto $\bigcap\{c(F):F\in\mathcal{F}'\}\neq\emptyset$. En particular $\bigcap\{c(F):F\in\mathcal{F}\}\neq\emptyset$.

2.2 - Ejemplos:

1.- Del teorema anterior resulta que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual no es un espacio compacto y $[0,1]^n$ si lo es. Mas generalmente, para cualquier conjunto M y cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, $[a,b]^M$ es un espacio compacto.

2.- Como cualquier cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ está contenido en algun cubo $[a,b]^M$ y es cerrado ahí, entonces, cualquier conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ es compacto.

Sección 3. Espacios Localmente Compactos

Muchos de los espacios de importancia con los que se trabaja en análisis, no son compactos pero localmente se comportan como los espacio compactos.

3.1 - Definición: Decimos que un espacio topológico (X,T) es localmente compacto si cada punto en X está contenido en una vecindad compacta. Es decir, para cada punto $x \in X$ podemos encontrar un compacto K y un abierto A tal que $x \in A \subseteq K$.

3.2 - Ejemplos:

1.- Sea X un espacio topológico. Como X es vecindad de cada uno de sus puntos, entonces resulta que cualquier espacio compacto es localmente compacto.

2.- La linea real con la topología usual es un espacio no compacto, pero sí es localmente compacto. En efecto, si x es un número real, cualquier intervalo de la forma $[a,b]$ tal que $a<x<b$ es una vecindad compacta de x. En general, todo espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto: las cerraduras de cualquier bola centrada en $x \in \mathbb{R}^n$ es una vecindad compacta de x.

3.- Como los espacios finitos son compactos, entonces cualquier espacio discreto X es localmente compacto: $\{x\}$ es una vecindad de x para cada punto en X.

4.- Es facil probar que cualquier sub-espacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto. Sin embargo, esta propiedad, no es hereditaria. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales, considerado como sub-espacio de la recta real, no es localmente compacto: Supongamos que $p \in i_{\mathbb{Q}}(K) \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}$ y K compacto en $\mathbb{Q}$. K es entonces compacto en $\mathbb{R}$ (Ver ejercicio 1.5), pero esto no es posible, ya que existe un intervalo (a,b) tal que $(a,b) \cap \mathbb{Q} \subseteq i_{\mathbb{Q}}(K) \subseteq K$ y cualquier punto $x \in (a,b) - \mathbb{Q}$ es un punto de acumulación de K en $\mathbb{R}$ que no está en K, es decir, K no es cerrado en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, no es compacto.

3.3 - Teorema: Sea (X,T) un espacio localmente compacto. Si X es T_2, entonces cada punto de x posee un sistema básico de vecindades compactas.

Demostración: Sea $x \in X$ y K una vecindad compacta de x y A un conjunto abierto conteniendo a x. $A \cap K$ es un abierto en el subespacio K que contiene a x. Como K es T_2 y compacto, entonces es normal (1.13 de este capítulo). Del Teorema 4.10 Cap. IV, podemos asegurar que existe un abierto B en K tal que $x \in B \subseteq c_K(B) \subseteq A \cap K$. Existe pues un subconjunto abierto B' de X tal que $B = K \cap B'$. Como K es una vecindad de x, entonces $x \in i(K) \cap B' \subseteq B \subseteq c_K(B)$. $i(K) \cap B'$ es abierto en X y $c_K(B)$ es compacto, de tal manera que $c_K(B)$ es una vecindad compacta de x contenida en A.

3.4 - Teorema: Cualquier espacio localmente compacto Hausdorff, es completamente regular.

Demostración: Sea X localmente compacto y T_2. En particular X es T_1. Sea $x_0 \in X$ y A un abierto conteniendo a x_0. Del Teorema anterior existe una vecindad compacta K de x tal que $K \subseteq A$. Para cada punto $p \in K$ existe una vecindad compacta K_p de p contenida en A. Como K_p es vecindad de p, entonces $p \in i(K_p)$ y asi $\{i(K_p)\}_{p \in K}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $p_1, \ldots, p_n \in K$ tales que $K \subseteq i(K_{p_1}) \cup \ldots \cup i(K_{p_n}) \subseteq K_{p_1} \cup \ldots \cup K_{p_n} \subseteq A$. Por lo tanto $K_{p_1} \cup \ldots \cup K_{p_n} = M$ es una vecindad compacta de K. Denotemos por N al conjunto $i(K_{p_1}) \cup \ldots \cup i(K_{p_n})$ contenido en A. Como M es compacto y T_2 entonces es normal. K y $M-N$ son dos conjuntos cerrados ajenos en el espacio normal M. Por el Lema de Urysohn existe $g: M \to [0,1]$ continua tal que $g(K)=\{0\}$ y $g(M-N)=\{1\}$. Sea $f: X \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in M \\ 1 & \text{si } x \in X-N \end{cases}$$

Para demostrar que f es continua, consideremos un subconjunto cerrado F de $[0,1]$. Es facil ver que

$$f^{-1}(F)=\begin{cases} g^{-1}(F) & \text{si } 1\notin F \\ g^{-1}(F)\cup X-N & \text{si } 1\in F \end{cases}$$

Ahora bien, $g^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en M y como M es cerrado en X por ser compacto en un T_2, entonces $g^{-1}(F)$ es cerrado en X. X-N es también cerrado en X. De aquí se desprende la continuidad de f y obtenemos lo deseado.

3.5 - Ejemplo: El espacio de Fort (ejemplo 1.4.4) es un espacio T_2 y localmente compacto; por lo tanto, es completamente regular.

3.6 - Teorema: Sea X un espacio localmente compacto y $f:X\to Y$ una función suprayectiva continua y abierta, entonces Y es localmente compacto. Es decir, la imagen continua y abierta de cualquier localmente compacto es un espacio localmente compacto.

Demostración: Sea $y\in Y$ cualquiera y $x\in X$ tal que $f(x)=y$. Como X es localmente compacto, existe un compacto $K\subseteq X$ y un abierto $A\subseteq X$ tales que $x\in A\subseteq K$. Como f es una función abierta, f(A) es abierto en Y, y como f es continua, f(K) es compacto y además $y\in f(A)\subseteq f(K)$; por lo tanto, f(K) es una vecindad compacta de y, lo que muestra el Teorema.

Con respecto al producto de espacios localmente compactos, tenemos el siguiente Teorema:

3.7 - Teorema: Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios no vacios. El espacio producto ΠX_α es localmente compacto si y solo si

(a) Cada X_α es localmente compacto.

(b) Todos los espacios X_α son compactos con excepción quizás de un número finito de ellos.

Demostración:

$\Rightarrow$) a) Como las proyecciones son funciones continuas y abiertas, resulta del Teorema anterior que si ΠX_α es localmente compacto, entonces cada X_α lo es también.

(b) Ahora consideremos un punto $x\in\Pi X_\alpha$. Como este espacio es localmente compacto entonces existe una vecindad compacta K de x. Entonces K contiene un elemento básico B de la forma

$$B=p_{\alpha_1}^{-1}(A_{\alpha_1})\cap\ldots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(A_{\alpha_n}).$$

Así tenemos que para cada $\alpha\neq\alpha_i$ para toda $i=1,\ldots,n$, $X_\alpha=p_\alpha(B)\subseteq p_\alpha(K)$, es decir, $p_\alpha(K)=X_\alpha$. Como K es compacto y p_α continua, entonces X_α es compacto y esto para toda X_α con excepción quizás de $X_{\alpha_i},\ldots,X_{\alpha_n}$.

$\Leftarrow$) Si X_α es un espacio compacto para toda $\alpha\in I$, entonces del Teorema de Tychonoff (Teorema 2.1) resulta que ΠX_α es un espacio compacto y por ende localmente compacto.

Supongamos que este no es el caso y sea $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subseteq I$ el conjunto de índices tales que $X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_n}$ son los espacios no compactos de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Si $x\in\Pi X_\alpha$ y si K_i es una vecindad compacta de la α_i-ésima coordenada de x para cada $i=1,\ldots,n$, entonces

$$p_{\alpha_1}^{-1}(K_1)\cap\ldots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(K_n)$$

es una vecindad compacta de x.

Sección 4. Espacios Numerablemente Compactos y Espacios de Lindelöf.

Hemos elegido discutir juntas estas dos clases de espacios en razón de ser clases de espacios determinadas por axiomas en donde interviene de manera fundamental el concepto de numerabilidad.

4.1 - Definición:

a) Un espacio X es numerablemente compacto si dada cualquier cubierta abierta numerable de X, es posible extraer una subcubierta finita.

b) Un espacio X es Lindelöf si dada cualquier cubierta abierta de X, existe una subcubierta numerable.

4.2 - Ejemplos:

1.- De las definiciones resulta claro que cualquier espacio compacto es numerablemente compacto y es Lindelöf.

2.- Con una argumentación semejante a la dada en el Teorema 1.5, es facil demostrar que todo subespacio cerrado de un numerablemente compacto (Lindelöf) es numerablemente compacto (Lindelöf).

3.- Si X es un espacio discreto y es infinito, entonces podemos elegir un subconjunto numerable $E=\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ de X. La colección $\{\{x_i\}:i\in\mathbb{N}\}\cup\{X-E\}$ es una cubierta abierta numerable de X y es facil ver que no tiene subcubiertas finitas. Es decir, X no es numerablemente compacto.

Si X es más que numerable, entonces $\{\{x\}:x\in X\}$ es una cubierta abierta que no posee subcubiertas numerables. Es decir, cualquier espacio discreto más que numerable, no es Lindelöf.

4.- Cualquier espacio numerable es Lindelöf, de tal manera que un espacio numerable con la topología discreta, es un ejemplo de espacio Lindelöf que no es compacto ni numerablemente compacto.

5.- Sea X un conjunto más que numerable y $p_o\in X$ un punto en X. Sea $T=\{X\}\cup\{E\subseteq X:p_o\notin E\}$. T es una topología en X y el único abierto que contiene a p_o es todo el espacio X, de tal manera que el espacio es compacto ya que cualquier cubierta de X debe contener

a X como elemento y {X} sería una subcubierta finita. De aquí que (X,T) es Lindelöf y numerablemente compacto. Sin embargo $X-\{p_o\}$ con la topología relativa es un espacio discreto y además es más que numerable, por lo tanto, no es ni Lindelöf ni numerablemente compacto. Esto significa que no cualquier subespacio de un espacio Lindelöf (numerablemente compacto) es Lindelöf (numerablemente compacto).

