Producto de Espacios Normales

Enrique Castañeda Alvarado

Director de Tesis

Dr. Angel Tamariz Mascarúa

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCION

Como es sabido, la teoría de los espacios producto constituye una parte muy interesante y compleja dentro de la Topología de Conjuntos.

Si recordamos, en nuestro primer curso de Topología, se nos muestra, que los primeros axiomas de separación se preservan en el producto de espacios topológicos, pero desafortunadamente, esto no sucede con el axioma de normalidad.

El propósito de este tabajo tiene la finalidad de mostrar bajo qué condiciones (necesarias y suficientes) se preserva la normalidad en el producto de dos espacios topológicos en el caso particular cuando uno de los factores es compacto. Para lo cual tomamos como base principal las dos primeras secciones del artículo de Teodor C. Przymusiński [14].

El trabajo aquí presentado, está distribuido básicamente en tres capítulos. En el primero, se exponen algunos conceptos y resultados que a nuestro juicio son necesarios para poder abordar nuestro problema principal. Además aparece el resultado (Teorema 1.7.3) que motiva la realización de este trabajo. El material presentado en este capítulo es básico y gran parte se encuentra en los textos fundamentales de Topología.

En el segundo capítulo mostramos algunos ejemplos, algunos ya clásicos y otros recientes del porqué el estudio de esta propiedad. Fundamentalmente este capítulo está dedicado a probar que el axioma de normalidad no se preserva en el producto de espacios topológicos con propiedades adicionales.

En el tercer capítulo se caracteriza por completo el producto de dos espacios normales cuando alguno de los factores es compacto (véase la sección 3.1). Como consecuencia de esta caracterización, muchos resultados (algunos conocidos en la literatura) que involucran el producto de un factor compacto pueden ser deducidos fácilmente. En la pequeña sección 3.3 se obtienen consecuencias interesantes utilizando espacios concretos y familiares.

Este trabajo también cuenta con un apéndice, en el que se dan las demostraciones de cuatro resultados, los cuales no sólo son importantes en la teoría de producto de espacios normales sino que constituyen parte de los pilares básicos de la Topología General.

Hemos incluido algunos nombres y fechas, para dar crédito a los autores de los resultados más importantes. Finalmente quiero decir, que la aportación de este trabajo es dar, una respuesta alternativa (mucho más sencilla) a la dada por Vaughan al ejemplo 6 y una demostración correcta del corolario 3.7 del artículo de T. C. Przymusiński, que en este trabajo es el corolario 3.2.5.

Enrique Castañeda Alvarado
Cd. Universitaria México D.F. 1996.

CAPITULO 1

DEFINICIONES Y PRELIMINARES

1.1 INTRODUCCION

En este capítulo expondremos "la estructura", los conceptos y resultados, para el desarrollo de este trabajo. Remitimos al lector a los libros [7] y [23] para las demostraciones que aquí sean omitidas.

Durante el desarrollo de este trabajo X denotará un espacio topológico X con una topología τ. Recordemos que un espacio topológico X es un espacio T_2 o de Hausdorff, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen vecindades ajenas U y V de x y y respectivamente. Así también decimos que un espacio X es T_3 o regular si dados un subconjunto cerrado F de X y un punto x que no esté en F, existen abiertos ajenos U y V conteniendo a x y a F respectivamente. También recordemos que una propiedad P de un espacio X es hereditaria si cualquier subespacio de X tiene la propiedad P. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, denotaremos por $\overline{A}$ y A° a la cerradura y al interior de A en X, respectivamente.

1.2 ESPACIOS NORMALES

Definición 1.2.1
Un espacio X es normal *si dados dos subconjuntos cerrados y ajenos A y B en X existen conjuntos abiertos ajenos U y V con $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Para ilustrar esta definición mostraremos un espacio normal el cual juega un papel muy importante en este trabajo.

Ejemplo 1.2.1
La recta de Sorgenfrey.

Consideremos a la línea real $I\!R$ con la topología generada por los intervalos semi-abiertos $[a, b)$ con $a \leq b$ y $a, b \in I\!R$. A $I\!R$ con esta topología la denotaremos por $\mathbb{L}$.

Ahora mostraremos que $\mathbb{L}$ es normal. Sean A, B subconjuntos cerrados de $\mathbb{L}$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Para cada $a \in A$ consideramos un intervalo $[a, x(a))$ tal que $[a, x(a)) \cap B = \emptyset$ y para cada $b \in B$ consideramos un intervalo $[b, x(b))$ tal que $[b, x(b)) \cap A = \emptyset$. Definamos $U = \bigcup_{a \in A}[a, x(a))$ y $V = \bigcup_{b \in B}[b, x(b))$; claramente se tiene que $A \subset U$ y $B \subset V$. Obsérvese que para cada $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \emptyset$ pues de lo contrario tendríamos que $b \in [a, x(a))$ o $a \in [b, x(b))$ si $a < b$ o $a > b$ respectivamente,lo cual no es posible así obtenemos que $U \cap V = \emptyset$, por lo tanto se tiene que $\mathbb{L}$ es normal. ■

Al espacio $\mathbb{L}$ del ejemplo anterior se le conoce en la literatura como la *RECTA DE SORGENFREY* más adelante daremos otra prueba de que la recta de Sorgenfrey es normal (véase la sección 1.3). Otros ejemplos de espacios normales son: cualquier espacio discreto y los $I\!R^n$ para todo $n \in I\!N$ con la topología inducida por la métrica Euclidiana, en general todo espacio métrico es normal.

Como es usual en la literatura convendremos en que cualquier ordinal λ es el conjunto de ordinales menores que λ. Sea $(X. <)$ un conjunto lianealmente ordenado fijo, un conjunto A se dice $cofinal$ en X, si $A \subset X$ y para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $x \leq a$. La $cofinalidad$ de X se define como $cf(X) = min\{| A |: A \subset X \;\; es \;\; cofinal \;\; en \;\; X\}$.

Obsévese que por un proceso similar al del ejemplo anterior se puede probar que ω_1 (el primer ordinal no numerable) con la topología del orden (es decir, los abiertos básicos son de la forma $(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \omega_1 : \alpha < \gamma < \beta\}$) es normal. En general se puede probar que cualquier espacio linealmente ordenado es normal (de hecho hereditariamente colectivamente normal, véase [20]).

Ahora mostraremos un espacio que no es normal, pero antes daremos un lema que nos será de gran ayuda en la construcción de tal espacio y en resultados posteriores.

Lema 1.2.1 *(LEMA DE JONES [1935])*
Si X contiene un conjunto denso D y un subespacio S cerrado, discreto con $|S| \geq 2^{|D|}$ entonces el espacio X no es normal.

DEMOSTRACION:

Supongamos que X es normal. Afirmamos que para cada $T \subset S$, los subconjuntos T y $S \setminus T$ son cerrados y disjuntos en X.
Afirmación: $X \setminus T$ es abierto en X.

Queremos probar que $\forall x \in X \setminus T \; \exists \; V_x$ abierto conteniendo a x tal que $x \in V_x \subset X \setminus T$, para esto consideramos los siguientes dos casos:

a) Si $x \in X \setminus S \subset X \setminus T$, entonces como S es cerrado se tiene que $\exists \; V_x$ tal que $x \in V_x \subset X \setminus S \subset X \setminus T$. Y por lo tanto concluimos este caso.

b) Si $x \in S$ entonces como S es discreto y $T \subset S$, $\exists \; V_x$ tal que $V_x \cap S = \{x\}$ y entonces $V_x \cap T = \emptyset$, es decir $V_x \subset X \setminus T$ con lo cual concluimos que T es cerrado en X.
Análogamente se prueba que $S \setminus T$ es cerrado. Por la normalidad existen abiertos ajenos $U(T)$ y $V(T)$ tales que $T \subset U(T)$ y $S \setminus T \subset V(T)$.

Observación: Si $T_1, T_2 \subset S$ y $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, entonces $U(T_1) \cap V(T_2)$ es un abierto no vacío en X. Para probar esto, notemos que $T_1 \subset U(T_1)$ y $S \setminus T_2 \subset V(T_2)$, así que

$$\emptyset \neq T_1 \setminus T_2 = T_1 \cap S \setminus T_2 \subset U(T_1) \cap V(T_2).$$

Por lo tanto $U(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset$ y es claramente, abierto en X, por lo tanto obtenemos que

$$\emptyset \neq (U(T_1) \cap V(T_2) \cap D) \subset U(T_1) \cap D$$

y

$$(U(T_1) \cap V(T_2) \cap D) \cap U(T_2) \cap D = \emptyset.$$

De aquí concluimos que si T_1 y T_2 son subconjuntos distintos de S entonces

$$U(T_1) \cap D \qquad y \qquad U(T_2) \cap D$$

son subconjuntos no vacios distintos en D. Por tanto se tiene que

$$\mid P(S) \mid \leq \mid P(D) \mid,$$

lo cual es una contradicción pues $\mid S \mid \geq 2^{|D|}$. ■

Como una aplicación del resultado anterior veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2.2
Plano Radial.

Sea $X = I\!R^2$. Un subconjunto A de X lo llamaremos *radialmente abierto* si contiene un segmento de línea abierto en cada dirección alrededor de cada

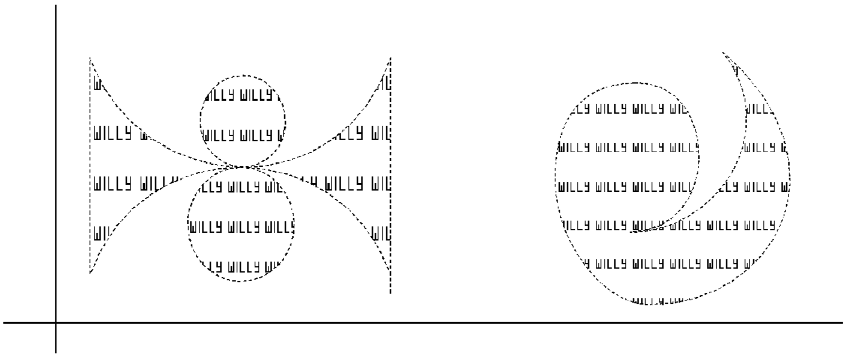

Figura 1.1: Plano radial

punto $a \in A$ (véase la figura 1.1). La colección de subconjuntos radialmente abiertos constituye una topología τ_r para X, a la cual llamaremos topología radial. A (X, τ_r) se le suele llamar el *plano radial.* Obsérvese que la topología usual de $\mathbb{R}^2$ está contenida en la topología radial (esto es, cualquier abierto usual de $\mathbb{R}^2$ es un abierto radial), y también que la topología radial y la topología usual de $\mathbb{R}^2$ no coinciden. Por ejemplo en la figura 1.1 se muestran abiertos radiales que no son abiertos usuales de $\mathbb{R}^2$. Note además que cualquier circunferencia en X es un subespacio cerrado y discreto (esto es, cualquier punto en la circunferencia tiene una vecindad abierta que no contiene ningún otro punto de la circunferencia; ver la figura 1.2). Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia, entonces $\mid \mathcal{C} \mid \geq 2^{\aleph_0}$. Ahora, como $\mathbb{Q}^2$ es un subconjunto denso de X cuya cardinalidad es $\aleph_0$, obtenemos, aplicando el lema de Jones, que el plano radial no es normal. Sin embargo obsérvese que si es T_2, T_3 y de hecho completamente regular (véase la Definición 1.2.2).$\blacksquare$

Ejemplo 1.2.3
Plano de Moore.

Consideremos ahora el semi-plano superior cerrado

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

Definamos las vecindades básicas para cada punto en el semi-plano superior abierto, como los discos abiertos usuales de $\mathbb{R}^2$; y para los puntos z sobre el eje X las vecindades básicas serán $\{z\} \cup A$, donde A es un disco abierto en el semi-plano superior, tangente al eje X en el punto z, (ver la figura 1.3).

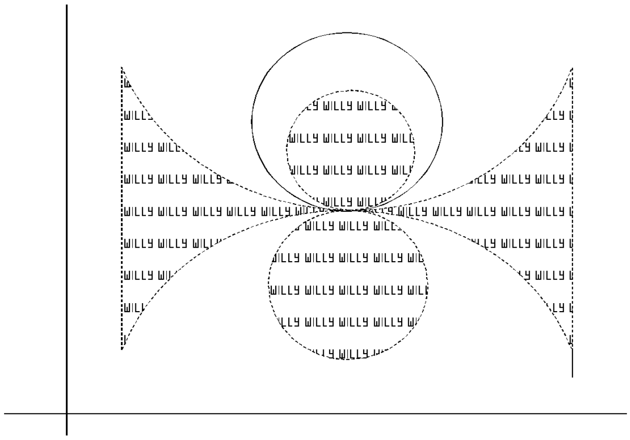

Figura 1.2: Un subespacio discreto del plano radial

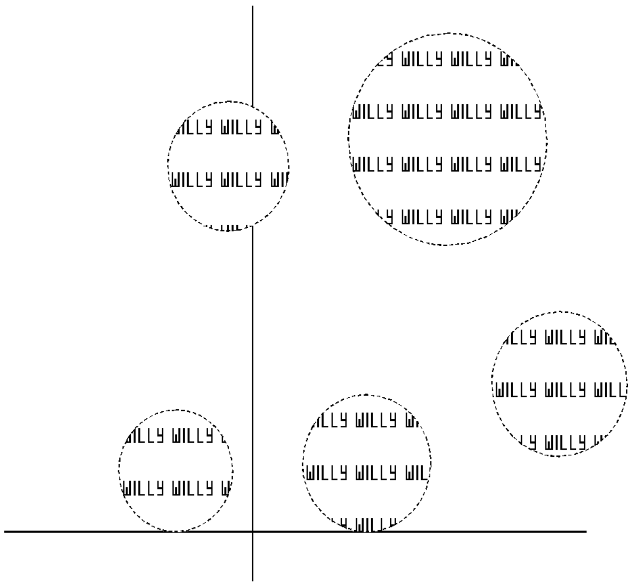

Figura 1.3: Plano de Moore

Estas vecindades en el semi-plano superior cerrado generan una topología. Al espacio Γ junto con esta topología se le denomina el plano de Moore. Obsérvese que en el plano de Moore, el eje X es un subespacio cerrado discreto y $\mid X \mid = 2^{\aleph_0}$. Y como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ es un subconjunto denso en Γ cuya cardinalidad es $\aleph_0$, obtenemos nuevamente, aplicando el lema de Jones, que el plano de Moore no es normal. Y al igual que el plano radial, se tiene que el plano de Moore es T_2, T_3 y completamente regular. ■

Algunos resultados interesantes y que nos serán de utilidad son los siguientes:

Teorema 1.2.1
a) Subespacios cerrados de espacios normales son normales.
b) La imagen continua y cerrada de un espacio normal es normal.