6.- Todo Lindelöf, numerablemente compacto, es compacto: En efecto si X satisface estas dos propiedades y $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta arbitraria de X, entonces puede ser encontrada una subcubierta $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$, numerable (X es Lindelof), y como es numerablemente compacto, existe una subcubierta $\mathcal{B}''$ de $\mathcal{B}'$, y por lo tanto de $\mathcal{B}$, finita. Esto demuestra que X es compacto.

7.- La Línea de Sorgenfrey es un espacio de Lindelöf :

Sea (X,T) la Línea de Sorgenfrey y $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta de X.

Sea $M\subseteq\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ el conjunto de parejas de racionales (p,q) tales que p<q y el intervalo [p,q) es subconjunto de algun $U_\alpha\in\mathcal{U}$. Para cada pareja $(p,q)\in M$, elegimos un $U_{\alpha(p,q)}\in\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tal que $[p,q)\subseteq U_{\alpha(p,q)}$.

Denotemos por $p_2(M)$ al conjunto de segundas coordenadas de los elementos en M. Para cada $q\in p_2(M)$ sea $x_q\in\mathbb{R}$ tal que $x_q=\inf\{x\in\mathbb{R}:[x,q)$ es subconjunto de algun $U_\alpha\in\mathcal{U}\}$, y para cada x_q sea $U_{\alpha(q)}\in\mathcal{U}$ tal que $x_q\in U_{\alpha(q)}$.

La colección $\mathcal{U}'=\{U_{\alpha(p,q)}\}_{(p,q)\in M}\cup\{U_{\alpha(q)}\}_{q\in p_2(M)}$ es numerable y vamos a demostrar que cubre a $\mathbb{R}$.

Sea $x\in\mathbb{R}$. Si $x=x_q$ para alguna $q\in p_2(M)$, entonces $x\in U_{\alpha(q)}$. Si $x\notin\{x_q\}_{q\in p_2(M)}$ existe $U_\alpha\in\mathcal{U}$ tal que $x\in U_\alpha$. Como U_α

es abierto, entonces existe $q\in\mathbb{Q}$ tal que $[x,q)\subseteq U_\alpha$. $q\in p_2(M)$, ya que para cualquier racional $p'\in[x,q)$, $[p',q)\subseteq U_\alpha$. Como $x\neq x_q$, $x_q<x$. Si $p\in\mathbb{Q}$ es tal que $x_q<p<x$, por la definición de x_q se tendría $[p,q)\subseteq U_\alpha$, es decir, $(p,q)\in M$. Como $x\in[p,q)$ entonces x pertenece a $U_{\alpha(p,q)}$.

4.3 - Teorema: Si X es un espacio topológico segundo numerable, entonces X es Lindelöf.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X, y supongamos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de X. Para cada $A\in\mathcal{C}$ y cada $x\in A$, existe un $B_{(A,x)}\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B_{(A,x)}\subseteq A$. La colección

$\mathcal{B}'=\{B_{(A,x)}:x\in A, A\in\mathcal{C}\}$ es numerable ya que es una subcolección de $\mathcal{B}$. Digamos que $\mathcal{B}'=\{B_{(A_1,x_1)},B_{(A_2,x_2)},\dots\}$, entonces $\{A_1,A_2,\dots\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{C}$, ya que si $x\in X$ entonces existe $A\in\mathcal{C}$ tal que $x\in A$ y por lo tanto $x\in B_{(A,x)}$. Pero $B_{(A,x)}=B_{(A_n,x_n)}$ para alguna n, por lo tanto $x\in A_n$.

4.4 - Corolario: Cualquier espacio métrico separable es Lindelöf.

Demostración: Este resultado es una consecuencia del Teorema 2.5 Cap. IV y del Teorema anterior.

4.5 - Ejemplos:

1.- Los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n, n\in\mathbb{N}$, son espacios de Lindelöf.

2.- $\mathbb{R}^n$ para cualquier n es un ejemplo de espacio de Lindelöf que no es numerablemente compacto, ya que la cubierta numerable formada por las bolas abiertas centradas en el origen y de radio n, no posee subcubierta finita.

3.- La Linea de Sorgenfrey es un ejemplo de un espacio que es Lindelof pero no es segundo numerable. (Ver ejemplo 4.2.6 y ejercicio 2.4 del Cap. IV)

4.6 - Teorema: Si X es un espacio regular y Lindelof, entonces es normal.

Demostración: Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados ajenos de X. Para cada $x\in F_1$ existe por la regularidad del espacio, un conjunto abierto A_x conteniendo a x, tal que $c(A_x)\cap F_2=\emptyset$. De la misma manera para cada $y\in F_2$ existe un conjunto abierto B_y tal que $y\in B_y$ y $c(B_y)\cap F_1=\emptyset$.

Resulta que $\mathcal{C}_1=\{A_x, x\in F_1\}$ y $\mathcal{C}_2=\{B_y, y\in F_2\}$ son cubiertas abiertas de F_1 y F_2 respectivamente. Del ejemplo 4.2.2 sabemos que F_1 y F_2 son espacios de Lindelöf. Por lo tanto, existen $\{A_1,\dots,A_n,\dots\}\subseteq\mathcal{C}_1$ y $\{B_1,\dots,B_n,\dots\}\subseteq\mathcal{C}_2$ tales que $F_1\subseteq\bigcup A_i$, $F_2\subseteq\bigcup B_i$.

Consideremos la siguiente colección de conjuntos abiertos:

$$\begin{array}{ll} S_1=A_1 & T_1=B_1-c(S_1) \\ S_2=A_2-c(T_1) & T_2=B_2-c(S_1\cup S_2) \\ S_3=A_3-c(T_1\cup T_2) & T_3=B_3-c(S_1\cup S_2\cup S_3) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Se deja al lector que verifique que los conjuntos $S=\bigcup S_n$ y $T=\bigcup T_n$ son conjuntos abiertos ajenos conteniendo a F_1 y F_2 respectivamente.

4.7 Corolario: La Línea de Sorgenfrey es un espacio normal.

Demostración: Resulta del ejemplo 4.2.6 y del ejercicio 4.3 Cap. IV.

4.8 - Teorema: La imagen continua de cualquier espacio Lindelöf (numerablemente compacto) es Lindelöf (numerablemente compacto).

Demostración: Es semejante a aquella dada en 1.6 y se deja como ejercicio.

4.9 (a) El producto de espacio de Lindelöf no es necesariamente un espacio de Lindelöf. En efecto, si X es la línea de Sorgenfrey, entonces $X \times X$ no es Lindelof ya que si lo fuera, entonces sería normal por el Teorema 4.6. Pero $X \times X$ no es normal según ejercicio 4.10(b) del Cap. IV.

(b) Se puede demostrar también que el producto de espacios numerablemente compactos no es necesariamente numerablemente compacto. (Ver [4])

Sección 5. Espacios Paracompactos

5.1 - Definición:

1.- Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es una familia localmente finita si y solo si cada $x \in X$ posee una vecindad que intersecta a lo más una colección finita de los elementos de $\mathcal{U}$.

2.- Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X se dice que es σ-localmente finita si $\mathcal{U}$ es la unión de una colección numerable de familias localmente finitas.

5.2 - Ejemplos:

1.- Es obvio que cualquier colección finita de subconjuntos de un espacio X es localmente finita. De esto se desprende inmediatamente que cualquier colección numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X es σ-localmente finita ya que cada colección formada por un solo ele-

mento: $\{U_n\}$ es localmente finita.

2.- Cualquier colección localmente finita es σ-localmente finita.

3.- Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. La colección de intervalos de la forma $[n, n+2]$ con $n \in \mathbb{Z}$ es una familia localmente finita pues para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$ y la vecindad $(n-1, n+1)$ de x intersecta solamente a $[n-2, n]$, $[n-1, n+1]$, $[n, n+2]$.

4.- La colección de intervalos $(1/(n+1), 1/n)$ no es localmente finita en $(\mathbb{R}, T_{\mathbb{R}})$, ya que cualquier vecindad del 0 intersecta a una infinidad de intervalos de esa forma. Sin embargo, como es una colección numerable, entonces es σ-localmente finita.

5.3 - Teorema: Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia localmente finita en X, entonces

(a) $\mathcal{U}' = \{c(U_\alpha) : \alpha \in I\}$ es también una familia localmente finita.

(b) $\bigcup_{\alpha \in I} c(U_\alpha) = c(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)$, es decir, la unión de una familia localmente finita de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

Demostración: (a) Sea $x \in X$ y A un abierto que contiene a x. Si $z \in A \cap c(U_\alpha)$, entonces $z \in c(U_\alpha)$ y cualquier abierto que contenga a z, contiene elementos en U_α. A es un abierto que contiene a z y por lo tanto $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Así si A es la vecindad de x que intersecta a lo más una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$, entonces A intersecta a lo más una colección finita de elementos de $\mathcal{U}'$.

(b) Se tiene siempre que $\bigcup_{\alpha \in I} c(U_\alpha) \subseteq c(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)$. Sea ahora $x \in c(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)$. Como $\mathcal{U}$ es localmente finita, existe una vecindad A de x que intersecta solamente a una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. Si B es cualquier vecindad de x, $B \cap A$ lo es también y $(B \cap A) \cap (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) \neq \emptyset$; esto implica que existe $\alpha \in I$ tal que $(B \cap A) \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

Pero esta α debe ser alguna α_i, $i=1,\dots,n$, ya que A solo intersecta a $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$. Por lo tanto $B\cap(U_{\alpha_1}\cup\dots\cup U_{\alpha_n})\neq\emptyset$, es decir, $x\in c(U_{\alpha_1}\cup\dots\cup U_{\alpha_n})=c(U_{\alpha_1})\cup\dots\cup c(U_{\alpha_n})$, por lo tanto $x\in\bigcup_{\alpha\in I}c(A_\alpha)$.

5.4 - Definición:

1.- Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Una familia $\mathcal{U}'$ de subconjuntos de X es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para cada $U'\in\mathcal{U}'$ existe $U\in\mathcal{U}$ tal que $U'\subseteq U$ y $\bigcup\{U':U'\in\mathcal{U}'\}=\bigcup\{U:U\in\mathcal{U}\}$.

2.- En el caso en que todos los elementos de U' son conjuntos abiertos (cerrados) en X, entonces diremos que $\mathcal{U}'$ es un refinamiento abierto (cerrado) de $\mathcal{U}$.