DEMOSTRACION:

a) Si Y es cerrado en X y A, B son subconjuntos cerrados ajenos en Y, entonces A y B son subconjuntos cerrados ajenos en X. Por lo tanto existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Resulta ahora que $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos ajenos en Y que contienen a A y B respectivamente. Por lo tanto, Y es un espacio normal.

b) Supóngase que X es normal y $f : X \longrightarrow Y$ continua, sobre y cerrada. Sean A y B conjuntos cerrados ajenos en Y entonces la imagen inversa de A y la imagen inversa de B son conjuntos cerrados ajenos en X para los cuales existen conjuntos abiertos y ajenos U y V en X que los contienen, respectivamente. Dado que f es cerrada obtenemos que

$$V_1 = Y \setminus f(X \setminus U) \;\; y \;\; V_2 = Y \setminus f(X \setminus V)$$

son abiertos en Y, y claramente V_1 y V_2 son ajenos y contienen a A y B respectivamente. Por lo tanto Y es normal. ■

Los siguientes dos teoremas son muy importantes, no sólo en la teoría de espacios normales sino que también en la Topología General. Las demostraciones de estos hechos pueden verse en el Apéndice.

Teorema 1.2.2 (LEMA DE URYSOHN)
Un espacio X es normal si y sólo si dados dos conjuntos A y B cerrados, ajenos y no vacíos en X, existe una función continua $f : X \longrightarrow I$ con $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$. ■

Definición 1.2.2
Un espacio X es completamente regular si dados un subconjunto cerrado y no vacío A y un punto x que no esté en A, existe una función continua $f : X \longrightarrow I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = \{1\}$.

Obsérvese que como consecuencia del lema de Urysohn se obtiene el siguiente

Corolario 1.2.1
Cualquier espacio normal y T_1 es completamente regular. ■

Teorema 1.2.3 (TEOREMA DE EXTENSION DE TIETZE)
Un espacio X es normal si y sólo si dados un subcojunto cerrado A de X y una función continua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, existe una extensión continua de f a todo X. ■

Definición 1.2.3
Una cubierta de un espacio X es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X cuya unión es todo X.

Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{U}$ es una subcolección $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ la cual es cubierta. Una *cubierta abierta* es una cubierta cuyos elementos son conjuntos abiertos. En general cualquier adjetivo aplicado a una cubierta, significará que los elementos de la cubierta cumplen con ese adjetivo.

Una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de X es *reducible* si existe una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in$ A. Diremos además que $\mathcal{V}$ es una *reducción* de $\mathcal{U}$.

Una cubierta $\mathcal{U}$ es *punto finita* si para cada $x \in X$, x está en sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.

Damos ahora una caracterización de los espacios normales en términos de cubiertas reducibles.

Teorema 1.2.4
X es normal si y sólo si toda cubierta abierta punto finita es reducible.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Sea X un espacio normal y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una cubierta abierta punto finita de X, donde λ es un ordinal. Ahora construiremos $\{V_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ por inducción transfinita como sigue: sea

$$F_1 = X \setminus [\bigcup_{\alpha>1} (U_\alpha)]$$

Claramente $F_1 \subset U_1$. Ahora por la normalidad de X, existe un conjunto abierto V_1 en X tal que $F_1 \subset V_1$ y $\overline{V_1} \subset U_1$. Supóngase ahora que V_β está bien definido para cada $\beta < \alpha$ y que se cumple que

$$\{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{U_\beta : \beta \geq \alpha\}$$

es una cubierta abierta de X. Sea

$$F_\alpha = X \setminus [(\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta) \cup (\bigcup_{\gamma>\alpha} U_\gamma)].$$

Claramente F_α es cerrado y $F_\alpha \subset U_\alpha$. Por la normalidad de X existe un subconjunto abierto V_α de X, tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Sea

$$\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \lambda\}.$$

Veamos ahora que $\mathcal{V}$ es una reducción de $\mathcal{U}$. Por la construcción de $\mathcal{V}$, lo único que hace falta probar es que $\mathcal{V}$ cubre a X. Con este fin, sea $x \in X$, como $\mathcal{U}$ es punto finita se tiene que x está en sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$. Sea $\alpha = max\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Ahora $x \notin U_\gamma$ para toda $\gamma > \alpha$, entonces si $x \notin V_\beta$ para toda $\beta < \alpha$ tenemos que $x \in F_\alpha \subset V_\alpha$. Por lo que, en cualquier caso, $x \in V_\beta$ para alguna $\beta \leq \alpha$. Por lo tanto $\mathcal{V}$ es una reducción de $\mathcal{U}$.

$\Leftarrow$) Sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos en X, entonces

$$\{X \setminus A, X \setminus B\}$$

es una cubierta abierta punto finita de X. Obsérvese que cualquier reducción $\{U, V\}$ de $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ induce una separación para A y B. ■

1.3 ALGO DE NUMERABILIDAD

En este apartado trataremos tres propiedades topológicas definidas en términos de $\aleph_0$, y algunas relaciones entre ellas.

Definición 1.3.1
Diremos que X es segundo numerable (o que satisface el segundo axioma de numerabilidad) si su topología tiene una base numerable.

Algunos ejemplos conocidos de espacios segundo numerables son los espacios Euclidianos $\mathbb{R}^n$ o el espacio discreto numerable. Obsérvese también que cualquier espacio discreto de cardinalidad mayor que $\aleph_0$ no es segundo numerable.

Definición 1.3.2
Un espacio topológico X es separable si X tiene un subconjunto denso numerable (un conjunto D es denso en X si $\overline{D} = X$).

Como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ y $| \mathbb{Q}^n | = \aleph_0$ se tiene que $\mathbb{R}^n$ es separable. El espacio discreto de cardinalidad mayor que $\aleph_0$, no es separable. Más adelante veremos que en general, cualquier espacio segundo numerable es separable.

Definición 1.3.3
X es de Lindelöf si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

Obviamente los espacios discretos numerables tienen la propiedad de Lindelöf. Y cualquier subespacio de un segundo numerable es de Lindelöf.

Algunos resultados interesantes con respecto a estas propiedades son los siguientes.

Teorema 1.3.1
a) La imagen continua abierta de un espacio segundo numerable es segundo numerable
b) Un subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable.

DEMOSTRACION:

a) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua abierta y sobre. Basta con mostrar que si $\mathfrak{B}$ es una base para X entonces $f(\mathfrak{B}) = \{f(B) : B \in \mathfrak{B}\}$ es una base para Y.

Con este fin tomamos un conjunto abierto V en Y y sea $p \in V$. Sabemos que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Si $q \in f^{-1}(p) \subset f^{-1}(V)$, entonces para algún elemento básico $B \in \mathfrak{B}$ tenemos que $q \in B \subset f^{-1}(V)$. Por lo cual $p \in f(B) \subset V$. Es decir, $f(\mathfrak{B})$ forma una base para Y.

b) Basta observar que si $\mathfrak{B}$ es una base para X y $S \subset X$ entonces $\{V \cap S : V \in \mathfrak{B}\}$ es una base para S. ∎

Teorema 1.3.2
a) La imagen continua de un espacio separable es separable.
b) Subespacios de espacios separables no son necesariamente separables. Sin embargo un subespacio abierto de un espacio separable es separable.

DEMOSTRACION:

a) Basta con observar que una función continua y sobre manda subconjuntos densos de X en subconjuntos densos de Y.

b) El plano de Moore Γ (véase el ejemplo 1.2.4) es separable pues $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en él, mientras que el eje X en Γ no lo es. ∎

Teorema 1.3.3
a) La imagen continua de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.
b) Subespacios cerrados de un espacio de Lindelöf son de Lindelöf, y subespacios arbitrarios de espacios Lindelöf no son necesariamente Lindelöf.

DEMOSTRACION:

a) Supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es continua y sobre. Supóngase además que X es de Lindelöf. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta de Y entonces

$\{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ es una cubierta abierta de X de la cual podemos extraer una subcubierta numerable $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}) : i \in \mathbb{N}\}$. La colección $\{U_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}\}$ es una subcubierta numerable de $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ para Y.

$b)$ Supóngase que F es cerrado en X y que X es de Lindelöf. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de F. Consideremos para cada α un subconjunto abierto V_α en X para el cual $V_\alpha \cap F = U_\alpha$. Entonces $\{X \setminus F\}$ y los conjuntos V_α forman una cubierta abierta de X de la cual podemos extraer una subcubierta numerable $\{V_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus F\}$. Así los correspondientes $\{U_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}\}$ cubren a F y forman una subcubierta numerable de $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ para F. ■

Teorema 1.3.4
Si X es segundo numerable,entonces X es
$a)$ Lindelöf y
$b)$ separable.

DEMOSTRACION:

$a)$ Sea $\mathfrak{B}$ una base numerable para X. Supóngase que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in U$ existe algún $B_{x,U} \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_{x,U} \subset U$. Ahora consideremos $\mathcal{B}' = \{\ B_{x,U} : x \in U,\, U \in \mathcal{U}\ \}$. Dado que $\mathcal{B}' \subset \mathfrak{B}$ se tiene que $\mathcal{B}'$ es numerable digamos $\mathcal{B}' = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$, $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $B_n = B_{X_n,U_n}$. Afirmamos que $\mathcal{V} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Es claro que $\mathcal{V}$ es una subfamilia de $\mathcal{U}$, por lo que sólo falta probar que es cubierta. Para tal efecto sea $x \in X$, como $\mathcal{U}$ es cubierta existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ entonces $x \in B_{x,U} \in \mathcal{B}'$ así que $B_{x,u} = B_n = B_{x_n,U_n}$ esto para alguna $n \in \mathbb{N}$, dado que $x_n \in B_n \subset U_n$ se concluye que $x \in U_n$. Por lo tanto $\mathcal{V}$ es cubierta.

$b)$ Sea $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base numerable y elijamos un punto $x_i \in B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Es claro que $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es denso. ■

Considero importante que nos detengamos en este momento a analizar un poco más las propiedades de la recta de Sorgenfrey (véase el ejemplo 1.2.1). Demostraremos primero que tiene la propiedad de Lindelöf. Para probar esto mostraremos un resultado aún más general.

Teorema 1.3.5
Sea $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de intervalos de $\mathbb{R}$, entonces existe una subfamilia numerable $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{B}$.

DEMOSTRACION:

Sea $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de intervalos en $\mathbb{R}$. Consideremos

$$A' = \bigcup\{A^\circ : A \in \mathcal{A}\}.$$

Sea $C = (\bigcup \mathcal{A}) \setminus A'$

Afirmación: C es numerable .

Sea $x \in C$ entonces existe $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_x$. Consideremos ahora H_x la componente de A' que contiene a A_x°. Entonces x es punto frontera de H_x pues $x \in \overline{H_x} \setminus H_x$. Así C está contenido en el conjunto de puntos frontera de A'. Como las componentes de A' son abiertas, mutuamente ajenas y cada componente tiene por lo menos un racional entonces A' no tiene más componentes que racionales, por lo que C es numerable.

Como $I\!R$ es segundo numerable, A' se puede poner como una unión numerable de intervalos abiertos donde cada uno de estos intervalos está contenido en algún elemento de $\mathcal{A}$ entonces existe $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}_1$ es numerable y

$$A' = \bigcup \{A^\circ : A \in \mathcal{B}_1\}.$$

Ahora sea $\mathcal{B}_2$ una subfamilia numerable de $\mathcal{A}$ tal que $C \subset \bigcup \mathcal{B}_2$ por tanto considerando $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ concluimos el teorema. ■

Otra propiedad importante que tiene la recta de Sorgenfrey, es que es separable, de hecho

Proposición 1.3.1

La recta real y la recta de Sorgenfrey tienen los mismos subconjuntos densos.

DEMOSTRACION:

Si A es un subconjunto de $\mathbb{L}$ que no es denso en $\mathbb{L}$, existen $a, b \in I\!R$ con $a < b$ tal que $A \cap [a, b) = \emptyset$ por tanto $A \cap (a, b) = \emptyset$ y así A no sería denso en $I\!R$.

Ahora si A no es denso en $I\!R$ existen $a, b \in I\!R$ con $a < b$ tales que $A \cap (a, b) = \emptyset$, por lo tanto $A \cap [(a + b)/2, b) = \emptyset$ y entonces A no sería denso en $\mathbb{L}$ ■

Parece ser que la recta de Sorgenfrey y la recta real, tienen las mismas propiedades, pero en realidad esto no sucede pues la recta de Sorgenfrey no es segundo numerable mientras que la recta real si.