5.5 - Ejemplos:

1.- Cualquier familia $\mathcal{U}$ es un refinamiento trivial de ella misma. La colección $\mathcal{U}'=\{\{x\}:x\in\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U\}$ es otro refinamiento de $\mathcal{U}$. En el caso en que X tuviera la topología discreta, entonces $\mathcal{U}'$ sería un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.

2.- Un refinamiento abierto de la colección de intervalos de la forma $[n,n+2]$ con $n\in\mathbb{Z}$ es la colección de intervalos abiertos $(n, n+2)$ con $n\in\mathbb{Z}$. Observe aquí que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+2)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+2]=\mathbb{R}$.

5.6 - Teorema: Si X es un espacio topológico tal que cualquier cubierta abierta de X posee un refinamiento cerrado localmente finito, entonces cualquier cubierta abierta de X posee un refinamiento abierto localmente finito.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X y sea $\mathcal{G}=\{G_\alpha:\alpha\in I\}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{A}$. Para cada $x\in X$ sea B_x una vecindad abierta de x que intersecta tan solo un conjunto finito de los elementos de $\mathcal{G}$. $\mathcal{B}=\{B_x:x\in X\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{F}$ un refinamiento cerrado localmente finito

de $\mathcal{B}$.

Para cada $\alpha\in I$ sea $W_\alpha=X-\bigcup\{F\in\mathcal{F}:F\cap G_\alpha=\emptyset\}$. Como $\mathcal{F}$ es localmente finito, resulta del Teorema 5.3 que W_α es un conjunto abierto. Ademas W_α contiene a G_α. Asi pues tenemos que:

(*) Para cualquier $\alpha\in I$ y cualquier $F\in\mathcal{F}$, $W_\alpha\cap F\neq\emptyset$ si y solo si $G_\alpha\cap F\neq\emptyset$

Ahora consideremos para cada $\alpha\in I$, un elemento $A_\alpha\in\mathcal{A}$ tal que $G_\alpha\subseteq A_\alpha$ y sea $V_\alpha=W_\alpha\cap A_\alpha$. La familia $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$. Demostremos que es tambien localmente finito: Como cada x tiene una vecindad U que intersecta tan solo una colección finita de elementos en $\mathcal{F}$ y cualquier elemento en $\mathcal{F}$ intersecta tan solo una colección finita de elementos de $\mathcal{G}$, entonces de (*) resulta que cada elemento en $\mathcal{F}$ intersecta tan solo una colección finita de elementos en $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y por lo tanto de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Esto implica que U intersecta tan solo una colección finita de elementos de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Es decir, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}$.

5.7 - Teorema: Cualquier cubierta abierta σ-localmente finita de un espacio topológico X, tiene un refinamiento localmente finito (formado de conjuntos arbitrarios).

Demostración: Sea $\mathcal{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ una cubierta abierta σ-localmente finito de X, donde cada $\mathcal{A}_n=\{A_{n\beta}:\beta\in I\}$ es una colección de conjuntos abiertos, localmente finita. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $W_n=\bigcup_{\beta\in I}A_{n\beta}$. La colección $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a X. Sea $U_n=W_n-\bigcup_{i<n}W_i$. Entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento localmente finito de $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La colección $\{U_n\cap A_{n\beta}:n\in\mathbb{N},\beta\in I\}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{A}$.

5.8 - Definición: Un espacio topológico (X,T) es Paracompacto si cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Es decir, un espacio (X,T) es Paracompacto si para cualquier familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos abiertos tal que $\bigcup\{A:A\in\mathcal{A}\}=X$, existe una colección $\mathcal{A}'$ de subconjuntos abiertos en X tal que

(1) Para cada $A'\in\mathcal{A}'$ existe $A\in\mathcal{A}$ tal que $A'\subseteq A$.

(2) $\bigcup\{A':A'\in\mathcal{A}'\}=X$.

(3) Cada $x\in X$ posee una vecindad que intersecta solo a una colección finita de elementos en $\mathcal{A}'$.

<u>5.9 - Ejemplos</u>:

1.- Cualquier espacio compacto X es paracompacto ya que si $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X, cualquier subcubierta finita $\mathcal{A}'$ es un refinamiento abierto localmente finito.

2.- Cualquier espacio discreto X es paracompacto, ya que $\{\{x\}:x\in X\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de cualquier cubierta abierta de X. (Si X es infinito, entonces con la topología discreta es un espacios Paracompacto que no es compacto).

<u>5.10 - Teorema</u>: Si X es un espacio regular, X es paracompacto si y solo si cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.

<u>Demostración:</u>

$\Rightarrow$) Es claro ya que cualquier refinamiento abierto localmente finito es un refinamiento abierto σ-localmente finito.

$\Leftarrow$) Es suficiente demostrar que cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado localmente finito (Teorema 5.6). Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Para cada $x\in X$, existe $A_x\in\mathcal{A}$ tal que $x\in A_x$. Como X es regular, existe una vecindad abierta B_x de x tal que $c(B_x)\subseteq A_x$. $\mathcal{B}=\{B_x\}_{x\in X}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{B}$. Del Teorema 5.7 existe un refinamiento $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ localmente finito de $\mathcal{V}$ (y por tanto de $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{A}$). Para cada $\alpha\in I$ sea $x(\alpha)\in X$ tal que $U_\alpha\subseteq B_{x(\alpha)}$ esto implica $c(U_\alpha)\subseteq c(B_{x(\alpha)})\subseteq A_{x(\alpha)}$. De aqui que $\{c(U_\alpha):\alpha\in I\}$ es un refinamiento cerrado localmente finito (Teorema 5.3) de $\mathcal{A}$.

<u>5.11 - Corolario</u>: Si (X,T) es un espacio regular y Lindelöf, entonces (X,T) es Paracompacto.

<u>Demostración</u>: Si $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X, entonces cualquier subcubierta abierta numerable de $\mathcal{A}$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito y del Teorema anterior obtenemos el resultado.

<u>5.12 - Ejemplos</u>:

1.- La Linea de Sorgenfrey es un espacio regular (Ejercicio 4.3 Cap. IV) y es Lindelöf (Ejemplo 4.2.6), por lo tanto es Paracompacto.

2.- Los espacios métricos separables son Paracompactos ya que son espacios regulares y Lindelöf (Corolario 4.4). En el siguiente Teorema demostramos aun más:

<u>5.13 - Teorema (Stone)</u>

Cualquier espacio métrico es Paracompacto.

<u>Demostración</u>: Sabemos que cualquier espacio métrico es regular, de tal manera que es suficiente demostrar que en cualquier espacio métrico, cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito (Teorema 5.10).

Sea (X,T_d) un espacio métrico y sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de X arbitraria. Para cualquier $A\in\mathcal{G}$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$ sea $A_n=\{x\in A:d(x,X-A)\geq 1/2^n\}$. Resulta entonces que $A_n\subseteq A_{n+1}$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$. Además es facil verificar que: $d(A_n, X-A_{n+1}) \geq 1/2^n - 1/2^{(n+1)} = 1/2^{(n+1)}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Consideremos en $\mathcal{B}$ un buen orden $<$. Para cada $A\in\mathcal{B}$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$, sea $A_n^* = A_n - \bigcup\{B_{n+1} : B\in\mathcal{B},\ B<A\}$ Para cada $A,B\in\mathcal{B}$, si $A<B$, entonces $B_n^*\subseteq X-A_{n+1}$; si $B<A$, se tiene $A_n^*\subseteq X-B_{n+1}$. En cualquiera de los dos casos resulta que $d(A_n^*,B_n^*)\geq 1/2^{(n+1)}$. Ahora bien, para cada $A\in\mathcal{B}$ y cada $n\in\mathbb{N}$ definimos un conjunto abierto $\tilde{A}_n$ por:

$$\tilde{A}_n = \{ x\in X : d(x,A_n^*) < 1/2^{(n+3)} \}.$$

De la desigualdad del triángulo, es facil constatar que $d(\tilde{A}_n,\tilde{B}_n)\geq 1/2^{(n+2)}$, esto para cualquier pareja $A,B\in\mathcal{B}$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$. De aquí resulta que la familia $\mathcal{D}_n=\{\tilde{A}_n : A\in\mathcal{B}\}$ es una familia de conjuntos abiertos, localmente finita, y por lo tanto la familia $\mathcal{D}=\bigcup\{\mathcal{D}_n : n\in\mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos abiertos σ-localmente finita.

Nos queda por demostrar que $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{B}$: Sea x un elemento arbitrario de X. Si A es el primer elemento de la cubierta $\mathcal{B}$ que contiene a x, entonces $x\in\tilde{A}_n$ para alguna $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es una cubierta abierta de X. Ademas como $\tilde{A}_n\subseteq A$ para cualquier $A\in\mathcal{B}$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$, entonces en efecto $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{B}$. O

En los siguientes teoremas demostraremos que la clase de espacios Paracompactos y Hausdorff está contenida en la clase de los espacios Normales. Para ello probaremos primero un Lema.

<u>5.14 - Lema</u>: Si X es un espacios Paracompacto y Hausdorff, entonces X es un espacios regular.

<u>Demostración</u>: Sea $x\in X$ y sea A un conjunto abierto conteniendo a x. Para cada $y\in X-A$ sea A_y y B_y dos abiertos en X tales que $x\in A_y$, $y\in B_y$ y $A_y\cap B_y=\emptyset$.

La colección $\mathcal{B}=\{B_y : y\in X-A\}\cup\{A\}$ es una cubierta abierta del espacio X. Como X es paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$.

Como $\mathcal{D}$ es localmente finito, existe un abierto U que contiene a x y que intersecta solamente a un número finito de elementos de $\mathcal{D}$. Sean $W_1,\dots,W_n$ todos los elementos de $\mathcal{D}$ que intersectan a U y no estan contenidos en A. Existen entonces n puntos $y_1,\dots,y_n$ de $X-A$ tales que $W_i\subseteq B_{y_i}$ para cada $i=1,\dots,n$. Sea $V=U\cap A_{y_1}\cap\cdots\cap A_{y_n}$ y sea $B=c(V)$. $x\in V$, de tal manera que obtendremos lo que queremos demostrar, si $B\subseteq A$.

Sea D la unión de todos los elementos de $\mathcal{D}$ que no están contenidos en A. Se tiene entonces que:

$V\cap D\subseteq U\cap A_{y_1}\cap\cdots\cap A_{y_n}\cap[B_{y_1}\cup\cdots\cup B_{y_n}]=\emptyset$ pues $A_{y_1}\cap B_{y_1}=\emptyset$ para cualquier $i=1,\dots,n$. Esto implica que V está contenido en el conjunto cerrado $X-D$. Por lo tanto $x\in V\subseteq B=c(V)\subseteq X-D\subseteq A$.

<u>5.15 - Teorema</u>: Si X es un espacio paracompacto y Hausdorff, entonces es normal.

<u>Demostración</u>: Sean F_1, F_2 dos subconjuntos cerrados de X ajenos. Del Teorema anterior, X es regular y asi para cada $x\in F_1$ existe V_x una vecindad cerrada de x contenida en el conjunto abierto $X-F_2$.

Sea $U_x=i(V_x)$. La colección $\mathcal{B}=\{U_x : x\in F_1\}\cup\{X-F_1\}$ forma una cubierta abierta de X. Como X es paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$.

Sea A_1 la unión de todos los elementos de $\mathcal{D}$ que no estan contenidos en $X-F_1$. A_1 es un conjunto abierto y contiene a F_1.

Sea $y \in F_2$ arbitrario. Como $\mathcal{D}$ es localmente finita, existe una vecindad V_y de y la cual intersecta solo una cantidad finita de elementos en $\mathcal{D}$. Sean $W_1,\dots,W_n$ todos los elementos de $\mathcal{D}$ que intersectan a V_y y los cuales no estan contenidos en $X-F_1$. Existen pues puntos $x_1,\dots,x_n \in F_1$ tales que $W_i \subseteq U_{x_i}$ para $i=1,\dots,n$. Sea $A_y = i(V_y) \cap (X-V_{x_1}) \cap \dots \cap (X-V_{x_n})$. A_y es entonces un conjunto abierto que contiene a y y es tal que $A_1 \cap A_y = \emptyset$.

Sea $A_2 = \bigcup\{A_y : y \in F_2\}$. A_2 es un conjunto abierto que contiene a F_2 y además $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Por lo tanto X es un espacio normal. O

La Paracompacidad es una propiedad topológica. (Ver ejercicio 5.1).

Con respecto a subespacios y espacios producto de espacios paracompactos, obtenemos resultados semejantes a aquellos para los espacios normales. El teorema anterior nos facilita las cosas. Veamos: En primer lugar, no todo subespacios de un espacio paracompacto es paracompacto. En efecto, el Plano de Moore es homeomorfo a un subespacio Y de un espacio compacto, y por lo tanto paracompacto, X. (Ver Cap. IV, ejemplo 4.13.2 y Teorema 5.7). Como el Plano de Moore es un espacio T_2, si él fuera paracompacto, entonces sería un espacio normal, lo que no es así. (Ver Cap. IV, ejemplo 4.9.2). Por lo tanto Y no es Paracompacto.

Por otro lado, tampoco el producto de espacios paracompactos es necesariamente un espacio paracompacto: La Línea de Sorgenfrey X es un espacio paracompacto. $X\times X$ es T_2, si fuera paracompacto, entonces sería normal, lo que no es posible. (Ver Cap. IV, ejemplo 4.12.1). Por lo tanto $X\times X$ no es paracompacto. Sin embargo, se tiene que

<u>5.16 - Teorema</u>:

1.- Cualquier subespacio cerrado de un paracompacto es paracompacto.

2.- El producto de un espacio paracompacto y de un espacio compacto es un espacio paracompacto.

<u>Demostración</u>:

1.- Sea (X,T) un espacio paracompacto y $F \subseteq X$ cerrado. Sea $\mathcal{B}$ una cubierta abierta de F. Para cada $A \in \mathcal{B}$ existe $A' \in T$ tal que $A = F \cap A'$. La colección $\mathcal{B}' = \{A' : A \in \mathcal{B}\} \cup \{X-F\}$ es una cubierta abierta del espacio X, por lo tanto existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{B}'$. Sea $\mathcal{D} = \{D \cap F : D \in \mathcal{D}'\}$.

$\mathcal{D}$ es entonces un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{B}$:
(a) Cada elemento de $\mathcal{D}$ es un abierto en F. (b) Para cada $x \in F$, existe $D \in \mathcal{D}'$ tal que $x \in D$, por lo tanto $x \in D \cap F$, es decir $\mathcal{D}$ es una cubierta de F. (c) Si $D \cap F \in \mathcal{D}$ entonces existe $A' \in \mathcal{B}'$ tal que $D \subseteq A'$ de tal manera que $D \cap F = A' \cap F \in \mathcal{B}$, es decir $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{B}$.
(d) Si $x \in F$, entonces existe una vecindad V' de x en X tal que V' solo intersecta a un conjunto finito $D_1,\dots D_n$ de los elementos en $\mathcal{D}'$. $V' \cap F$ es una vecindad de x en F que intersecta a lo más a $D_1 \cap F,\dots,D_n \cap F$. Es decir $\mathcal{D}$ es localmente finita.

2.- Sea X un espacio paracompacto y Y un espacio compacto, y sea $\mathcal{B}$ una cubierta abierta de $X\times Y$. Para cada $x \in X$, existe una colección finita de elementos de $\mathcal{B}$, digamos $C_1^x,\dots C_{n_x}^x$, que cubren a $\{x\}\times Y$. Del ejercicio 1.12 de este capítulo, sabemos que existe un subconjunto abierto de X, A_x que contiene a x tal que $A_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_x} C_i^x$

La colección $\{A_x : x \in X\}$ forma una cubierta abierta de X y por lo tanto podemos encontrar un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{D}$. Para cada $D \in \mathcal{D}$, $D \subseteq A_x$ para alguna x. Sea $\mathcal{E} = \{(D\times Y) \cap C_i^x : i=1,\dots,n_x,\ D \in \mathcal{D}\}$. $\mathcal{E}$ es entonces un refinamiento abierto de $\mathcal{B}$. Ademas si $(x,y) \in X\times Y$, existe una vecindad U de x que intersecta solo una colección finita de elementos en $\mathcal{D}$ y así la vecindad $U\times Y$ de (x,y) solo intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{E}$.

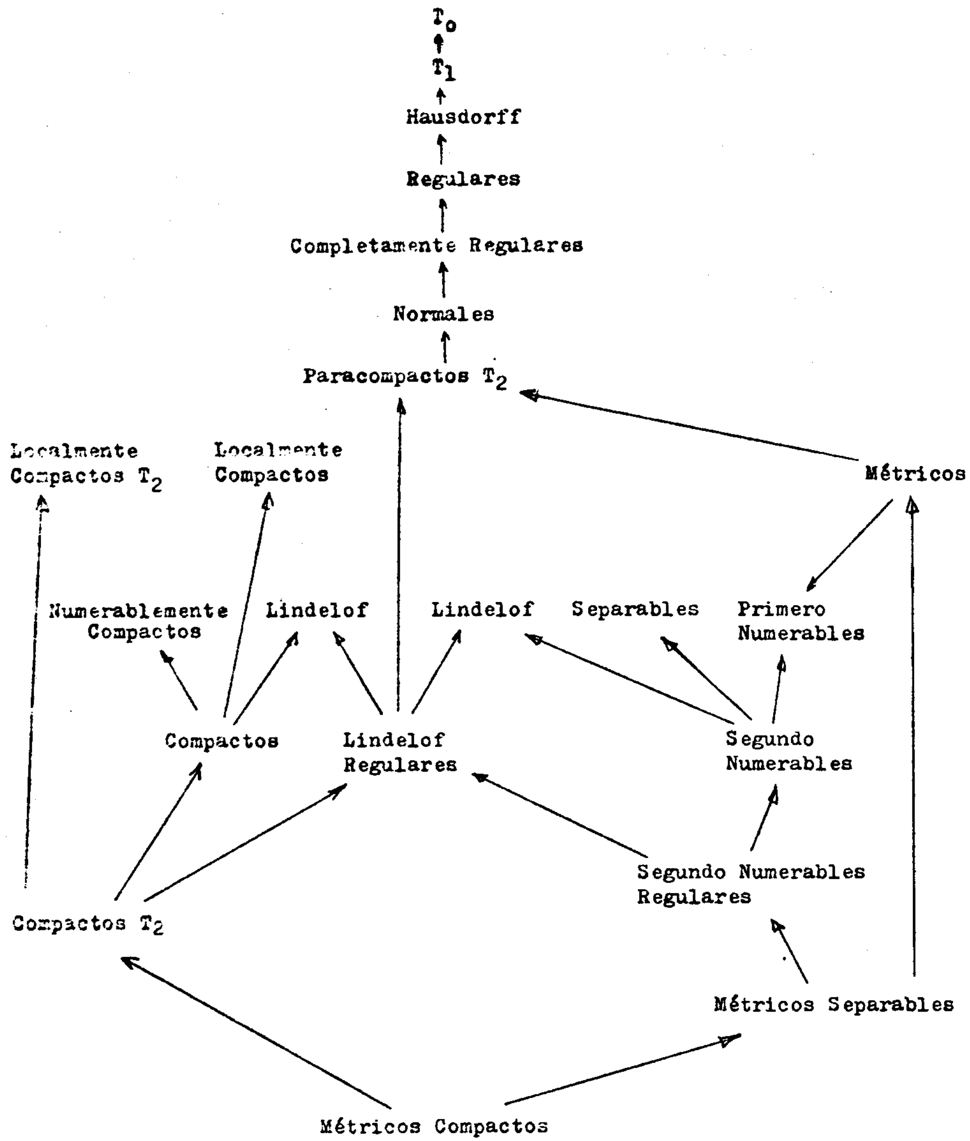


DIAGRAMA DE LAS PRINCIPALES CLASES DE ESPACIOS ANALIZADAS HASTA AQUI

EJERCICIOS - CAPITULO V

Sección 1.

1.1 - Demuestre que cualquier espacio finito y cualquier espacio indiscreto es espacio compacto.

1.2 - Dé una cubierta abierta de $\mathbb{R}^2$ que no tenga subcubiertas finitas. Hacer lo mismo para el intervalo $(0,1)$.

1.3 - Demuestre que, (a) Cualquier conjunto X con la topología cofinita, es un espacio compacto. (b) El espacio $(\mathbb{N},T)$ del ejercicio 1.5 del Cap. I es un espacio compacto.

1.4 - Si (X,T) es compacto y T' es una topología en X tal que $T' \leq T$ entonces (X,T') es compacto.
En particular compare la topología de Fort (Ver ejemplo 1.4.4) en X y la topología cofinita en X, obtendrá entonces como conclusión lo demostrado en el ejercicio anterior inciso (a).