Para ver la afirmación anterior, probaremos el siguiente resultado .

Proposición 1.3.2

Cada base de la recta de Sorgenfrey tiene por lo menos tantos elementos como números reales.

DEMOSTRACION:

Sea $\mathfrak{B}$ una base de $\mathbb{L}$. Para cada $a \in I\!R$, podemos escoger $B_a \in \mathfrak{B}$ tal que $a \in B_a \subset [a, a + 1)$, así podemos considerar una función $f : I\!R \longrightarrow \mathfrak{B}$

tal que a cada $a \in I\!R$ le asigna B_a. Claramente esta funcion es inyectiva pues, para cada $a \in I\!R$, a es el primer elemento de B_a y un subconjunto de $I\!R$ no puede tener mas de un primer elemento. ■

Con los resultados anteriores concluimos que la recta de Sorgenfrey, es de Lindelöf, separable pero no segundo numerable.

En la sección (1.6) se demostrará que todo espacio Lindelöf y regular es normal. Y así obtenemos otra prueba de que la recta de Sorgenfrey es normal.

1.4 ESPACIOS COMPACTOS

Definición 1.4.1
Un espacio X es compacto si cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

El ejemplo más común de espacio compacto que nos podemos encontrar en la literatura es el intervalo I=[0,1] con la topología inducida por la recta real. Así también el ejemplo más común de un espacio que no es compacto es la recta real con su topología usual.

Teorema 1.4.1
a) Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.
b) Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

DEMOSTRACION:

a) Si A es un cerrado en un conjunto compacto X y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de A entonces para cada $U \in \mathcal{U}$ podemos encontrar un conjunto abierto V_U en X tal que $V_U \cap A = U$. Ahora $\{X \setminus A\} \cup \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X y como éste es compacto, entonces podemos encontrar una subcubierta finita. De la intersección con A de esta subcubierta finita se obtiene una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para A.

b) Supóngase que A es un subcojunto compacto de un espacio Hausdorff X. Para demostrar que A es cerrado probaremos que el complemento es abierto. Sea $y \in X \setminus A$. Entonces para cada $x \in A$, existen vecindades abiertas U_x y V_x de x y y respectivamente tales que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Así $\mathcal{U} = \{U_x : x \in A\}$ forma una cubierta abierta de A y como éste es compacto, existe una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\}$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, por lo tanto $A \subset U$ y $y \in V$ y evidentemente $V \cap A = \emptyset$. Como V es un abierto tal que $y \in V \subset X \setminus A$, concluimos que A es cerrado. ■

Obsérvese que la prueba anterior nos dice aún más; nos está diciendo que en un espacio de Hausdorff un subconjunto compacto, puede ser separado de un punto en el complemento, esto es, (dado un compacto A en un espacio de Hausdorff X y un punto $y \notin A$ existen vecindades abiertas ajenas U y V de A y y respectivamente).

Algunos hechos importantes sobre subconjuntos compactos son los siguientes.

Teorema 1.4.2
Subconjuntos compactos y ajenos en un espacio de Hausdorff pueden ser separados por conjuntos abiertos ajenos.

DEMOSTRACION:
La prueba es similar a la hecha en la parte (b) del teorema anterior. ∎

Obsérvese que desde el punto de vista de la separación, los conjuntos compactos se comportan como puntos. Por lo tanto también podemos concluir que

$$todo\ \ espacio\ \ compacto\ \ y\ \ Hausdorff\ \ es\ \ normal.$$

Teorema 1.4.3
La imagen continua de un espacio compacto es compacto

DEMOSTRACION:
Supóngase que X es un compacto y que $f : X \longrightarrow Y$ es continua y sobre. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Y entonces $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X, y como X es compacto existe una subcubierta finita, digamos $\{f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_n)\}$. Dado que f es sobre, la familia $\{U_1, ..., U_n\}$ cubre a Y. Concluimos que Y es compacto. ∎

Uno de los teoremas más importantes sobre compacidad es el siguiente resultado de Tychonoff; la demostración se anexa en el Apéndice.

Teorema 1.4.4 *(TYCHONOFF)*
Un producto de espacios topológicos no vacío es compacto si y sólo si cada factor es compacto. ∎

1.5 ESPACIOS PARACOMPACTOS

Los espacios paracompactos fueron introducidos por primera vez en 1944 por Diudonné como una generalización natural de los espacios compactos.

Definición 1.5.1
Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas de X, decimos que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{V}$ ($\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$) si cada $U \in \mathcal{U}$ está contenido en algún $V \in \mathcal{V}$ (así decimos que $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$).

Definición 1.5.2
Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es localmente finita si cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta que sólo intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.

Definición 1.5.3
Una colección $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X es σ-localmente finita si $\mathcal{V}$ se puede expresar en la forma $\mathcal{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ en donde cada $\mathcal{V}_i$ es una colección localmente finita en X.

Lema 1.5.1
Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección localmente finita de conjuntos en X entonces también lo es $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$.

DEMOSTRACION:
Fijemos $p \in X$. Podemos encontrar una vecindad abierta U de p tal que $U \cap A_\lambda = \emptyset$ excepto para una cantidad finita de $\lambda' s$. Entonces $U \cap \overline{A_\lambda} = \emptyset$ excepto para esos mismos $\lambda' s$, con lo que se establece el lema. ■

Lema 1.5.2
Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección localmente finita de conjuntos, entonces

$$\bigcup \overline{A_\lambda} = \overline{\bigcup A_\lambda}.$$

En particular la unión de una colección localmente finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACION:
Claramente $\bigcup \overline{A_\lambda} \subset \overline{\bigcup A_\lambda}$. Para probar la otra contención sea $p \in \overline{\bigcup A_\lambda}$, entonces alguna vecindad de p intersecta sólo una cantidad finita de los conjuntos A_λ, digamos $\{A_{\lambda_1}, ..., A_{\lambda_n}\}$. Dado que toda vecindad de p intersecta a $\bigcup A_\lambda$ entonces toda vecindad de p debe de intersectar a $A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$ entonces

$$p \in \overline{A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}} = \overline{A_{\lambda_1}} \cup ... \cup \overline{A_{\lambda_n}}.$$

Por lo que, para alguna k, $p \in \overline{A_{\lambda_k}}$. Así se establece la otra contención y por tanto el lema. ■

Definición 1.5.4
Un espacio Hausdorff X es paracompacto si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

De manera más general, sea k un cardinal. Decimos que un espacio Hausdorff X es $k-$*paracompacto* si cualquier cubierta abierta de cardinalidad k tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Evidentemente los espacios discretos son paracompactos. Durante el desarrollo de este trabajo se mostrarán más ejemplos de espacios paracompactos y de espacios que no lo son.

Teorema 1.5.1
Para un espacio T_3 X los siguientes enunciados son equivalentes:
a) X es paracompacto.
b) Cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.
c) Cada cubierta abierta tiene un refinamiento localmente finito (no necesariamente abierto).
d) Cada cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado localmente finito.

DEMOSTRACION:
$(a) \Rightarrow (b)$ Es claro puesto que una cubierta localmente finita es σ-localmente finita.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Por hipótesis existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in I\!N}\mathcal{V}_n$ donde cada $\mathcal{V}_n$ es una colección localmente finita de conjuntos abiertos, digamos $\mathcal{V}_n = \{V_b^n : b \in B_n\}$ para cada n. Sea $W_n = \bigcup_b V_b^n$. Entonces $\{W_1, W_2, ...\}$ cubre a X. Definamos $A_n = W_n - (\bigcup_{i<n} W_i)$, entonces $\{A_n : n \in I\!N\}$ es un refinamiento localmente finito de $\{W_n : n \in I\!N\}$, ahora consideremos $\{A_n \cap V_b^n : n \in I\!N, b \in B_n\}$, esta familia es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{V}$ y entonces de $\mathcal{U}$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, para cada $x \in X$ fijamos una U_x en $\mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ y por la regularidad podemos encontrar una vecindad abierta V_x tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$. Ahora $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta de X y por hipótesis tiene un refinamiento localmente finito $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, entonces $\{\overline{A_\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$ es todavía localmente finita, esto por el lema 1.5.1. Como para cada γ, si $A_\gamma \subset V_x$ entonces $\overline{A_\gamma} \subset \overline{V_x} \subset U$ para alguna $U \in \mathcal{U}$ se sigue que $\{\overline{A_\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{V}$ un refinamiento cerrado localmente finito. Para cada $x \in X$ sea W_x una vecindad de x que sólo intersecta una cantidad finita de $V \in \mathcal{V}$. Ahora sea $\mathcal{A}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\{W_x : x \in X\}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, sea

$$V^* = X \setminus \bigcup \{A \in \mathcal{A} : A \cap V = \emptyset\}$$

entonces $V \subset V^*$ y $\{V^* : V \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta (los conjuntos V^* son abiertos por el lema 1.5.2) y es además localmente finita, pues consideremos $x \in X$, existe entonces una vecindad U de x que sólo intersecta $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de $\mathcal{A}$, pero siempre que $U \cap V^* \neq \emptyset$ tenemos que $A_k \cap V^* \neq \emptyset$ para alguna $k = 1.2, ..., n$ lo cual implica que $A_k \cap V \neq \emptyset$, dado que a_k intersecta sólo una cantidad finita de V debemos entonces tener que $U \cap V^* = \emptyset$ para todos excepto una cantidad finita. Ahora para cada $V \in \mathcal{V}$ fijamos $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U_V$ y formamos el conjunto $U_V \cap V^*$. La colección de conjuntos

$$\{U_V \cap V^* : V \in \mathcal{V}\}$$

sirven como un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. ∎

Un resultado de gran importancia debido a A.H. STONE, que subraya la importancia de la clase de espacios paracompactos y cuya demostración desarollamos en el Apéndice es el siguiente.

Teorema 1.5.2 *(A.H. STONE)*
Todo espacio métrico es paracompacto. ∎

1.6 MAS DE ESPACIOS NORMALES.

En este apartado, daremos algunas relaciones que consideramos importantes para nuestros fines, entre espacios de Lindelöf, paracompactos y normales.
Comenzaremos diciendo que:

Teorema 1.6.1
Todo espacio T_3 y de Lindelöf es paracompacto.

DEMOSTRACION:
Esto es claro puesto que una subcubierta numerable es un refinamiento σ-localmente finito y aplicando el teorema 1.5.1 concluimos el resultado. ∎

Otro hecho importante es el siguiente:

Teorema 1.6.2
Todo espacio paracompacto es normal.

DEMOSTRACION:

Sea X un espacio paracompacto. Primero estableceremos la regularidad del espacio X. Supóngase que A es un conjunto cerrado en X, y sea $x \notin A$. Para cada $y \in A$ consideremos un abierto V_y que contiene a y y tal que $x \notin \overline{V}_y$. Entonces, la colección $\{V_y : y \in A\}$ junto con el conjunto $X \setminus A$, forman una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X.

Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ y sea

$$V = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : W \cap A \neq \emptyset\}.$$

Entonces V es un abierto que contiene a A y

$$\overline{V} = \bigcup \{\overline{W} \in \mathcal{W} : \overline{W} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Pero cada conjunto W que intersecta a A está contenido en alguna V_y, por lo cual cada $\overline{W}$ está contenido en algún $\overline{V}_y$, así que V no contiene a x. Entonces $x \notin \overline{V}$, con lo cual concluimos que x y A están separados por conjuntos abiertos en X.

Ahora supóngase que A y B son subconjuntos cerrados disjuntos en X. Por la regularidad, para cada $y \in A$ podemos encontrar un abierto V_y tal que $y \in V_y$ y $\overline{V}_y \cap B = \emptyset$. Y por un proceso análogo al que se uso para demostrar la regularidad del espacio, podemos encontrar un conjunto abierto V tal que $A \subset V$ y $\overline{V} \cap B = \emptyset$. Por lo tanto X es normal. ■

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores obtenemos el siguiente

Corolario 1.6.1
Todo espacio T_3 y de Lindelöf es normal. En particular, cualquier espacio compacto y T_2 es normal. ■

Un conjunto de cardinalidad mayor que $\aleph_0$ con la topología discreta es un ejemplo de un espacio paracompacto que no es de Lindelöf. Más adelante en el capítulo tres veremos un ejemplo de un espacio normal que no es paracompacto. En el diagrama de la figura 1.4 se muestran en la clase de los espacios T_3, las relaciones entre espacios Lindelöf, paracompactos, normales y otras clases de espacios que tambien son tratados en este trabajo.

1.7 TOPOLOGIA PRODUCTO

En esta sección estudiaremos algunos aspectos de la topología producto y aparecerá la motivación para el desarrollo de este trabajo.