1.5 - Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X.
$E \subseteq Y$ es compacto en Y si y solo si E es compacto en X.

1.6 - Demostrar que:
(a) La unión de una colección finita de subconjuntos compactos en un espacio X es un compacto.
(b) Si X es Hausdorff, y $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de subconjuntos compactos de X, entonces $\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha$ es compacto.

1.7 - Si (X,T_1) es un espacio Hausdorff, (X,T_2) es compacto y $T_1 \leq T_2$, entonces $T_1 = T_2$.

1.8 - Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X, se dice que tiene la propiedad de intersección finita si y solo si la intersección de cualquier subcolección finita de $\mathcal{F}$ no es vacia.

Demostrar que un espacio topológico X es compacto si y solo si cualquier familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita, tiene una intersección no vacía, es decir: $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

1.9 - Cualquier espacio compacto regular es normal.

1.10 - Demostrar el inciso (b) del Teorema 1.8.

1.11 - Sea K un subconjunto compacto en un espacio X completamente regular. Sea A un abierto que contiene a K. Demostrar que existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ 1 & \text{si } x \in X-A \end{cases}$$

1.12 - Sean X y Y dos espacios topológicos y $K_1 \subseteq X$, $K_2 \subseteq Y$ subconjuntos compactos. Sea B un abierto en XxY tal que $K_1 \times K_2 \subseteq B$. Demuestre que existen A_1 subconjunto abierto en X y A_2 subconjunto abierto en Y tales que $K_1 \times K_2 \subseteq A_1 \times A_2 \subseteq B$.

Sección 3.

3.1 - Demuestre que:

(a) El espacio $(\mathbb{N},T)$ del ejercicio 1.4 del Cap. I es un espacio localmente compacto y no compacto.

(b) Demuestre que el espacio del ejercicio 5.3 Cap. I es localmente compacto pero no es compacto.

(c) La Linea de Sorgenfrey (ejercicio 1.6, Cap. I) no es localmente compacto.

(d) El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no es localmente compacto.

3.2 - Demuestre que cualquier subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.

3.3 - Demostrar que la imagen continua de un espacio localmente compacto no es necesariamente un espacio localmente compacto.

3.4 - Sea (X,T) un espacio localmente compacto. Supongamos que X satisface el axioma (b) de la definición 4.1 Cap. IV que caracteriza a los espacios regulares. Entonces cada punto en x posee un sistema básico de vecindades formada de conjuntos compactos.

Sección 4.

4.1 - Sea X un conjunto más que numerable y demos a X la topología conumerable: $T=\{\emptyset, X\} \cup \{E \subseteq X : X-E \text{ es numerable}\}$. Demostrar que (X,T) es Lindelof pero no es numerablemente compacto (y por lo tanto no es compacto).

4.2 - Demostrar el Teorema 3.8 y concluir con:
El cociente de cualquier espacio Lindelof (Numerablemente Compacto) es Lindelof (Numerablemente Compacto).

4.3 - Un espacio T_1 es numerablemente compacto si y solo si cualquier subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.

4.4 - Demuestre el Teorema 4.8.

Sección 5.

5.1 - Demostrar que la Paracompacidad es una propiedad topológica.

5.2 - Si cualquier subconjunto abierto de un espacio Paracompacto es paracompacto, entonces cualquier subconjunto lo es.

5.3 - Sea X paracompacto y $A \subseteq X$ cerrado. Demuestre que el espacio cociente $X/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por $x \sim y \Leftrightarrow x=y$ o $x,y \in A$, es un espacio paracompacto.

CAPITULO VI - CONEXIDAD

Introducción:

Consideremos en la recta real, los conjuntos $A=[0,1]\cup[2,3]$ y $B=[0,1]$. De la simple observación podemos captar una diferencia formal en estos dos conjuntos; A está formado de dos piezas, en cambio B solo de una. Sin embargo, hay que recordar que nuestra intuición geométrica es próxima a la "realidad" cuando consideramos la geometría Euclideana; es decir, la topología usual en la recta. Con esto queremos decir que la verdad de la frase "El conjunto X está formado de dos piezas" o de la frase "El conjunto X está formado de una sola pieza" va a depender de la topología definida en X.

Es bastante natural decir que un espacio topológico está formado por dos piezas si existen dos subconjuntos no vacios A,B, cuya unión es el total y tales que A no contiene puntos de acumulación de B y B no contiene puntos de acumulación de A. En el caso, por ejemplo del conjunto formado por dos puntos $\{0,1\}$: Si lo consideramos con la topologí3 discreta, entonces es claro que este espacio está formado por dos piezas: $\{0\}$, $\{1\}$. En cambio si consideramos la topología $T=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ entonces está formado solo de una pieza.

El concepto de Conexidad que veremos en este capítulo es la formalización de estas ideas. La Conexidad tiene grán importancia en topología y entre otras cosas es una buena herramienta para distinguir unos espacios de otros. También analizaremos en este capítulo algunas modificaciones del concepto de Conexidad.

Sección 1. Conexidad

1.1 - Definición:

Un espacio (X,T) es conexo si no se puede expresar como la unión de dos conjuntos no vacios abiertos y ajenos. De lo contrario decimos que (X,T) es disconexo. Un subconjunto A de X es conexo si el subespacio A es conexo.

1.2 - Ejemplos:

1.- Sea X cualquier conjunto con más de dos puntos y con la topología discreta. Sea x cualquier elemento de X, luego $\{x\}$ y $X-\{x\}$ son subconjuntos no vacios, abiertos y ajenos de X, además $X=\{x\}\cup(X-\{x\})$ luego X es disconexo. (Es evidente que cualquier espacio que contenga un solo punto es conexo. Los espacios indiscretos son tambien ejemplos de espacios conexos).

2.- Los racionales $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ no es un espacio conexo ya que $\{x:x>\sqrt{2}\}\cap\mathbb{Q}$ y $\{x:x<\sqrt{2}\}\cap\mathbb{Q}$ son conjuntos no vacios abiertos y ajenos. Además $\mathbb{Q}=(\{x:x>\sqrt{2}\}\cap\mathbb{Q})\cup(\{x:x<\sqrt{2}\}\cap\mathbb{Q})$.

3.- El espacio $\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}$ es conexo ya que la única descomposición es $\{0\}$, $\{1\}$ pero $\{1\}$ no es abierto

1.3 - Teorema: Los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ que tienen más de un punto son $\mathbb{R}$ y los intervalos (abiertos, cerrados o semicerrados).

Demostración:

i) Supongamos que Y es conexo y que Y no es un intervalo, luego deben de existir $a,b\in Y$, $c\notin Y$ tal que $a<c<b$, así que $Y\cap\{x:x>c\}$, $Y\cap\{x:x<c\}$ es una descomposición de Y en dos conjuntos abiertos ajenos y Y no sería conexo, contradicción, por tanto Y es un intervalo.

ii) Sea Y un intervalo y supongamos que Y no es conexo, entonces $Y=A\cup B$, donde A y B son subconjuntos de Y no vacios abiertos y ajenos, ademas existirán $a\in A$, $b\in B$ (renombrándolos si es necesario) que satisfacen $a<b$. Definamos $\alpha=\sup\{x:[a,x)\subseteq A\}$; luego $\alpha\leq b$ y como Y es un intervalo, $\alpha\in Y$. Claramente $\alpha\in c_Y(A)$; notemos que $A=Y-B$ es cerrado en Y, luego debemos de tener que $\alpha\in A$. Sin embargo, A es también abierto en Y y como Y es un intervalo, entonces debe existir una vecindad de α contenida en A; esto es, $(\alpha-r,\ \alpha+r)\subseteq A$ y esto contradice la definición de α, por tanto, Y es conexo.

<u>1.4 - Observación</u>: Del teorema anterior, se infiere que la propiedad de conexidad no es una propiedad hereditaria. Cualquier subespacio Y de $\mathbb{R}$ que no sea un intervalo y que sea diferente de $\mathbb{R}$, no es conexo. Incluso subespacios cerrados de espacios conexos no son necesariamente conexos, como sería el caso por ejemplo de un subespacio de la recta real formado por dos puntos.

Por otro lado, la conexidad es una propiedad topológica:

<u>1.5 - Teorema</u>: Sea (X,T) un espacio conexo y sea (Y,T') cualquier espacio. Si $g:(X,T)\rightarrow(Y,T')$ es una función continua suprayectiva, entonces (Y,T') es conexo.

<u>Demostración</u>: Supongamos que Y no es conexo, esto es: $Y=U\cup V$, donde U y V son subconjuntos de Y no vacios abiertos y ajenos. Entonces como g es continua y suprayectiva, $g^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son subconjuntos de X no vacios abiertos y ajenos cuya unión es X; por tanto X es disconexo lo que es una contradicción. De aqui que Y es conexo.

<u>1.6 - Ejemplo</u>:

1.- La función $F:(0,1]\rightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $F(x)=(x,\operatorname{sen}(1/x))$, es una función continua, de tal manera que el espacio $Y=\{(x,\operatorname{sen}(1/x)):0<x\leq 1\}$ es conexo. (Y como subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual) (Ver figura 26).

2.- Sea X un espacio conexo. Si $f:X\rightarrow\mathbb{R}$ es continua no constante, entonces $f(X)$ es conexo del Teorema 1.5; es decir, $f(X)=\mathbb{R}$ o $f(X)$ es un intervalo. Asi si $f(x)<f(y)$ para dos puntos en X, x,y, entonces $[f(x),f(y)]\subseteq f(X)$. Es decir f toma todos los valores entre cualquiera dos valores que la función asuma. Como se puede observar, este resultado es una generalización del teorema clásico del valor intermedio que se estudia en los cursos de Cálculo.

<u>1.7 - Teorema</u>: Sea (X,T) cualquier espacio topológico, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1) X es conexo.

2) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y X.

3) Si A es cualquier subconjunto de X diferente de X o $\emptyset$, entonces $\mathrm{Fr}A\neq\emptyset$.

4) Sea $Y=\{0,1\}$ con la topología discreta. Entonces no existen funciones continuas suprayectivas de X a Y.

<u>Demostración</u>:

(1) $\Rightarrow$ (2): Si $A\subseteq X$ el cual es abierto y cerrado a la vez y $A\neq\emptyset$ y X, entonces $X=A\cup(X-A)$ lo que demuestra que X no es conexo contradiciendo a (1). Por tanto los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y X.