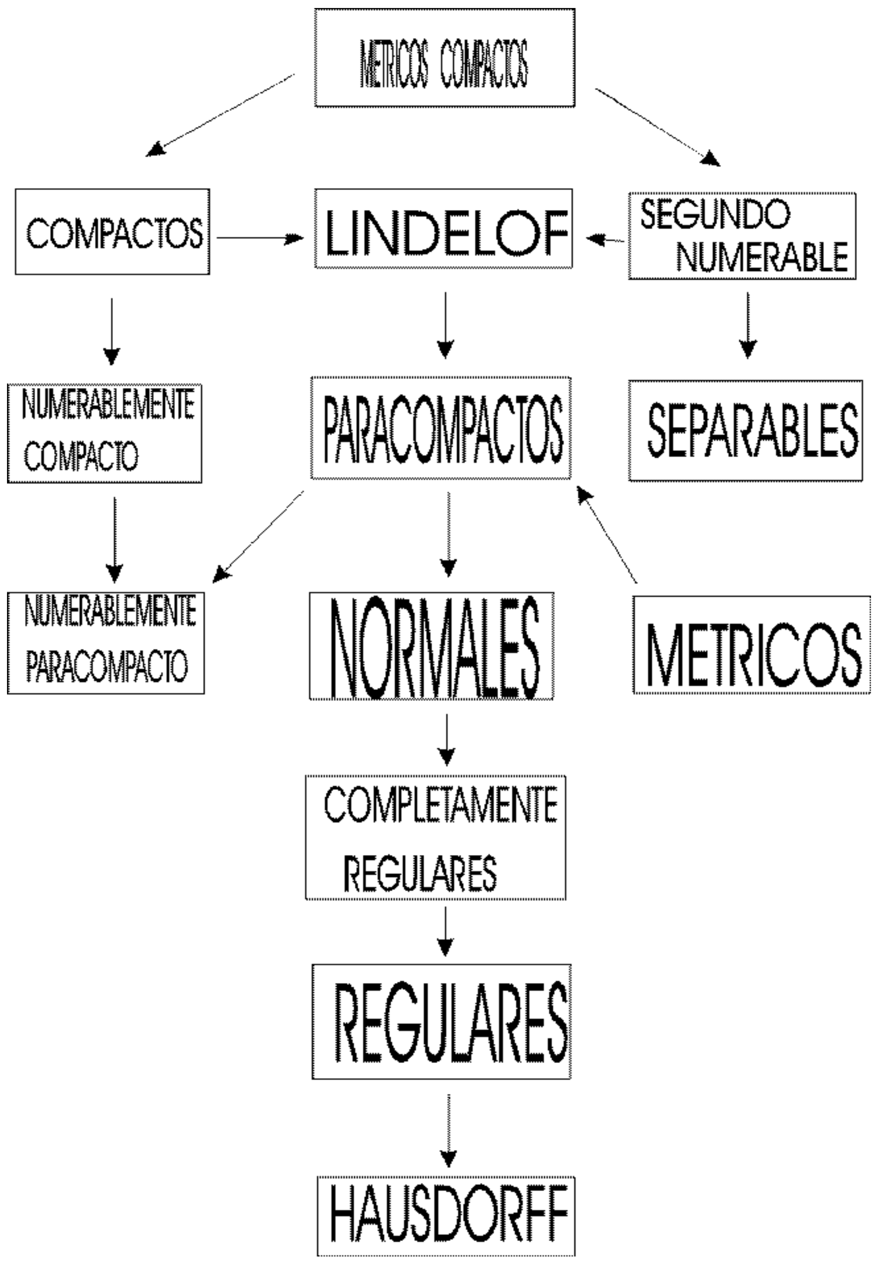

Figura 1.4: Relaciones en espacios T_3

En lo sucesivo $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ denotará el producto cartesiano de los espacios topológicos no vacios X_α con $\alpha \in J$

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha = \{f : J \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

También denotaremos por

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

a la proyección en el β-ésimo factor,es decir $\pi_\beta(f) = f(\beta)$.

Comenzamos con la definición de topología producto.

Definición 1.7.1
Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos. La topología de Tychonoff o topología Producto sobre $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es obtenida tomando como base de los conjuntos abiertos a los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ donde
a) U_α es abierto en X_α para cada $\alpha \in J$, y
b) para todo $\alpha \in J$ excepto una cantidad finita de índices, $U_\alpha = X_\alpha$.

Obsérvese que el conjunto $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$, donde $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, puede ser escrito como

$${\pi_{\alpha_1}}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap ... \cap {\pi_{\alpha_n}}^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

Cuando se toma como base de los conjuntos abiertos a los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ donde U_α es abierto de X_α para cada $\alpha \in J$, se obtiene la llamada topología de la caja, a $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ junto con esta topología es usual llamarle producto caja.

Unos teoremas importantes para nuestros fines son los siguientes.

Teorema 1.7.1
La β-ésima proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ es continua y abierta.

DEMOSTRACION:
Sea $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ y sea U_β un abierto de X_β entonces por definición $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un abierto subásico de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ por lo que se concluye que π_β es continua.

Para probar que π_β es abierta basta con probar que la imagen de un abierto básico es un abierto. Sea $U = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ donde $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Entonces $\pi_\beta(U) = U_\beta$ que claramente es abierto con lo que concluimos la prueba del teorema. ■

Teorema 1.7.2
$f : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es continua si y solo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada α.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Esta implicación es clara, pues la composición de funciones continuas es continua.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in J$. Como los conjuntos de la forma ${\pi_\alpha}^{-1}(U_\alpha)$ con $\alpha \in J$ y donde U_α es un subconjunto abierto de X_α, forman una subase para la topología producto, y $f^{-1}({\pi_\alpha}^{-1}(U_\alpha)) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$ concluimos que f es continua. ∎

El siguiente teorema es el resultado que dio la motivación a esta tesis.

Teorema 1.7.3
a) Un producto de espacios T_2 (o de Hausdorff) es T_2 si y sólo si cada factor lo es.
b) Un producto de espacios regulares (T_3) es regular (T_3) si y sólo si cada factor lo es.
c) Un producto de espacios completamente regulares (o de Tychonoff) es completamente regular si y sólo si cada factor lo es.
d) Un producto de espacios normales no es necesariamente un espacio normal.

DEMOSTRACION:

Sólo se hará la demostración de (c). El siguiente capítulo estará dedicado a probar (d).

demostración de (c). $\Rightarrow$) Como cada factor de un subespacio del producto es homeomorfo a un subespacio de éste, entonces evidentemente cada factor es completamente regular.

$\Leftarrow$) Es suficiente mostrar que para todo punto $x = (x_s) \in \prod_{s \in S} X_s$ y toda vecindad V de x de la forma $\pi_{s_0}^{-1}(W_{s_0})$ donde W_{s_0} es un abierto de X_{s_0} existe una función continua

$$f : \prod_{s \in S} X_s \longrightarrow I$$

tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in \prod_{s \in S} X_s \setminus V$. Con este fin consideremos $f = f_0 \circ \pi_{s_0}$ donde $f_0 : X_{s_0} \longrightarrow I$ satisface $f_0(x_{s_0}) = 0$ y $f_0(X_{s_0} \setminus W_{s_0}) \subset \{1\}$. ∎

Quizá usted amable lector se pregunte, porqué este teorema es la motivacion para la realización de este trabajo. La respuesta es muy sencilla, ya que este resultado nos está diciendo que el producto topológico se comporta -BIEN- con los primeros axiomas de separación más no así con el axioma de normalidad como se verá en el siguiente capítulo.

1.8 LEMA DE ALEXANDROFF-URYSOHN

Esta sección se enuncia el LEMA DE ALEXANDROFF - URYSOHN el cual nos será de gran utilidad en resultados posteriores, concretamente en el capítulo dos, ejemplos 3 y 5. La demostración de este lema será omitida por ser un resultado propio de la teoría de conjuntos, este resultado puede verse más ampliamente en [9] (pag, 79).

Definición 1.8.1
Sea M un conjunto de ordinales.
Una función $f : M \longrightarrow OR$ se dice regresiva si para todo $\varepsilon \in M \setminus \{0\}$ $f(\varepsilon) < \varepsilon$ y $f(0) = 0$ si $0 \in M$.

Donde OR es la clase de ordinales.

Lema 1.8.1 *(ALEXANDROFF - URYSOHN)*
Si $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ es regresiva, entonces existe $\varepsilon_0 < \omega_1$ tal que

$$\mid f^{-1}(\varepsilon_0) \mid = \omega_1.$$

■

Decimos que un ordinal α es regular si $\alpha = cf(\alpha)$ y diremos que es singular si $\alpha > cf(\alpha)$. El lema de ALEXANDROFF - URYSOHN puede ser generalizado como sigue

Lema 1.8.2
Sea $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ una función regresiva.
a) Si α es regular entonces existe $\varepsilon < \alpha$ tal que $\mid f^{-1}(\varepsilon) \mid = \alpha$.
b) Si α es singular entonces para todo $\beta < \alpha$ existe $\varepsilon < \alpha$ tal que $\mid f^{-1}(\varepsilon) \mid > \beta$. ■

CAPITULO 2

EJEMPLOS

En el capítulo anterior vimos que el producto de espacios regulares, completamente regulares y de Hausdorff son nuevamente regulares, completamente regulares y de Hausdorff, respectivamente. Sin embargo el producto de espacios normales, paracompactos o de Lindelöf no necesariamente conservan la propiedad corespondiente.

En el siguiente ejemplo mostraremos que el cuadrado de un espacio de Lindelöf no tiene por que ser de Lindelöf.

Ejemplo 1 *(SORGENFREY [1948])*
El cuadrado de la recta de SORGENFREY no es normal

DEMOSTRACION:

Consideremos la recta de Sorgenfrey $\mathbb{L}$ y consideremos $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. Obsérvese que D es un subconjunto cerrado y discreto de $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ (véase la figura 2.1) y además $\mid D \mid = \mid \mathbb{R} \mid$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{L}$, entonces $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ y además $\mid \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid = \aleph_0$. Por lo tanto, como $\mid D \mid \geq 2^{\aleph_0}$, aplicando el lema de Jones concluimos que $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ no es normal.

Como $\mathbb{L}$ es hereditariamente de Lindelöf (teorema 1.3.5) se sigue que el cuadrado de un espacio hereditariamente de Lindelöf no necesariamente es de Lindelöf. ■

Ahora probaremos que el producto no numerable de espacios métricos no es necesariamente normal.

Ejemplo 2 *(STONE [1948])*
El producto cartesiano $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ no es normal.

DEMOSTRACION:

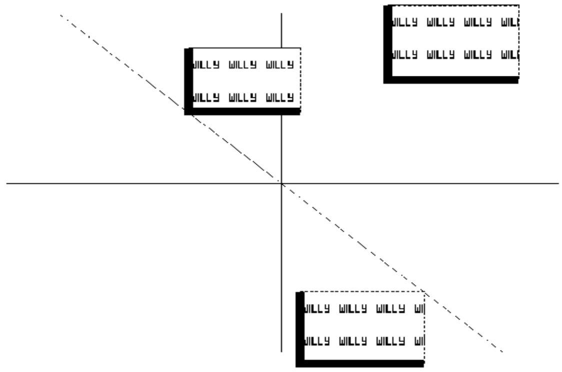

Figura 2.1: Plano de Sorgenfrey

Sea $\mathbb{N}^{\aleph_1} = \prod_{s\in S}\mathbb{N}_s$, donde $\mid S \mid = \aleph_1$ y $\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales con la topología discreta. Para cada $S_0 \subset S$ denotemos por P_{S_0} la proyección de $\prod_{s\in S}\mathbb{N}_s$ sobre $\prod_{s\in S_0}\mathbb{N}_s$, es decir

$$P_{S_0} : \prod_{s\in S}\mathbb{N}_s \longrightarrow \prod_{s\in S_0}\mathbb{N}_s$$

y

$$P_{S_0}(f) = (f(s))_{s\in S_0} = f \mid_{S_0} .$$

Ahora consideremos los conjuntos

$$A_1 = \{(J_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S}\mathbb{N}_s : \forall n \neq 1, \mid \{s \in S : J_s = n\} \mid \leq 1\}$$

$$A_2 = \{(J_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S}\mathbb{N}_S : \forall n \neq 2, \mid \{s \in S : J_s = n\} \mid \leq 1\}$$

Afirmación 2.2.1 : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

En efecto, ya que suponer que existe $(J_s)_{s\in S} \in A_1 \cap A_2$ implica que cualquier número natural aparece a lo más una vez. Como $\mid S \mid = \aleph_1$, esto no puede suceder; por lo tanto se tiene que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Afirmación 2.2.2: A_i es cerrado para $i = 1, 2$.

Basta probarlo para A_1 (la prueba para A_2 es análoga). Con este fin, probaremos que $\prod_{s\in S}\mathbb{N}_s \setminus A_1$ es abierto.

Sea $p \in \prod_{s\in S}\mathbb{N}_s \setminus A_1$, $p = (J_s)_{s\in S}$. Como $p \notin A_1$, existe $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 1$ y $s_1, s_2 \in S$ tal que $s_1 \neq s_2$ y $J_{s_1} = J_{s_2} = n$. Ahora consideremos el abierto básico $V = \prod_{s\in S}W_s$ donde $W_s = \mathbb{N}$ $\forall s \in S \setminus \{s_1, s_2\}$ y $W_{s_1} = W_{s_2} = \{n\}$. Así claramente $p \in V \subset \prod_{s\in S}\mathbb{N}_s \setminus A_1$. Por lo tanto A_1 es cerrado.