(2) $\Rightarrow$ (3): Si A es cualquier subconjunto de X diferente de X ó $\emptyset$ y sea $\mathrm{Fr}A=\emptyset$, luego como $c(A)=i(A)\cup\mathrm{Fr}A$ tenemos $c(A)=i(A)$. Por otro lado $i(A)\subseteq A$ y $A\subseteq c(A)$ entonces $i(A)\subseteq A\subseteq c(A)$, luego $A=i(A)=cA$; así A es un subconjunto de X abierto y cerrado a la vez lo que contradice a (2), por tanto, afirmamos que si A es cualquier subconjunto de X diferente de X ó $\emptyset$, entonces $\mathrm{Fr}A\neq\emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que $X=U\cup V$, donde U y V son subconjuntos no vacios de X abiertos y ajenos, entonces U y V son cerrados. Por tanto $U=I(U)=c(U)$ pero $FrU=c(U)-I(U)$ luego, $FrU=U-U=\emptyset$, lo que contradice a (3) por tanto X es conexo.

(1) $\Rightarrow$ (4): Supongamos que existe una función continua de X sobre $Y=\{0,1\}$. Entonces como X es conexo Y debe también serlo, contradicción ya que $Y=\{0,1\}$ no es conexo. (Ejemplo 1.2.1) Por tanto, no existe función continua suprayectiva alguna de X a Y.

(4) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que X no es conexo; o sea que $X=U\cup V$, donde U y V son subconjuntos no vacios de X abiertos y disjuntos. Definamos $f:X\to Y$ por $f(x)=0$ si $x\in U$ y $f(x)=1$ si $x\in V$ entonces $f^{-1}([0,a))=U$ y $f^{-1}((b,1])=V$; luego f es continua, lo que contradice a (4). Por tanto X es conexo.

<u>1.8-Teorema:</u> Sea (X,T) cualquier espacio y sea $X=U\cup V$, donde U y V son subconjuntos no vacios de X abiertos y ajenos. Sea A cualquier subespacio conexo de X, entonces $A\subseteq U$ o $A\subseteq V$.

<u>Demostración:</u> Supongamos que $A\cap U\neq\emptyset$ y $A\cap V\neq\emptyset$, luego $A\cap U$ y $A\cap V$ son subconjuntos no vacios y ajenos de A los cuales son abiertos en A. Pero $A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$, luego A no es conexo. Por tanto o $A\cap U=\emptyset$ y de donde $A\subseteq V$ o $A\cap V=\emptyset$ y de donde $A\subseteq U$.

<u>1.9-Ejemplos:</u> Sea $\mathbb{R}$ los números reales con la topología usual. Removamos cualquier punto $y\in\mathbb{R}$ de tal manera que haga a $\mathbb{R}$ disconexo. Esto da origen a dos conjuntos los cuales son los siguientes rayos: $A=\{x\in\mathbb{R} : y<x\}$ y $B=\{x\in\mathbb{R} : x<y\}$. La remoción de y también hace disconexo a cualquier intervalo que contenga a y en su interior. Así, supongamos que $[a,b]$ contiene a y en su interior y $[a,b]-\{y\}$ esconexo, entonces $[a,b]-\{y\}$ debe de estar enteramente contenido en A o en B, lo cual es imposible.

<u>1.10- Teorema:</u> Sea (X,T) cualquier espacio y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ cualquier familia de subespacios conexos de X tal que $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$, entonces $\bigcup_{i\in I}A_i$ es conexo.

<u>Demostración:</u> Hagamos $B=\bigcup_{i\in I}A_i$, como $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$, sea $x_0\in\bigcap_{i\in I}A_i$. Ahora sea $f: B\to\{0,1\}$ continua y $\{0,1\}$ con la topología discreta. Como cada A_i es conexo, por Teorema 1.7 ninguna f/A_i es suprayectiva y del hecho que $x_0\in A_i$ para cada i, tenemos $f(x)=f(x_0)$ para toda $x\in A_i$ y para toda i. Así f no puede ser supreyectiva y por el Teorema 1.7, $B=\bigcup_{i\in I}A_i$ es conexo.

<u>1.11-Ejemplos:</u>

1.- El espacio $\mathbb{R}$ de los números reales con la topología usual es conexo como vimos en el Teorema 1.3. Cualquier linea recta en el espacio $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a la recta real $\mathbb{R}$. Esto implica que $\mathbb{R}^n$ es conexo para cualquier n ya que $\mathbb{R}^n$ es la unión de todas las rectas en $\mathbb{R}^n$ que pasan a travez del origen. Por tanto la familia de tales rectas satisfacen las hipótesis del Teorema 1.10.

2.- Cualquier bola abierta $B_r(x)$ en $\mathbb{R}^n$ es un espacio Homeomorfo a todo el espacio $\mathbb{R}^n$, por lo tanto es conexo.

<u>1.12-Teorema:</u> Supongamos que (X,T) es un espacio tal que cualquier dos elementos de X están contenidos en algun subespacio conexo de X. Entonces X es conexo.

<u>Demostración:</u> Sea $x\in X$ un punto fijo de X y para cualquier $y\in X$ sea $A(x,y)$ un subespacio conexo de X el cual contiene a x y a y. Luego $\{A(x,y): y\in X\}$ es una colección de subconjuntos conexos de X cuya unión es X y la intersección es no vacia ya que por lo menos contiene a x. Por el Teorema 1.10 tenemos que X es conexo.

<u>1.13- Ejemplos:</u>

1.- Cualquier segmento de linea cerrada en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$ y por tanto, es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^n$. Luego, haciendo uso de este hecho podemos demostrar que $\mathbb{R}^n-\{p\}$ donde p es cualquier punto de $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$, es conexo: Sean R y R' cualquier dos puntos de $\mathbb{R}^n-\{p\}$. Escojamos $R'' \in \mathbb{R}^n-\{p\}$ tal que $p \notin \overline{RR''} \cup \overline{R''R'}$, donde $\overline{RR'}$ denota el segmento de linea que une R a R'. (Fig. 27) Entonces $\overline{RR''} \cup \overline{R''R'}$ es conexo por teorema 1.10, esto es, ya que es unión de dos subespacios conexos $\overline{RR''}$, $\overline{R''R'}$ y $\overline{RR''} \cap \overline{R''R'} = \{R''\} \neq \emptyset$. Por tanto R y R' están en el mismo subespacio conexo de $\mathbb{R}^n-\{p\}$. Por teorema 1.12 $\mathbb{R}^n-\{p\}$ es conexo.

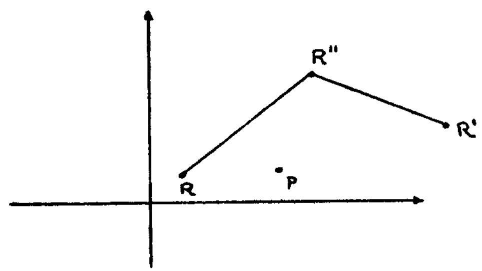


Figura 27

2.- $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para ningun $n > 1$. Si $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo para alguna $n > 1$, entonces $f:\mathbb{R}-\{p_o\} \to \mathbb{R}^n-\{f(p_o)\}$ es aun un homeomorfismo. Sin embargo esto es imposible ya que $\mathbb{R}-\{p_o\}$ no es conexo y $\mathbb{R}^n-\{f(p_o)\}$ si lo es.

1.14 - Teorema: Supongamos que A es un subespacio conexo de X y $A \subseteq Y \subseteq c(A)$. Entonces Y es también un subespacio conexo de X. En particular, la cerradura de un conjunto conexo es conexo.

Demostración: Sea $f:Y \to \{0,1\}$ continua, donde $\{0,1\}$ tiene la topología discreta; como A es conexo, f/A no es supreyectiva. Observemos que $Y = c_X(A) \cap Y = c_Y(A)$, ahora la continuidad de f en Y demuestra que $f(Y) = f(c_Y(A)) \subseteq c(f(A)) = f(A)$ por lo cual f no puede ser supreyectiva. Por tanto Y es conexa por teorema 3.

1.15 - Ejemplo: Como se hizo notar en el ejemplo 1.6, el conjunto $Y=\{(x,\text{sen}(1/x)): 0 < x \leq 1\}$ es un espacio conexo. Como se muestra en la figura 26, el espacio Y se acerca al eje vertical en la medida en que x se aproxima a cero. Es decir, cualquier punto de la forma $(0,y)$ con $-1 \leq y \leq 1$ es un punto de acumulación de Y. Así resulta del teorema anterior que $c(Y) = Y \cup \{(0,y): -1 \leq y \leq 1\}$ es conexo y cualquier subespacio A tal que $Y \subseteq A \subseteq c(Y)$ lo es también. Por ejemplo $A = Y \cup \{(0,0)\}$.

1.16 - Teorema: El espacio producto ΠX_α de la familia de espacio no vacios $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, es un espacio conexo si y solo si cada X_α es conexo.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que ΠX_α es conexo. Como cada proyección $p_\beta: \Pi X_\alpha \to X_\beta$ es continua y supreyectiva, entonces X_β es conexo por el teorema 1.5 y ésto para cualquier $\beta \in I$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in \Pi X_\alpha$ y $C = \{y \in \Pi X_\alpha$: existe un conexo que contiene a x y y$\}$. Por el Teorema 1.11, C es conexo. Para demostrar lo deseado basta con probar que C es denso en ΠX_α (Teorema 1.14).

Sea $A = p_{\alpha_1}^{-1}(A_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(A_{\alpha_n})$ un abierto básico en $\Pi X_\alpha (A_{\alpha_i} \in T_{\alpha_i})$.

Sea $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, $i=1,\ldots,n$ y definamos $C_1 = \{y \in \Pi X_\alpha : y_{\alpha_1} \in X_{\alpha_1}$, $y_\alpha = x_\alpha$ para toda $\alpha \neq \alpha_1\}$ y en general para $i=2,\ldots,n$ $C_i = \{y \in \Pi X_\alpha : y_{\alpha_j} = a_{\alpha_j}$ si $j \in \{1,\ldots,i-1\}$, $y_\alpha = x_\alpha$ para toda $\alpha \in I - \{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}\}$, $y_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i}\}$. Del ejercicio 3.4 Cap. III C_i es homeomorfo a X_{α_i} y por lo tanto es conexo ($i=1,\dots,n$). Para cualquier $k\in\{1,\dots,n-1\}$ el punto $y\in\Pi X_\alpha$ tal que $y_{\alpha_j}=a_{\alpha_j}$ con $j=1,\dots,k$ y $y_\alpha=x_\alpha$ para cualquier otra coordenada pertenece a $C_k\cap C_{k+1}$, por lo tanto $D=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es conexo y contiene a x (En efecto $x\in C_1$). Asi $D\subseteq C$ y como A intersecta a D entonces también intersecta a C. Es decir, C es denso en ΠX_α y por lo tanto ΠX_α es conexo. (Como siempre si $y\in\Pi X_\alpha$, y_α denota la α-ésima coordenada de y).