Ahora vamos a demostrar que para cualquier abierto U que contiene a A_1 se tiene que $\overline{U} \cap A_2 \neq \emptyset$. Sea U un conjunto abierto que contiene a A_1, y consideremos el punto $x_1 \in A_1$ tal que todas sus coordenadas son iguales a 1. Entonces $x_1 \in A_1 \subset U$, por lo que existe un elemento básico V_1 tal que $x_1 \in V_1 \subset U$, donde $V_1 = {P_{S_1}}^{-1}(W_1)$, $S_1 \subset S$ finito y W_1 es un subconjunto abierto de $\prod_{s \in S_1} I\!N_s$. Supongamos que

$$P_{S_1}^{-1}(P_{S_1}(x_1)) \subset P_{S_1}^{-1}(W_1) = V_1 \subset U$$

y que $S_1 = \{s_1, s_2, ..., s_{n_1}\}$. Ahora definamos $x_2 \in A_1$ como sigue: $x_2 = (J_s)_{s \in S}$ donde $P_{s_n}(x_2) = n$ para $n = 1, 2, .., n_1$ y $P_s(x_2) = 1$ si $s \notin S_1$. Esto implica que $x_2 \in A_1 \subset U$; por lo cual existe un elemento básico V_2 tal que $x_2 \in V_2 \subset U$ donde $V_2 = {P_{S_2}}^{-1}(W_2)$, $S_2 \subset S$ finito, $S_1 \subset S_2$ y W_2 es un subconjunto abierto de $\prod_{s \in S_2} I\!N_s$. Supongamos que

$$P_{S_2}^{-1}(P_{S_2}(x_2)) \subset P_{S_2}^{-1}(W_2) = V_2 \subset U$$

y que $S_2 = \{s_1, s_2, ..., s_{n_2}\}$. Así por inducción podemos obtener puntos $x_1, x_2, x_3, ...$ y subconjuntos finitos $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset ....$ Ahora consideremos el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, ...\}$ donde $P_s(y_i) = P_s(x_i)$, si $s \in S_i$ y $P_s(y_i) = 2$ para $s \notin S_i$.
Afirmación 2.2.3: $\{y_1, y_2, ...\} \subset U$.

Sea $y_i \in \{y_1, y_2, ..\}$. Como $P_s(y_i) = P_s(x_i)$ para $s \in S_i$ y $P_s(y_i) = 2$ para $s \notin S_i$, entonces

$$P_{S_i}^{-1}(P_{S_i}(y_i)) = P_{S_i}^{-1}(P_{S_i}(x_i)) \subset P_{S_i}^{-1}(W_i) = V_i \subset U.$$

Por lo tanto $y_i \in U$. Ahora sea $S' = \bigcup_{i \in I\!N} S_i$ definamos $y \in \prod_{s \in S} I\!N_s$ de tal manera que $P_{s_n}(y) = n$ si $s_n \in S'$ y $P_s(y) = 2$ si $s \notin S'$. claramente $y \in A_2$.
Afirmación 2.2.4: $y \in \overline{U}$.
En efecto, sea V un abierto básico que contiene a y entonces $V = \prod_{s \in S} W_s$ donde $W_s = I\!N$ para todo $s \in S \setminus S^*$ donde $S^* \subset S$ es finito y W_s es un abierto de $I\!N$ que contiene a $P_s(y)$ si $s \in S^*$. Obsérvese que existe $k \in I\!N$ tal que $S^* \subseteq \{s_1, s_2, ..., s_k\}$, por lo que $\{y_{k+1}, y_{k+2}, ...\} \subset V$. Por lo tanto $y \in \overline{U}$. Así $\overline{U} \cap A_2 \neq \emptyset$, con lo que se concluye que $I\!N^{\aleph_1}$ no es normal. ∎

Ejemplo 3 *(DIEUDONNE [1939])*
El producto de un espacio normal y un espacio compacto no necesariamente es normal: el producto $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ *no es normal.*

DEMOSTRACION:

Recordemos que ω_1 es el primer ordinal no numerable y que todo espacio línealmente ordenado, con la topología del orden, es normal; por lo tanto

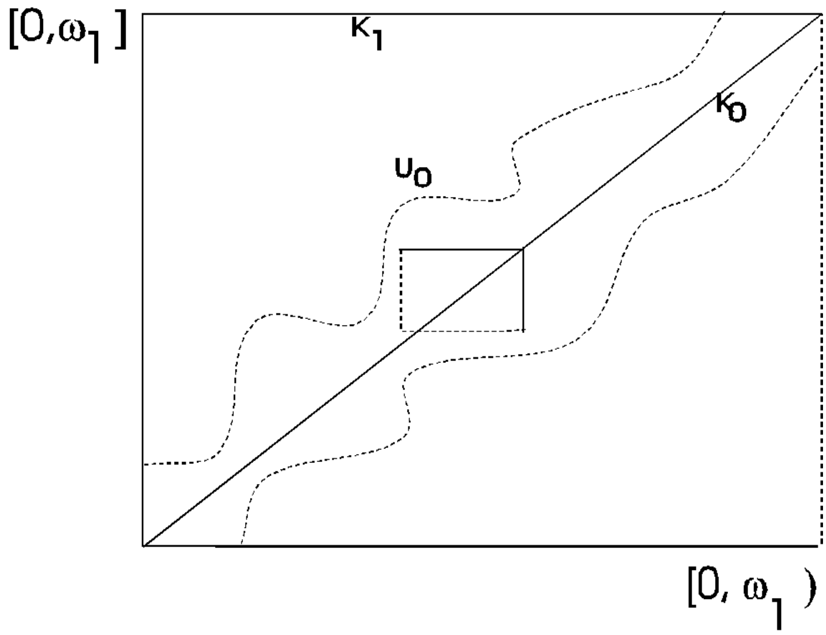

Figura 2.2: El plano $[0,\omega_1) \times [0,\omega_1]$

$[0,\omega_1)$ es normal.
Afirmación 2.3.1: $[0,\omega_1]$ es compacto

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0,\omega_1]$; sea α_1 el elemento más pequeño de $[0,\omega_1]$ tal que $(\alpha_1,\omega_1]$ está contenido en algún elemento $U_1 \in \mathcal{U}$. Si $\alpha_1 \neq 0$; sea α_2 el elemento más pequeño de $[0,\omega_1]$ tal que $(\alpha_2,\alpha_1]$ está contenido en algún elemento $U_2 \in \mathcal{U}$. Continuando con este proceso obtenemos que para alguna n, $\alpha_n = 0$, pues en otro caso, podríamos tener una sucesión $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ lo cual contradice el buen orden de $[0,\omega_1]$. Entonces $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$ que cubre a $[0,\omega_1]$ excepto posiblemente, al 0. Por lo que una subcolección de $(n+1)$-elementos de $\mathcal{U}$ cubren a $[0,\omega_1]$ y por lo tanto $[0,\omega_1]$ es compacto.
Afirmación 2.3.2: $[0,\omega_1) \times [0,\omega_1]$ no es normal.
Consideremos

$$K_0 = \{(\alpha,\alpha) : \alpha < \omega_1\} \quad y \quad K_1 = \{(\alpha,\omega_1) : \alpha < \omega_1\}.$$

Claramente los conjuntos K_0 y K_1 son ajenos (véase la figura 2.2).
Afirmación 2.3.2.1: K_0 y K_1 son cerrados.

Probaremos que K_1 es cerrado; para esto consideremos $p \notin K_1$ entonces

$p = (\alpha, \beta)$ donde $\alpha, \beta < \omega_1$ entonces existen $a_1, a_2, b_1, b_2 < \omega_1$ tales que $\alpha \in (a_1, a_2) \subset [0, \omega_1)$ y $\beta \in (b_1, b_2) \subset [0, \omega_1)$ tal que $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ es un abierto de $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ que contiene a p y no intersecta a K_1, por lo tanto se concluye que K_1 es cerrado. Dado que K_0 es una diagonal y los espacios son Hausdorff se tiene K_0 cerrado.

Ahora supóngase que U_0 y U_1 son subconjuntos abiertos de $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ tales que $K_0 \subset U_0$ y $K_1 \subset U_1$.
Para cada $\alpha < \omega_1$, $(\alpha, \alpha) \in K_0 \subset U_0$. Como U_0 es abierto existe un elemento $f(\alpha) \in \alpha$ tal que $(f(\alpha), \alpha] \times (f(\alpha), \alpha] \subset U_0$ entonces por el lema de ALEXANDROFF - URYSOHN (veáse la sección 1.8) existe un $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $f(\alpha) = \alpha_0$ para una cantidad no numerable de α en ω_1. Entonces el punto $(\alpha_0 + 1, \omega_1)$ está en la cerradura de U_0, y dado que está en K_1 obtenemos que U_0 y U_1 no son ajenos. Con lo que concluimos que $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ no es normal. ∎

Lema 2.0.3
Sea X un espacio topológico y sea $B \subset X$ tal que $X \setminus B$ es numerable, si $n \in \mathbb{N}$ entonces $X^n \setminus B^n$ es la unión de una cantidad numerable de subconjuntos, cada uno de los cuales es un retracto de X^n y es homeomorfo a X^{n-1}.

DEMOSTRACION:
Para cada $i \leq n$ y cada $a \in X \setminus B$ sea

$$Z_{i,a} = \{x \in X^n : x_i = a\}.$$

Entonces claramente tenemos que hay una cantidad numerable de tales $Z_{i.a}$, así como también es claro que cada $Z_{i,a}$ es homeomorfo a X^{n-1} y que son retractos de X^n. Obsérvese que

$$X^n \setminus B^n = \bigcup Z_{i,a}$$

donde $i = 1, 2, ...n$, y $a \in X \setminus B$. ∎

Lema 2.0.4
Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva. Sea $\mathcal{W} = \{W_s : s \in S\}$ una colección localmente finita de subconjuntos en Y, entonces $\{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{W}\}$ es localmente finita en X.

DEMOSTRACION:
Sea $x \in X^n$. Entonces existe un abierto A en Y tal que $f(y) \in A$ y

$$| \{s \in S : A \cap W_s \neq \emptyset\} | < \aleph_0.$$

Definimos $C = f^{-1}(A)$ entonces C es un abierto que contiene a x, y si $C \cap f^{-1}(W_s) \neq \emptyset$ entonces $f(C \cap f^{-1}(W_s)) \neq \emptyset$; por lo que

$$\emptyset \neq f(C \cap f^{-1}(W_s)) \subset f(f^{-1}(W_s)) \cap f(C) \subseteq W_s \cap A.$$

Es decir

$$|\{s \in S : f^{-1}(W_s) \cap C \neq \emptyset\}| < \aleph_0.$$

Con lo que se concluye la afirmación. ■

Teorema 2.0.1
Si X es un espacio T_3 con a lo más una cantidad numerable de puntos no aislados, entonces X^n es paracompacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION: (por inducción)

Denotemos al conjunto de puntos aislados de X por B.
Probaremos el resultado para $n = 1$.
Con este fin, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como $X \setminus B$ es numerable podemos suponer que $X \setminus B = \{x_n : n < \omega\}$, entonces sea $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $x_n \in U_n$ esto para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea $\mathcal{U}_n = \{U_n\}$ y sea

$$\mathcal{U}_0 = \{\{x\} : x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\}.$$

Entonces

$$\mathcal{U}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$$

es un refinamiento abierto σ - localmente finito de $\mathcal{U}$. Por el teorema 1.5.1, X es paracompacto.

Ahora supongamos que X^{n-1} es paracompacto y probaremos que X^n es paracompacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de X^n.
Afirmación: $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.

Por el lema 2.0.3 existen retractos Z_j (con $j \in \mathbb{N}$) de X^n los cuales son homeomorfos a X^{n-1} satisfaciendo

$$X^n \setminus B^n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_j$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $r_j : X^n \longrightarrow Z_j$ una retracción (esto es, r_j es continua y deja fijos a los elementos de Z_j).
Por nuestra hipótesis inductiva cada Z_j es paracompacto, y para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_j = \{U_\lambda \cap Z_j : \lambda \in \Lambda\}$ es una cubierta abierta de Z_j.

Para $j \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{V}_j = \{V_s : s \in S_j\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}_j$. Ahora para cada $s \in S_j$ existe $\lambda(s) \in \Lambda$ tal que $V_s \subset U_{\lambda(s)}$. Tomemos $W_s = r_j^{-1}(V_s) \cap U_{\lambda(s)}$. Por el lema anterior tenemos que

$$\{r_j^{-1}(V_s) : V_s \in \mathcal{V}_j\}$$

es una colección localmente finita en X^n.

Así que $\mathcal{W}_j = \{W_s : s \in S\}$ es una colección localmente finita de subconjuntos abiertos en X^n.

Ahora sean

$$\mathcal{W}' = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{W}_j, \quad y$$

$$\mathcal{W}_0 = \{\{x\} : x \notin \bigcup \mathcal{W}'\}.$$

Entonces

$$\mathcal{W} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{W}_j$$

es una cubierta abierta de X^n σ - localmente finita que refina a $\mathcal{U}$.

Dado que X es T_3, X^n es paracompacto, con lo que completamos la demostración. ■

Ejemplo 4 *(MICHAEL [1963])*
El producto de un espacio normal y un espacio métrico puede ser no normal. Más aún, existe un espacio paracompacto X tal que el producto $X \times \mathbb{P}$, en donde $\mathbb{P}$ es el espacio de irracionales con la topología Euclidiana,no es normal.

DEMOSTRACION:

Sea X la línea real $\mathbb{R}$ con la siguiente topología τ:
$A \in \tau \iff A = U \cup V$ donde U es un abierto usual y V es una colección (posiblemente vacía) de irracionales.
Al espacio (X, τ) se le conoce como la línea de Michael. Por el teorema 2.0.1 se tiene que (X, τ) es paracompacto.
Afirmación 2.4.1: $X \times \mathbb{P}$ no es paracompacto, donde $\mathbb{P}$ tiene la topología usual.
Como un espacio paracompacto es normal basta con demostrar:
Afirmación 2.4.2: $X \times \mathbb{P}$ no es normal.

Consideremos los conjuntos cerrados y ajenos dados como sigue.

$$A = \{(x, x) \in X \times \mathbb{P} : x \in \mathbb{P}\}$$

y

$$B = \{(x, y) \in X \times \mathbb{P} : x \in \mathbb{Q}\}$$

en otras palabras $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$.
Afirmación 2.4.2.1: Para todo abierto $U \subset X \times \mathbb{P}$ que contiene a A se tiene que $B \cap \overline{U} \neq \emptyset$.

Como $\mathbb{R}$ es segundo numerable tenemos que $\mathbb{P}$ es separable; entonces podemos encontrar un conjunto denso numerable en $\mathbb{P}$, digamos

$$\{p_n : n < \omega\} \subset \mathbb{P}.$$

Como $A \subset U$, para todo $y \in \mathbb{P}$ existe una vecindad Euclidiana $U_y \subset \mathbb{P}$ del punto y tal que $\{y\} \times U_y \subset U$, y existe un número natural $i(y)$ el cual satisface que $p_{i(y)} \in U_y$. Ahora sea $P_i = \{y \in \mathbb{P} : i(y) = i\}$ para $i = 1, 2, ...$ Obsérvese que $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$. Por el teorema de la categoría de Baire, tenemos que $\mathbb{P}$ no es un F_σ en $\mathbb{R}$, esto es, no es una unión numerable de cerrados, por lo cual podemos concluir que existe un número natural i_0 y un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_0 \in \overline{P_{i_0}}$, donde la barra denota la cerradura en $\mathbb{R}$. Claramente $(q_0, p_{i_0}) \in B$. Sea $V \times W$ una vecindad de (q_0, p_{i_0}) en $X \times \mathbb{P}$. Dado que $q_0 \in \overline{P}_{i_0}$ tenemos entonces que $V \cap P_{i_0} \neq \emptyset$, es decir, existe un $y \in V \cap P_{i_0}$. Como $i(y) = i_0$, $p_{i_0} \in U_y$ lo cual implica que $(y, p_{i_0}) \in U$. Además obviamente $(y, p_{i_0}) \in V \times W$; por tanto, toda vecindad del punto $(q_0, p_{i_0}) \in B$ intersecta a U. Esto quiere decir que $B \cap \overline{U} \neq \emptyset$. ∎

Consideremos ahora el siguiente problema.

1) ¿Existe un espacio Y tal que Y^n es paracompacto $\forall n \in \mathbb{N}$ pero Y^ω no es normal?

Para contestar esta pregunta nos ayudaremos del teorema 2.0.1 y de la siguiente proposición.

Proposición 2.0.1
Si X es un espacio para el cual X^ω es normal, entonces $X \times \mathbb{P}$ es normal.

DEMOSTRACION:

Si X es numerablemente compacto, entonces $X \times \mathbb{P}$ es normal por un resultado probado en [4] por J. Diudonne el cual asegura que el producto de un espacio numerablemente compacto y normal y un espacio métrico siempre es normal.

Si X no es numerablemente compacto, entonces X tiene un subconjunto cerrado homeomorfo a $\mathbb{N}$ lo cual implica que X^ω tiene un subconjunto homeomorfo a $\mathbb{N}^\omega$ que es homeomorfo a $\mathbb{P}$. Pero X^ω es a su vez homeomorfo a $X \times X^\omega$ por lo que X^ω tiene un subconjunto cerrado homeomorfo a $X \times \mathbb{P}$, lo cual implica que $X \times \mathbb{P}$ es normal. Con lo que completamos la demostración. ∎

Ahora consideremos $Y = I\!R^*$ donde $I\!R^*$ denota la línea de Michael. En el ejemplo 4 probamos que $Y \times I\!P$ no es normal. Y dado que el conjunto de puntos aislados en Y es numerable, ya que coincide con $\mathbb{Q}$. Aplicando tanto la proposición anterior como el teorema 2.0.1 a $Y = I\!R^*$ obtenemos una respuesta afirmativa a la pregunta 1. Es decir,

$(I\!R^*)^n$ *es paracompacto para toda* $n \in I\!N$ *y* $(I\!R^*)^\omega$ *no es normal*

Unas preguntas aún más fuertes que la anterior son las siguientes.

2) ¿Existe un espacio regular Y tal que para toda $n \in I\!N$ Y^n es de Lindelöf pero Y^ω no es normal?.

3) ¿Para toda $n \in I\!N$ existe un espacio regular Y tal que Y^n es de Lindelöf y Y^{n+1} es paracompacto pero Y^{n+1} no es de Lindelöf?.

La respuesta a estas preguntas es afirmativa. Su solución puede verse en los articulos [12] o [14]. Cabe hacer mención que ambas soluciones dependen directamente de la hipótesis del continuo.

Ejemplo 5

El producto de dos espacios compactos y hereditariamente normales (aún más, compactos y hereditariamente de Lindelöf, véase (b) de este ejemplo) no tiene por que ser hereditariamente normal

a) El espacio producto $I \times [0, \omega_1]$ *no es hereditariamente normal*

b) El cuadrado de la doble flecha no es hereditariamente normal

DEMOSTRACION:

a)(TYCHONOFF [1930])

Consideremos en el espacio producto $I \times [0, \omega_1]$ el subespacio $X = (I \times [0, \omega_1]) \setminus \{(0, \omega_1)\}$.

Afirmación: X no es normal.

Consideremos los subconjuntos $K = (0, 1] \times \{\omega_1\}$ y $L = \{0\} \times \omega_1$. K y L son claramente ajenos y cerrados en X (véase la figura 2.3).

Ahora bien sea U un abierto en X que contiene a L. Como U es abierto, entonces para toda $\alpha < \omega_1$ existe un $n(\alpha) < \omega$ tal que $[0, 1/n(\alpha)) \times \{\alpha\} \subset U$ entonces por el lema de ALEXANDROFF - URYSOHN existe un subconjunto cofinal $T \subset \omega_1$ y una $n < \omega$ con $n(\alpha) = n$ para toda $\alpha \in T$, entonces $(1/2n, \omega_1) \in \overline{U} \cap K$ por lo que X no es normal.

b)(ALEXANDROFF y URYSOHN [1929])

Sea $X = I \times \{0, 1\}$ con la siguiente topología:

Todo punto del tipo $(t, 0)$ tiene una base de vecindades de la forma

$$\{[t, t + 1/n) \times \{0\} \cup (t, t + 1/n) \times \{1\} : n \in I\!N\},$$

y todo punto del tipo $(t, 1)$ tiene una base de vecindades de la forma

$$\{(t - 1/n, t) \times \{0\} \cup (t - 1/n, t] \times \{1\} : n \in I\!N\}.$$

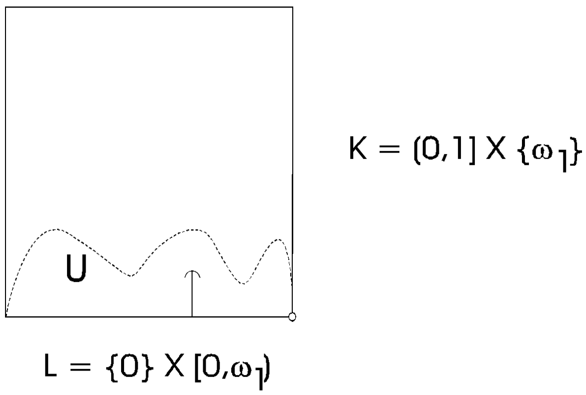

Figura 2.3: El plano $I \times [0, \omega_1]$

(véase la figura 2.4).

Es posible demostrar que X es compacto (véase [2] pags. 129-130, 173) y dado que los subespacios $(0,1) \times \{0\}$ y $(0,1) \times \{1\}$ son homeomorfos a la recta de Sorgenfrey (véase [2] pags. 129-130, 173), tenemos que X es hereditariamente de Lindelöf (véase el Teorema 1.3.5) y $X \times X$ no es hereditariamente normal (véase el Ejemplo 1). $\blacksquare$

Ejemplo 6 *(VAUGHAN [1975])*
Existe un espacio X tal que X^n es hereditariamente paracompacto $\forall n \in I\!N$ pero X^ω no es normal.

DEMOSTRACION:

Sea $D^*(\omega_1)$ el conjunto $\overline{\omega_1}$ en el cual todos los puntos α ω_1 son aislados y las vecindades basicas del punto ω_1 tienen la forma $(\alpha, \omega_1]$ donde $\alpha < \omega_1$.

Sea $X = \Box(D^*(\omega_1))^\omega$ el producto caja de una cantidad numerable de copias de $D^*(\omega_1)$.

Obsérvese que X es homeomorfo con cualquier potencia finita de sí mismo, esto es

$$X = \Box(D^*(\omega_1))^\omega \cong (\Box(D^*(\omega_1))^\omega)^n = X^n.$$

Antes de pasar a la prueba estableceremos una notación que nos facilitará la escritura de la demostración.

Denotemos por $(D(\omega_1))^\omega$ al producto numerable de copias de $D(\omega_1) = [0, \omega_1)$ con la topología producto, donde $D(\omega_1)$ se considera con la topología discreta.

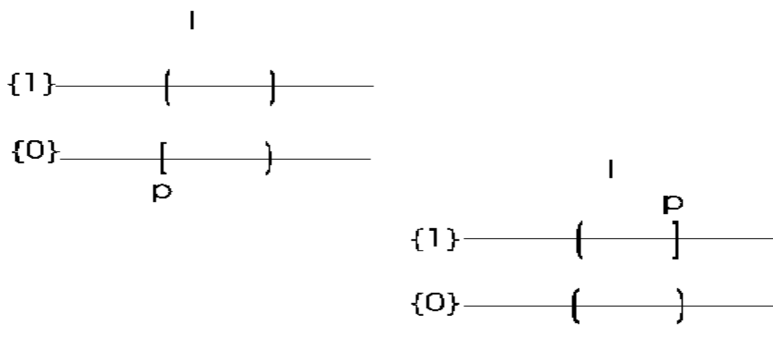

Figura 2.4: básicos de la doble flecha

Para cada $x = (x_i) \in (D(\omega_1))^\omega$ y para cada $n \in I\!N$ sea

$$n(x) = \bigcap_{i=0}^{n} \pi_i^{-1}(x_i),$$

así $\{n(x) : n \in I\!N\}$ es un sistema de vecindades para $x \in (D(\omega_1))^\omega$.

Para cada $q = (q_i) \in X \setminus (D(\omega_1))^\omega$ y cada $\alpha < \omega_1$ sea

$$\alpha(q) = [\bigcap \{\pi_i^{-1}(q_i) : q_i < \omega_1\}] \cap [\bigcap \{\pi_i^{-1}((\alpha, \omega_1]) : q_i = \omega_1\}].$$

Dado que q tiene sólo una cantidad numerable de coordenadas, $\{\alpha(q) : \alpha < \omega_1\}$ es un sistema de vecindades de q tal que $\alpha < \beta < \omega_1$ implica que $\beta(q) \subset \alpha(q)$.

Se tiene que X es hereditariamente paracompacto (véase [22]) y como consecuencia X^n es hereditariamente paracompacto para todo $n \in I\!N$.

Ahora mostraremos que X^ω no es normal.

Obsérvese que esto se sigue directamente de mostrar que $X \times (D(\omega_1))^\omega$ no es normal. Ya que X contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $D(\omega_1)$ y entonces X^ω contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $(D(\omega_1))^\omega$. Dado que X^ω es homeomorfo a $X^\omega \times X$, tenemos que $X \times (D(\omega_1))^\omega$ tiene una copia cerrada en X^ω. Como este subespacio no es normal concluimos que X^ω no es normal.

Afirmación 2.6.1: $X \times (D(\omega_1))^\omega$ no es normal.

Para ver esto mostraremos que existen dos subconjuntos cerrados ajenos en este espacio los cuales no pueden ser separados por conjuntos abiertos.

Sea
$$H = \{(x, x) \in X \times (D(\omega_1))^\omega : x \in (D(\omega_1))^\omega\}$$
y
$$K = (X \setminus (D(\omega_1))^\omega) \times (D(\omega_1))^\omega$$
Claramente se tiene que $H \cap K = \emptyset$.

Como $D(\omega_1)$ es abierto en $D^*(\omega_1)$ se tiene que $(D(\omega_1))^\omega$ es abierto en X entonces $X \setminus (D(\omega_1))^\omega$ es cerrado en X. Por lo tanto K es cerrado en $X \times (D(\omega_1))^\omega$.

Obsérveseque también H es cerrado ya que es la diagonal de dos espacios Hausdorff.

Ahora sea V cualquier conjunto abierto que contiene a K. Para poder completar la prueba mostraremos que $\overline{V} \cap H \neq \emptyset$, por lo que necesitamos exhibir un punto $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...) \in (D(\omega_1))^\omega$ tal que $(x, x) \in \overline{V} \cap H$.

Sea $p_0 = (0, 0, ...)$ y $q_0 = (\omega_1, \omega_1, ...)$, dado que $(q_0, p_0) \in K \subset V$, existe un entero positivo m_0 y un ordinal $\alpha_0 < \omega_1$ tal que el conjunto abierto $\alpha_0(q_0) \times m_0(p_0) \subset V$.

Sea x_0 un ordinal tal que $\alpha_0 < x_0 < \omega_1$ definamos $p_1 = (x_0, 0, ...)$ y $q_1 = (x_0, \omega_1, \omega_1, ...)$ dado que $(q_1, p_1) \in K$ existe $(\alpha_1, m_1) \in \omega_1 \times \omega$ tal que $\alpha_1(q_1) \times m_1(p_1) \subset V$, escojamos x_1 un ordinal numerable tal que $x_1 > max\{\alpha_1, x_0\}$, siguiendo con este proceso en el paso k - ésimo tendríamos construidos $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$. Ahora sea $p_k = (x_0, x_1, ..., x_{k-1}, 0, 0, ...)$ y $q_k = (x_0, x_1, ..., x_{k-1}, \omega_1, \omega_1, ...)$ dado que $(q_k, p_k) \in K \subset V$ existe $(\alpha_k, m_k) \in \omega_1 \times \omega$ tal que $\alpha_k(q_k) \times m_k(p_k) \subset V$, tomamos un ordinal x_k numerable tal que $x_k > max\{\alpha_k, x_{k-1}\}$ ahora por inducción matemática podemos construir un punto $x = (x_0, x_1, ...)$, nótese que $(x, x) \in H$.