1.17 - Sea X un espacio topológico y $x\in X$. Podemos considerar todos los subespacios de X que son conexos y que contienen a x. La unión de todos ellos es un espacio conexo, (Teorema 1.10) que denotaremos por $C(x)$ y es el mayor de los subespacios conexos de X que contiene a x. a $C(x)$ le llamaremos la Componente Conexa de x. Como $\{x\}$ es siempre conexo, entonces $C(x)$ nunca es vacio. Además $C(x)$ es siempre un subconjunto cerrado de X ya que de no ser asi $c(C(x))$ sería un conjunto conexo conteniendo a x y mayor a $C(x)$ (Teorema 1.14), lo que no es posible. Es importante también hacer notar que si $x,y\in X$ y $x\neq y$, entonces $C(x)=C(y)$ ó $C(x)\cap C(y)=\emptyset$; es decir, el conjunto de componentes conexas en X determina una Partición (o relación de equivalencia) en X. En efecto si $z\in C(x)\cap C(y)$ entonces $C(x)\cup C(y)$ es conexo. Como $C(x)$ y $C(y)$ no pueden ser subconjuntos propios de $C(x)\cup C(y)$, tenemos entonces $C(x)=C(x)\cup C(y)=C(y)$.

1.18 - Ejemplos:

1.- Si X es un espacio conexo, entonces es claro que $C(x)=X$ para cualquier $x\in X$.

2.- Cualquier subespacio de un espacio discreto, es un espacio discreto. Del ejemplo 1.2.1, sabemos que los espacios discretos con más de un punto, no son espacios conexos. De estas observaciones se desprende que si X es discreto, entonces $C(x)=\{x\}$ para toda $x\in X$.

3.- Hablábamos en 1.17 de que las componentes conexas de un espacio X forman una partición de X. Esto nos hace pensar inmediatamente en espacios cocientes. En efecto, la colección de componentes conexas de X definen un espacio cociente $X/\sim$ donde cada componente conexa de X es un elemento en $X/\sim$. Se puede demostrar que si $\bar{x}\in X/\sim$ entonces $C(\bar{x})=\{\bar{x}\}$.

Sección 2. Espacios Localmente Conexos

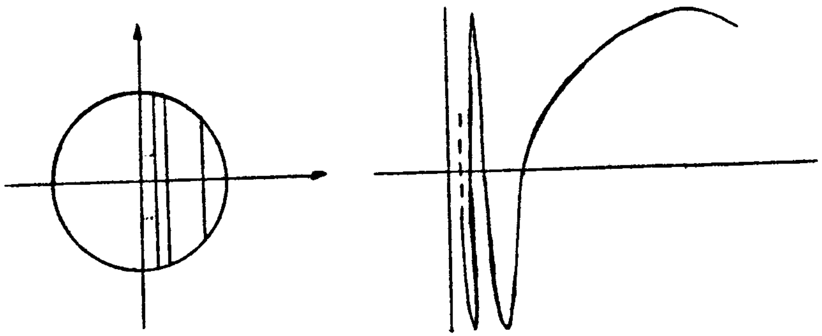
2.1 - Definición: Un espacio (X,T) se dice que es localmente conexo si para cada $x\in X$, existe una base de vecindades de x $\mathcal{V}(x)$ consistente de subespacios conexos. Equivalentemente, X es localmente conexo si para cualquier $x\in X$ y cualquier vecindad U de x, existe una vecindad conexa V de x tal que $V\subseteq U$.

2.2 - Ejemplos:

1.- Un espacio puede ser conexo y localmente conexo: El espacio $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo ya que para cada punto $x\in\mathbb{R}^n$, la colección de bolas abiertas centradas en x es una base de vecindades de x formada por subespacios conexos. (Ejemplo 1.11.2)

2.- Un espacio puede ser localmente conexo pero no conexo. Asi, sea X cualquier espacio con la topología discreta, entonces para cada $x\in X$, $\mathcal{V}(x)=\{\{x\}\}$ es una base de vecindades para la topología discreta. Ahora bien, cada subespacio $\{x\}$ es conexo. Luego, X es localmente conexo, pero X no es conexo.

3.- Un espacio puede ser conexo, pero no localmente conexo: Sea $Y=\{(x,y):y=\mathrm{sen}(1/x),x>0\}\cup\{(0,0)\}\subseteq\mathbb{R}^2$. Y es conexo como vimos en el ejemplo 1.15, pero no es localmente conexo en $p=(0,0)$. Por ejemplo, la bola con centro en p y radio 1/4 no contiene ninguna vecindad conexa de p. (Figura 28). Por tanto, Y no es localmente conexo.



Aquí se hace notar cómo cualquier bola centrada en el punto (0,0) intersecta a Y en un espacio no conexo. Su intersección es una colección de segmentos de línea unos separados de otros.

Figura 28

2.3 - Teorema: El espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes conexas de cada conjunto abierto son conjuntos abiertos.

Demostración:

i) Sea X un espacio localmente conexo y sea $A \subseteq X$ abierto. Sea C una componente de A y $x \in C$, luego como $x \in A$ y es abierto, entonces existe una vecindad conexa U_x de x tal que $x \in U_x \subseteq A$, pero C es el conjunto conexo maximal de A el cual contiene a x, luego $x \in U_x \subseteq C$, por tanto C es abierto: $C = \bigcup_{x \in C} U_x$.

ii) Supongamos que U es cualquier vecindad de $x \in X$. Sea C la componente de U que contiene a x. Como C es abierto por hipótesis, luego C es una vecindad conexa de x la cual es un subconjunto de U. Por tanto X es localmente conexo.

2.4 - Corolario: Cualquier subespacio abierto de un espacio localmente conexo es localmente conexo.

Demostración: Se deja como ejercicio.

2.5 - Teorema: Si f es una función abierta y continua del espacio localmente conexo (X,T) sobre un espacio (Y,T'), entonces Y es localmente conexo.

Demostración: Sea $y \in Y$ y U cualquier vecindad de y. Ahora como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x)=y$. Entonces $f^{-1}(U)$ es una vecindad de x. Como X es localmente conexa, existe una vecindad conexa V de x tal que $V \subseteq f^{-1}(U)$. Como f es abierta, f(V) es una vecindad conexa de y tal que $f(V) \subseteq U$. Por tanto Y es localmente conexo.

2.6 - Teorema: Sea $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. El espacio producto ΠX_α es localmente conexo si y solo si cada X_α es localmente conexo y todos los X_α son conexos excepto quizás un número finito de ellos.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que ΠX_α es localmente conexo. Como cada proyección $p_\beta : \Pi X_\alpha \to X_\beta$ es una función continua y abierta, luego cada X_λ es localmente conexo por el Teorema 2.5. Sea A cualquier vecindad conexa de algún punto $x \in \Pi X_\alpha$. A contiene una vecindad básica de x de la forma $B = p_{\alpha_1}^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(A_n)$, donde A_i es abierto en X_{α_i}. Si $\alpha \neq \alpha_i$ para toda $i=1,\ldots,n$, entonces $p_\alpha(B)=X_\alpha$ y por lo tanto X_α es conexo para toda $\alpha \notin \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$.

$\Leftarrow$) Sea $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subseteq I$ tal que X_α es conexo si y solo si $\alpha \notin \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. Sea $x \in \Pi X_\alpha$ y A una vecindad de x. Entonces existe una vecindad básica de x, $B = p_{\beta_1}^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap p_{\beta_n}^{-1}(A_n)$ la cual está contenida en A, donde A_i es un abierto en X_{β_i}. Para cada β_i, $i=1,\ldots,m$, existe una vecindad conexa de x_{β_i} (la β_i-ésima coordenada de x), B_i contenida en A_i. Para cada x_{α_i} $(i=1,\dots,n)$ escojamos también vecindades conexas B_i^* que las contengan. $C=p_{\alpha_1}^{-1}(B_1^*)\cap\dots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(B_n^*)\cap p_{\beta_1}^{-1}(B_1)\cap\dots\cap p_{\beta_m}^{-1}(B_m)$ es una vecindad de x contenida en A y es un conjunto conexo pues es producto de espacios conexos. Por tanto ΠX_α es localmente conexo.

Sección 3 - Espacios Conexos por Trayectorias

En muchas ramas de la matemática como en la Geometría Diferencial, se trabaja con una clase de espacios conexos de un tipo muy "regular". Analizaremos algunos aspectos de estos espacios en esta sección.

Hemos visto que $[0,1]$ es un espacio conexo, luego cualquier imagen homeomorfa de $[0,1]$ lo es. Por ejemplo un segmento cerrado de recta en $\mathbb{R}^n$. De manera más general, cualquier imagen continua de $[0,1]$ es un espacio conexo. Estas imágenes continuas del $[0,1]$ nos servirán para caracterizar la clase de espacios que vamos a introducir.

3.1 - Definición: Sea (X,T) un espacio topológico. Un subespacio Y de X se dice que es una trayectoria en X si existe una función continua y suprayectiva $f:[0,1]\to Y$. X se dice que es un espacio conexo por trayectorias si para cada par de puntos $x,y\in X$, existe una trayectoria en X que los contiene.

3.2 - Ejemplos:

1.- Como cualquier función definida en $[0,1]$ y con valores en un espacio indiscreto es continua, entonces cualquier espacio indiscreto es conexo por trayectorias. En cambio las únicas funciones continuas de $[0,1]$ a cualquier espacio discreto son las

funciones constantes, por lo tanto ningún espacio discreto con más de un punto es un espacio conexo por trayectorias.

2.- Cualquier segmento cerrado de recta en el espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$, es una imagen continua de $[0,1]$, por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es conexo por trayectorias $(n\geq 1)$. Las esferas $S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\}$ $(n\geq 1)$, son también espacios conexos por trayectorias.

3.- Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si para cualquier par $x,y\in E$, $E_{x,y}=\{tx+(1-t)y:t\in[0,1]\}\subseteq E$. Como cada $E_{x,y}$ es una imagen continua de $[0,1]$, luego cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es un espacio conexo por trayectorias. Por ejemplo cualquier bola de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

3.3 - Teorema:

1.- Cualquier espacio conexo por trayectorias es un espacio conexo.