Afirmación 2.6.2: $(x, x) \in \overline{V}$.

Sea $k < \omega$ entonces $\{x\} \times k(x)$ es una vecindad básica arbitraria de (x, x).

Mostraremos que
$$[\{x\} \times k(x)] \cap [\alpha_{k+1}(q_{k+1}) \times n_{k+1}(p_{k+1})] \neq \emptyset.$$

Claramente $p_{k+1} \in k(x)$ dado que para toda $0 \leq n \leq k$ la n-ésima coordenada de x y p_{k+1} es la misma. Ahora notemos que $x \in \alpha_{k+1}(q_{k+1})$ para toda $0 \leq n \leq k$ la n-ésima coordenada de x y q_{k+1} es la misma y para las otras coordenadas tenemos que $\alpha_{k+1} < x_{k+1} < x_{k+2} < ...$ esto muestra que el punto
$$(x, p_{k+1}) \in [\{x\} \times k(x)] \cap [\alpha_{k+1}(q_{k+1}) \times n_{k+1}(p_{k+1})]$$

entonces toda vecindad de (x,x) intersecta a V, así $(x,x) \in \overline{V} \cap H$ con lo que completamos la demostración. $\blacksquare$

Una respuesta alternativa al ejemplo 6 (la cual es una aportación de este trabajo) es la siguiente. Queremos encontrar un espacio Y tal que Y^n es hereditariamente paracompacto para toda $n \in \mathbb{N}$ pero que Y^ω no es normal.

Consideremos un espacio regular hereditariamente paracompacto X con topología τ. Sea $M \subset X$ un subconjunto numerable, definamos $X_M = X$ con la siguiente topología

$$\tau_M = \{A \cup B : A \in \tau, \quad B \subset X \setminus M\}$$

Teorema 2.0.2
X_M es paracompacto. Más aún es hereditariamente paracompacto.

DEMOSTRACION:

Primero demostraremos la paracompacidad de X_M.
Para tal fin consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X_M. Sea $x \in M$ entonces existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$, por tanto $U_x = A_x \cup B_x$ donde $A_x \in \tau$ y $B_x \subset X \setminus M$. Sea $Y = \bigcup_{x \in M} A_x$; entonces Y es un subespacio de X y $\{A_x\}_{x \in M}$ es una cubierta de Y. Como X es hereditariamente paracompacto, obtenemos que Y es paracompacto. Por tanto existe un refinamiento abierto localmente finito digamos $\mathcal{V}$. Ahora si consideramos

$$\mathcal{W} = \{\{x\} : x \notin \bigcup \mathcal{V}\}$$

obtenemos que $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$, y por lo tanto X_M es paracompacto.

Para probar que X_M es hereditariamente paracompacto, analizaremos como son los elementos de la topología de cualquier subespacio Y de X_M.

$$\tau_{M_Y} = \{Y \cap (A \cup B) : A \in \tau \quad B \subset X \setminus M\}$$

$$= \{(Y \cap A) \cup (Y \cap B) : A \in \tau \quad B \subset X \setminus M\}$$

$$= \{C \cup D : C \in \tau_Y \quad D \subset X \setminus M'\} = \tau_{Y_{M'}}.$$

donde $M' = Y \cap M$. Por lo tanto haciendo una prueba análoga a la que se hizo en la primera parte, se muestra que Y es paracompacto. Con lo cual X_M es hereditariamente paracompacto. $\blacksquare$

Por el teorema 2.0.1 X_M^n es paracompacto. También imitando la demostración del mismo teorema, se prueba que X_M^n es hereditariamente paracompacto para toda $n \in I\!N$. Obsérvese que la línea de Michael es un espacio de la forma X_M donde $X = I\!R$ y $M = \mathbb{Q}$. Por lo tanto aplicando la proposición 2.0.1 a X_M como la recta de Michael concluimos que X_M^ω no es normal. Y así terminamos la respuesta alternativa al ejemplo 6.

Teorema 1 *(POSPISIL [1937])*
El producto de una cantidad no numerable de espacios que contienen almenos dos elementos nunca es hereditarianente normal

DEMOSTRACION:
Sea $Z = \prod_{s \in S} X_s$ donde $\mid S \mid \geq \omega_1$ y $\mid X_s \mid > 1$ para todo $s \in S$, sea Y_s un subespacio de dos puntos de X_s, y sea $\{S_t : t \in S\}$ una descomposición de S en $\mid S \mid$ conjuntos ajenos de tal manera que $\mid S_t \mid = \omega$. Ahora para todo $t \in S$ consideremos el espacio $C_t = \prod_{s \in S_t} Y_s$. Entonces C_t es homeomorfo al conjunto de Cantor y C_t contiene un subespacio $I\!N_t$ homeomorfo a $I\!N$. Aplicando lo visto en el ejemplo 2 de Stone obtenemos que $\prod_{t \in S} I\!N_t$ no es normal, y como tenemos que

$$\prod_{t \in S} I\!N_t \subset \prod_{t \in S} C_t = \prod_{s \in S} Y_s \subset \prod_{s \in S} X_s$$

se concluye el teorema. ∎

En el ejemplo 3 dado por Diudonne vimos que el producto de un espacio normal y un espacio compacto no necesariamente resulta ser normal. Es aquí donde uno se pregunta qué sucede si el factor compacto fuese el intervalo $I = [0, 1]$. Por tanto la pregunta natural sería.

4) ¿Existe un espacio normal X cuyo producto con el intervalo I no sea normal.?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y fue dada por Mary E. Rudin [1971] en [15]. Los espacios con esta propiedad son conocidos como espacios de DOWKER. En esta tesis sólo se dará un bosquejo de la prueba para dar despues paso a nuestro siguiente capítulo donde se estudia el producto de espacios normales con un factor compacto y en particular con el intervalo $I = [0, 1]$

Procedamos a definir X .
Sea
$$F = \{f : I\!N \longrightarrow \omega_\omega : f(n) \leq \omega_n \ \ \forall n \in I\!N\}.$$
Sea
$$X = \{f \in F : \exists \ \ i \in I\!N \ \ tal \ \ que \ \ \omega_0 < cf(f(n)) < \omega_i \ \ \forall n \in I\!N\}.$$
Supóngase que $f, g \in F$.
Si $f(n) < g(n)$ para todo $n \in I\!N$ diremos que $f < g$;

si $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \in I\!N$ diremos que $f \leq g$;
si $i \in I\!N$ y $f(n) < g(n)$ para todo $n \geq i$ diremos que $f <_i g$.
Definamos

$$U_{f,g} = \{h \in X : f < h \leq g\}$$

los conjuntos $U_{f,g}$ con $f, g \in F$ son una base para una topología para X. Este espacio así definido es de Hausdorff.
Para probar que $X \times I$ no es normal se prueba que existe una sucesión $D_1 \supset D_2 \supset ...$ de conjuntos cerrados en X tales que $\bigcap_{n\in I\!N} D_n = \emptyset$ pero que $\bigcap_{n\in I\!N} U_n \neq \emptyset$ siempre que se tome una colección de abiertos $\{U_n : n \in I\!N\}$ tal que $D_n \subset U_n$ para toda n. Así como se puede ver en [5] o en [7] (pags. 316-319) $X \times \{0\}$ no puede ser separado de $\bigcup_{n\in I\!N}(D_n \times \{1/n\})$ en $X \times I$, por lo que se concluye que $X \times I$ no es normal.

Los conjuntos D_n son dados como sigue:

$$D_n = \{f \in X : \exists \;\; i \geq n \;\; tal \;\; que \;\; f(i) = \omega_i\}$$

para todo $n \in I\!N$.

Obsérvese que $\bigcap_{n\in I\!N} D_n = \emptyset$ y que D_n es cerrado, pues supóngase que $f \in X \setminus D_n$ entonces $\{g \in X : g \leq f\}$ es abierto y no intersecta a D_n. En el artículo [15] de Rudin se afirma que $\bigcap_{n\in I\!N} U_n \neq \emptyset$ donde cada U_n es un abierto en X que contiene a D_n. En el mismo artículo se prueba que X es normal. ■

CAPITULO 3

PRODUCTOS CON UN FACTOR COMPACTO

En este capítulo estudiaremos productos de la forma $X \times C$ donde C es un espacio compacto.
En 1973, M. E. Rudin (véase [16], [17]) da una caracterización en terminos de X-sepación, de cuando un producto de espacios normales con un factor compacto es normal. Desgraciadamente la prueba es muy larga y complicada, incitando a Przymusiński, a preguntar por una prueba más simple del teorema de Rudin (Problema 10, [14]). En 1993, Amer Bešlagić (véase [3]) da una ligera modificación del teorema de Rudin, Mostrando también como se usa la tecnica para demostrar otros resultados que involucran productos con un factor compacto, y que también son demostrados en esta tesis. Es importante señalar que Przymusiński en [14] da otra caracterización en terminos de $\mathfrak{B}$-cubiertas, de cuando un producto de espacios normales con un factor compacto es normal , donde $\mathfrak{B}$ es una base del compacto. Cabe hacer mención que esta caracterización es la presentada en este trabajo, así como también la tecnica usada por Przymusiński para demostrar otros resultados que involucran productos con un factor compacto.

Mientras no se diga lo contrario en lo sucesivo C denotará un espacio compacto y $\mathfrak{B}$ una base de C cerrada con respecto a uniones finitas e intersecciones finitas.

3.1 TEOREMA DE CARACTERIZACION

Definición 3.1.1
Sean $\mathfrak{B}$ una base de un espacio compacto C y τ la topología de un espacio

X. Sea $H \subseteq \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ el conjunto

$$H = \{(B, D) : B, D \in \mathfrak{B} \quad y \quad \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$$

y consideremos $G : H \longrightarrow \tau$ una función. Diremos que

$$\mathfrak{G} = \{G(B, D) : (B, D) \in H\}$$

es una $\mathfrak{B}$-cubierta de X si $\mathfrak{G}$ es cubierta y

$$G(B, D) \cap G(B', D') = G(B \cap B', D \cap D') \;\; \forall \;\; (B, D), (B', D') \in H$$

Obsérvese que si $B' \subset B$ y $D' \subset D$ entonces $G(B', D') \subset G(B, D)$.

En el siguiente teorema se da una caracterización completa de la normalidad de productos con un factor compacto.

Teorema 3.1.1 *(TEOREMA DE CARACTERIZACION)*
sea $\mathfrak{B}$ una base de un espacio compacto C, el espacio producto $X \times C$ es normal si y sólo si X es normal y cualquier $\mathfrak{B}$-cubierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

DEMOSTRACION:

$\Leftarrow$) Sean K y L subconjuntos cerrados de $X \times C$ tales que $K \cap L = \emptyset$ sean $B, D \in \mathfrak{B}$ con $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset$.

Definamos

$$G(B, D) = \{x \in X : K_x \subset B \;\; y \;\; L_x \subset D\}$$

donde

$$K_x = \{y \in C : (x, y) \in K\}$$

y

$$L_x = \{y \in C : (x, y) \in L\}$$

Afirmación : $\mathfrak{G}$=$\{G(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}$ y $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$ es una $\mathfrak{B}$-cubierta de X .

Para esto obsérvese que dados $B, B', D, D' \in \mathfrak{B}$ tales que $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset$ y $\overline{B'} \cap \overline{D'} = \emptyset$ se tiene

$$G(B \cap B', D \cap D') = \{x \in X : K_x \subset B \cap B' \;\; y \;\; L_x \subset D \cap D'\}$$

y

$$G(B, D) \cap G(B', D') =$$

$$\{x \in X : K_x \subset B \;\; y \;\; L_x \subset D\} \cap \{x \in X : K_x \subset B' \;\; y \;\; L_x \subset D'\}$$

Ahora probaremos que $\mathfrak{G}$ cubre a X, sea $x \in X$, consideremos

$$K_x = \{y \in C : (x, y) \in K\}$$

y

$$L_x = \{y \in C : (x, y) \in L\}$$

dado que K y L son cerrados ajenos entonces K_x y L_x son cerrados ajenos en C y como este es compacto se tiene que K_x y L_x también son compactos. Para cada $y \in K_x$ consideremos B_y un abierto básico que contenga a y tal que $\overline{B_y} \cap L_x = \emptyset$, entonces $\{B_y : y \in K_x\}$ es una cubierta abierta de K_x, por tanto existen $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset K_x$ tal que $\{B_{y_1}, B_{y_2}, ..., B_{y_n}\}$ cubre a K_x, y como $\mathfrak{B}$ es cerrada bajo uniones finitas entonces

$$B = B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup ... \cup B_{y_n}$$

es un abierto básico que contiene a K_x. Ahora para cada $y \in L_x$ consideremos un abierto básico que contenga a y tal que $\overline{D}_y \cap \overline{B} = \emptyset$ como L_x es compacto existen $\{y_1, y_2, ..., y_r\} \subset L_x$ tal que $\{D_{y_1}, D_{y_2}, ..., D_{y_r}\}$ cubre a L_x, haciendo

$$D = D_{y_1} \cup D_{y_2} \cup ... \cup D_{y_r}$$

obtenemos un básico que contiene a L_x y es tal que $\overline{D} \cap \overline{B} = \emptyset$, por lo tanto $x \in G(B, D)$ como se queria probar. por lo tanto se tiene que $\mathfrak{G}$ es una $\mathfrak{B}$-cubierta.