2.- No todo espacio conexo es conexo por trayectorias.

Demostración:

1.- Sea X un espacio conexo por trayectorias y $x\in X$. Para cada $x'\in X$ sea $Y_{x'}$ la trayectoria que contiene a x y x'. Luego $X=\bigcup\{Y_{x'}:x'\in X\}$ y $\bigcap\{Y_{x'}:x'\ X\}\neq\emptyset$, del Teorema 1.10, X es conexo.

2.- Sabemos que el espacio:
$Y=\{(x,y):y=\text{sen}(1/x),x>0\}\cup\{(0,0)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ es conexo (Ver ejemplo 1.15), pero no es conexo por trayectorias ya que si (x,y) es cualquier punto en Y diferente de $(0,0)$, entonces no existe ninguna trayectoria en Y que contenga a $(0,0)$ y a (x,y), ya que si $f:[0,1]\to Y$ es continua y $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $p_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la proyección al eje x y la proyección al eje y respectivamente, entonces de 3.2(c) Cap. III, $p_1\circ f$ y $p_2\circ f$ son continuas. Como $p_1\circ f$ es continua debe tomar todos los valores $1/n\pi$,

$n=1,2,\ldots,$. Sea $\delta>0$ cualquiera y sea $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande para que se cumpla $1/n\pi<\delta$. $p_2\circ f(1/n\pi)$ es igual a 1 ó -1, esto implica que para toda vecindad V de 0, $(p_2\circ f)(V)$ no está contenida en $(-(1/2),1/2)$, es decir $p_2\circ f$ no es continua (definición 1.1 Cap. II), lo que es una contradicción. Por lo tanto no es posible encontrar una función continua como se deseaba; es decir, Y no es conexo por trayectorias. o

Daremos por último una caracterización sencilla e importante de los espacios conexos por trayectorias.

3.4 - Teorema: Sea (X,T) un espacios topológico y x_o algún elemento de X. X es conexo por trayectorias si y solo si para cada $x\in X$ existe una trayectoria Y_x que contiene a x y a x_o.

Demostración:

$\Rightarrow$) Resulta inmediato de la definición 3.1.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $x\in X$, existe $f_x:[0,1]\to X$ continua, tal que $x,x_o\in f_x[0,1]$.

Sea x_1, $x_2\in X$ cualesquiera. Consideremos las trayectorias $f_{x_1}([0,1])$, $f_{x_2}([0,1])$. Sea $f:[0,1]\to X$ definida por

$$f(t)=\begin{cases} f_{x_1}(2t) & 0\leq t\leq 1/2 \\ f_{x_2}(2t-1) & 1/2\leq t\leq 1 \end{cases}$$

f es continua y $x_1,x_2\in f([0,1])$. Esto muestra que X es conexo por trayectoria.

EJERCICIOS - CAPITULO VI

Sección 1.

1.1 - Sean (X,T_1) un espacio conexo y T_2 una topología en X que satisface $T_2\subseteq T_1$. Demuestre que (X,T_2) es conexo.

1.2 - Un espacio topológico X es disconexo si y solo si existe $A\subseteq X$ no vacio y diferente de X, tal que A es abierto y es cerrado.

1.3 - Un espacio X es disconexo si y solo si existen $A,B\subseteq X$ tales que:

(a) $A\cup B=X$

(b) $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$

(c) $[A\cap c(B)]\cup[c(A)\cap B]=\emptyset$

1.4 - De los siguientes espacios, decida cual es conexo y cual no lo es:

(a) El espacio (X,T) del ejemplo 1.2.1 Cap. I.

(b) El espacio (X,T) del ejercicio 1.3 Cap. I.

(c) El espacio (X,T) del ejercicio 1.4 Cap. I.

(d) El espacio del ejercicio 5.3 Cap. I.

(e) El espacio de Fort.

1.5 - Demuestre que:

(a) Cualquier espacio infinito con la topología cofinita es un espacio conexo.

(b) Cualquier espacio más que numerable con la topología conumerable, es conexo.

1.6 - Demuestre que la Linea de Sorgenfrey es un espacio disconexo.

1.7 - Sea (X,T) un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de subespacios conexos de X, tales que para cualquier pareja $\alpha,\beta\in I$, $Y_\alpha\cap Y_\beta\neq\emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha$ es un espacio conexo.

1.8 - A los espacios topológicos X que satisfacen $C(x)=\{x\}$ para todo $x\in X$, donde $C(x)$ es la componente conexa que contiene a x, se le llama espacio totalmente disconexo.
Demuestre que cualquier espacio discreto, el espacio de los racionales con la topología usual y el espacio cociente dado en el ejemplo 1.18.3, son espacios totalmente disconexos.

1.9 - Sea Y un subespacio conexo de un espacio X, y supongamos que E es un subconjunto de X que satisface: $E\cap Y\neq\emptyset$ y $(X-E)\cap Y\neq\emptyset$. Demostrar que $Fr(E)\cap Y\neq\emptyset$.

1.10 - Demostrar que toda esfera S^n con $n\geq 1$ es un espacio conexo. (Sugerencia: Ver ejercicio 4.5 Cap. III y Teorema 1.5 de este capítulo).

1.11 - Demuestre que el intervalo $[0,1]$ no es homeomorfo a S^1.

Sección 2.

2.1 - Demostrar el Corolario 2.4.

2.2 - Demuestre que la imagen continua de un espacio localmente conexo no es necesariamente localmente conexo.

2.3 - Demuestre que la Línea de Sorgenfrey y el espacio de Fort son ejemplos de espacios que no son localmente conexos.

2.4 - Demuestre que cualquier espacio con la topología cofinita es un espacio localmente conexo.

Sección 3.

3.1 - Demuestre que el espacio de Sierpinski (X,T) $(X=\{0,1\},\ T=\{\emptyset,\{0\},X\})$, es un espacio conexo por trayectorias.

3.2 - Si (X,T_1) es conexo por trayectorias y T_2 es una topología en X tal que $T_2\leq T_1$, entonces (X,T_2) es conexo por trayectorias.

3.3 - Demuestre que el espacio del ejercicio 5.3 del Capítulo I y la recta real con la topología cofinita, son espacios conexos por trayectorias.

3.4 - La imagen continua de un espacio conexo por trayectorias es un espacio conexo por trayectorias.

3.5 - Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios conexos por trayectorias tales que $\bigcap_{\alpha\in I} X_\alpha\neq\emptyset$. Demostrar que $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ es conexo por trayectorias.

3.6 - Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios. El espacio producto ΠX_α es conexo por trayectorias si y solo si cada factor X_α lo es.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki: "Eléments de Mathématique: Livre III, Topologie Général", Hermann, Paris.

[2] D. Bushow: "Fundamentos de Topología General". Limusa-Wiley (1970).

[3] G. Choquet: "Cours d'Analyse, Tome II, Topologie". Masson et Cie. (1973).

[4] J. Dugundji: "Topology". Allyn and Bacon Inc.

[5] R. Engelking: "General Topology". Polska Akademia Nank, Instytus Matematyczny. Warszawa (1975).

[6] A. García-Maynez: "Introducción a la Topología de Conjuntos". Serie Sociedad Matemática Mexicana. Trillas (1971).

[7] M. C. Gemignani: "Elementary Topology". Addison-Wesley Publishing Company (1967).

[8] E. Hewitt: "On Two Problems of Urysohn." Ann. of Math. 47(1946)503-509.

[9] D. Hinrichsen - J.L. Fernández: "Topología General". Pueblo y Educación (1977).

[10] S. T. Hu: "Introduction to General Topology". Holdenday Inc. (1966).

[11] T. Jech: "Set Theory". Academic Press (1978).

[12] A. N. Kolmogorov - S.V. Fomín: "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional". Editorial Mir-Moscu (1972).

[13] K. Kuratowski: "Introduction to Set Theory and Topology". Edición Revolucionaria - La Habana (1967).

[14] W. J. Pervin: "General Topology" Academic Press (1965).

[15] S. M. Pineda: "Topología: Una introducción". Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias (1980).

[16] G. F. Simmons: "Introduction to Topology and Modern Analysis". McGraw Hill-Kogakusha (1963).

[17] L. A. Steen - J. A. Seeback: "Counterexamples in Topology". Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1970).

[18] S. Willard:- "General Topology". Addison-Wesley Publishing Company (1970).

SIMBOLOS Y ABREVIACIONES

$\Rightarrow$	implica
$\Leftarrow$	es implicado por
$\Leftrightarrow$	si y solo si
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\in$	es un miembro de
$\notin$	no es un miembro de
$\subseteq$	está contenido en
$\supseteq$	contiene a
$\circ$	fin de demostración
$=$	es igual a
$\neq$	es diferente de
$\mathbb{R}$	conjunto de números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de números reales mayores o iguales a 0
$\mathbb{R}^-$	conjunto de números reales menores o iguales a 0
$\mathbb{Q}$	conjunto de números racionales
$\mathbb{Z}$	conjunto de números enteros
$\mathbb{N}$	conjunto de números naturales
$\mathbb{R}^n$	Espacio Euclidiano n-dimensional
$\lvert\ \rvert$	valor absoluto
$\lVert\ \rVert$	norma de
min	mínimo de
max	máximo de
sup	supremo de
inf	ínfimo de

		Página
$\sim$	relación de equivalencia	
$\cup$	unión de conjuntos	
$\cap$	intersección de conjuntos	
$-$	diferencia de conjuntos	
Π	producto de conjuntos	
$\emptyset$	conjunto vacío	2
$\mathcal{P}(X)$	potencia de X	2
$B_r(x)$	bola abierta	30
T_d	Topología inducida por la métrica d	32
$T_{\mathbb{R}^n}$	Topología usual en $\mathbb{R}^n$	33
$C[0,1]$	Espacio de funciones reales contínuas definidas sobre $[0,1]$	35
$L^\infty([0,1])$		36
$L^2([0,1])$		37
$d(A)$	Conjunto derivado de A	49
$c(A)$	cerradura de A	52
$i(A)$	interior de A	54
$e(A)$	exterior de A	55
$Fr(A)$	frontera de A	56
Id	función identidad	8
χ_E	función característica	83
p_α	función proyección	97
$\mathfrak{F}^T$		88
$T_{\mathfrak{F}}$		91
$(\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}})$		101
$X/\sim$	espacio cociente	108

INDICE ALFABETICO

Página

Página