Ahora sea $\mathfrak{V}$=$\{V(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$ una cubierta abierta localmente finita de X tal que $V(B, D) \subset G(B, D)$. Por la normalidad de X existe una cubierta cerrada $\{F(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$ de X tal que $F(B, D) \subset V(B, D)$ por la misma normalidad existen funciones continuas $f_{B,D} : X \longrightarrow I$ tales que

$$f_{B,D}(F(B, D)) \subset \{1\}$$

y

$$f_{B,D}(X \setminus (V(B, D))) \subset \{0\}.$$

Ahora por la normalidad de C tenemos que existen funciones continuas $g_{B,D} : C \longrightarrow I$ tales que $g_{B,D}(\overline{B}) \subset \{0\}$ y $g_{B,D}(\overline{D}) \subset \{1\}$. Definamos $h : X \times C \longrightarrow I\!R$ como sigue:
$h(x, y) = \sum\{f_{B,D}(x) \times g_{B,D}(y) : B, D \in \mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$.
Dado que la familia $\mathfrak{V}$ es localmente finita, se tiene que h es continua. Ahora sea $(x, y) \in X \times C$, como $\mathfrak{V}$ es localmente finita tenemos que x esta en a lo más una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{V}$, supongamos que tales elementos son $V(B_1, D_1), V(B_2, D_2), ..., V(B_n, D_n)$, entonces

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} V(B_i, D_i)$$

por lo tanto

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} G(B_i, D_i).$$

Dado que $K_x \subset B_i$ y $L_x \subset D_i$ para toda $i = 1, 2, ..., n$ obtenemos que
-Si $(x, y) \in K$ entonces $y \in B_i$ por lo tanto $g_{B_i,D_i}(y) = 0$.
-Si $(x, y) \in L$ entonces $y \in D_i$ por lo tanto $g_{B_i,D_i}(y) = 1$.
Y puesto que $f_{B_i,D_i}(x) \neq 0$ para $i = 1, 2, ..., n$ obtenemos que $h(K) \subset \{0\}$ y $h(L) \subset [1, \infty)$ con lo cual se prueba la normalidad de $X \times C$.

$\Rightarrow$ Supóngase que $\mathfrak{G}$=$\{G(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$ es una $\mathfrak{B}$-cubierta de X .
Definamos
$K = X \times C \setminus \bigcup\{G(B, D) \times (C \setminus \overline{B}) : B, D \in\mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$
$L = X \times C \setminus \bigcup\{G(B, D) \times (C \setminus \overline{D}) : B, D \in\mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$.
Es claro que K y L son cerrados en $X \times C$, ahora probaremos que son ajenos.
Afirmación: $K \cap L = \emptyset$.

Sea $(x, y) \in X \times C$ entonces existe $B, D \in \mathfrak{B}$ con $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset$ tal que $x \in G(B, D)$ y además $y \notin \overline{B}$ o $y \notin \overline{D}$ entonces $(x, y) \notin K$ o $(x, y) \notin L$.
Como $X \times C$ es normal existe una función continua $f : X \times C \longrightarrow I$ tal que $f(K) \subset \{0\}$ y $f(L) \subset \{1\}$.

Definamos una pseudométrica ρ en X como sigue.

$$\rho(x, x') = sup_{y \in C} \mid f(x, y) - f(x', y) \mid .$$

Obsérvese que ρ es continua, ya que es composición de funciones continuas y C es compacto.
Afirmación: $\mathfrak{G}$ tiene un refinamiento localmente finito.

Obsérvese que si para cada $x_0 \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ consideramos

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(X_0, X) < \varepsilon\} = \pi_2(\rho^{-1}[(-\varepsilon, \varepsilon)] \cap (\{x_0\} \times X))$$

donde $\pi_2 : X \times X \longrightarrow X$ es la segunda proyección, puesto que ρ es continua tenemos que $\rho^{-1}[(-\varepsilon, \varepsilon)]$ es abierto en $X \times X$, por tanto se tiene que $\rho^{-1}[(-\varepsilon, \varepsilon)] \cap (\{x_0\} \times X)$ es abierto en $\{x_0\} \times X$, es decir $B(x_0, \varepsilon)$ es abierto en $\{x_0\} \times X$ y dado que $\pi_2 : \{x_0\} \times X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo obtenemos que la topología inducida por ρ en X esta contenida en la topología de X. Por lo tanto para probar la afirmación es suficiente mostrar que la familia $\{B(x, 1/3) : x \in X\}$ de bolas abiertas en ρ de radio $1/3$ refina a $\mathfrak{G}$.

Fijemos $x_0 \in X$ dado que la base $\mathfrak{B}$ es cerrada bajo uniones finitas, podemos encontrar $B, D \in \mathfrak{B}$ tales que

$$\{y \in C : f(x_0, y) \leq 1/3\} \subset B,$$

$$\{y \in C : f(x_0, y) \geq 2/3\} \subset D$$

y

$$\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset.$$

Afirmación: $B(x_0, 1/3) \subset G(B, D)$.

Obsérvese que si $x \in B(x_0, 1/3)$ entonces $K_x \subset B$ y $L_x \subset D$ pues de lo contrario podría existir por ejemplo un punto $y \in K_x \setminus B$ y entonces $f(x, y) = 0$ $f(x_0, y) > 1/3$ y $\rho(x_0, x) < 1/3$ lo cual es imposible.

Afirmación: $x \in G(B, D)$.

Por la definicion de K y L tenemos que
$\{x\} \times (C \setminus B) \subset \bigcup\{G(B', D') \times (C \setminus \overline{B'}) : B', D' \in \mathfrak{B}\ y\ \ \overline{B'} \cap \overline{D'} = \emptyset\}$,
$\{x\} \times (C \setminus D) \subset \bigcup\{G(B'', D'') \times (C \setminus \overline{D''}) : B'', D'' \in \mathfrak{B}\ \ \ \overline{B''} \cap \overline{D''} = \emptyset\}$.
Entonces existen familias finitas

$$\{(B'_1, D'_1), ..., (B'_n, D'_n)\} \ \ y \ \ \{(B''_1, D''_1), ..., (B''_m, D''_m)\}$$

tales que

$$C \setminus B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (C \setminus \overline{B'_i}), \quad C \setminus D \subset \bigcup_{j=1}^{m} (C \setminus \overline{D'_j}),$$

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} G(B'_i, D'_i), \quad x \in \bigcap_{j=1}^{m} G(B''_j, D''_j)$$

entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} B'_i \subset B, \quad \bigcap_{j=1}^{m} D''_i \subset D$$

y

$$x \in G((\bigcap_{i=1}^{n}(B'_i) \cap \bigcap_{j=1}^{m}(B''_j)), (\bigcap_{i=1}^{n}(D'_i) \cap \bigcap_{j=1}^{m}(D''_j))) \subset G(B, D).$$

■

3.2 CONSECUENCIAS DEL TEOREMA

Como veremos a continuación muchos teoremas que involucran el producto por un factor compacto pueden ser deducidos a partir del teorema anterior. Dado que todo conjunto de números cardinales es bien ordenado. Se define el peso de un espacio X como el cardinal más pequeño de la forma $\mid \mathfrak{B} \mid$ donde $\mathfrak{B}$ es una base para la topología de X, denotaremos como es usual por $\omega(X)$ al peso de un espacio topológico X.

Corolario 3.2.1 *(MORITA [1961])*
Si X es normal y $\omega(C)$-paracompacto entonces $X \times C$ es normal.

DEMOSTRACION:
Dado que X es normal, para poder aplicar el teorema de caracterización tenemos que probar que cualquier $\mathfrak{B}$ - cubierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito. Para tal fin consideremos una báse $\mathfrak{B}$ de C de cardinalidad $\omega(C)$ y como por hipótesis tenemos que X es $\omega(C)$-paracompacto entonces cualquier $\mathfrak{B}$-cubierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito. Así concluimos la demostración del corolario. ■

Una compactación de un espacio X es una pareja (K, h), donde K es un espacio Hausdorff compacto y h es un encaje de X como un subconjunto denso de K. No entraremos en detalles acerca de las compactaciones, sólo recordaremos que es usual denotar la compactación de Stone - Cech de un espacio completamente regular como βX.

Corolario 3.2.2 *(MORITA [1961],TAMANO [1962])*
Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio X
a) X es paracompacto.
b) $X \times \beta X$ es normal.
c) $X \times \alpha X$ es normal para toda compactación αX de X.
d) $X \times \alpha X$ es normal para alguna compactación αX de X.

DEMOSTRACION:
Por el corolario anterior (a) implica tanto a (b) (c) y (d) y además evidentemente (c) implica a (b) y (d).
Supóngase ahora que αX es una compactación de X, y $X \times \alpha X$ es normal. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X por conjuntos abiertos en αX, y sea $\mathfrak{B}$ la familia de todos los conjuntos abiertos en αX. Definamos

$$G(B, D) = \begin{cases} B \cap X & \text{si } \alpha X \setminus D \subset \bigcup \mathcal{U} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $B, D \in \mathfrak{B}$.
Afirmación: $\mathfrak{G} = \{G(B, D) : \overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$ es una $\mathfrak{B}$-cubierta de X.
En efecto pues

$$G(B \cap B', D \cap D') = \begin{cases} B \cap B' & \text{si } \alpha X \setminus D \cap D' \subset \bigcup \mathcal{U} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto $G(B \cap B', D \cap D') = G(B, D) \cap G(B', D')$, y lo único que nos hace falta ver es que cubre a X. Para esto, sea $x \in X$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, por lo tanto basta con tomar B abierto de αX de tal manera que $x \in B \subset \overline{B} \subset U$ y D un abierto de αX tal que $\alpha X \setminus U \subset D$ y $\overline{D} \cap \overline{B} = \emptyset$, así claramente $x \in G(B, D)$ con lo cual concluimos la afirmación.

Entonces $\mathfrak{G}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito por el teorema 3.1.1.
Obsérvese sin embargo que la cerradura en αX de cada elemento de tal refinamiento está contenida en $\bigcup \mathcal{U}$ y entonces es cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{V}$ la colección de todos estas cantidades finitas de elementos de $\mathcal{U}$, Entonces con una ligera modificación del (Teorema 7.45 de [8]) $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$, además obsérvese que tal refinamiento es localmente finito, lo cual prueba la paracompacidad de X. ■

Corolario 3.2.3 *(DIEUDONNE [1944])*
El producto $X \times C$ de un espacio paracompacto X y un espacio compacto C es paracompacto.

DEMOSTRACION:
Dado que $\beta(X \times C)$ es compacto, aplicando el teorema de Tychonoff obtenemos que $C \times \beta(X \times C)$ es compacto. Como X es paracompacto, el corolario 3.2.1 implica que $X \times C \times \beta(X \times C)$ es normal. Por lo tanto, aplicando el corolario 3.2.2 obtenemos que $X \times C$ es paracompacto. ■

Corolario 3.2.4 *(TAMANO [1962])*
Si $X \times Y$ es normal para todo espacio paracompacto Y, entonces $X \times Y$ es paracompacto para todo espacio paracompacto Y.

DEMOSTRACION:
Sea Y un espacio paracompacto. Consideremos el espacio compacto $\beta(X \times Y)$. Por el corolario 3.2.3, $Y \times \beta(X \times Y)$ es paracompacto. Por lo tanto, $X \times Y \times \beta(X \times Y)$ es normal. Aplicando el corolario 3.2.2 tenemos que $X \times Y$ es paracompacto. ■

Corolario 3.2.5 *(KUNEN)*
Sea α un ordinal, el producto $X \times [0, \alpha]$ es normal si y sólo si X es normal y $\mid \alpha \mid$ - paracompacto.

DEMOSTRACION:
$\Leftarrow$) Esta implicación se sigue inmediatamente del corolario 3.2.1.
$\Rightarrow$) (Por inducción).
Supongamos que el teorema se cumple para todo $\alpha < \lambda$. Vamos a demostrar el teorema para el ordinal λ. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una cubierta abierta de X.

Por hipótesis de inducción es suficiente mostrar que la cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito, donde $V_\alpha = \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$.
En efecto esto es suficiente pues, supongamos que $\mathcal{C}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{V}$, y consideremos la función $f : \mathcal{C} \longrightarrow OR$ tal que si $c \in \mathcal{C}$ entonces $f(c)$ es el mínimo ordinal tal que $c \subset V_{f(c)}$ (OR denota la clase de todos los ordinales). Ahora sea $C_\alpha = \bigcup\{c \in \mathcal{C} : f(c) = \alpha\}$. Así claramente $C_\alpha \subset V_\alpha$, y la familia $\mathcal{C}' = \{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una cubierta abierta de X localmente finita. Como X es normal, existe una cubierta localmente finita $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha < \lambda\}$ con la propiedad de que para cada $\alpha < \lambda$

$$W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset C_\alpha \subset V_\alpha.$$

Como $\overline{W_\alpha} \times [0, \alpha] \subset X \times [0, \alpha]$, se tiene que $\overline{W_\alpha} \times [0, \alpha]$ es normal, y como $\alpha < \lambda$, por hipótesis de inducción, $\overline{W_\alpha}$ es normal y $\mid \alpha \mid$-paracompacto. Esto quiere decir que existe un refinamiento abierto localmente finito de V_α que cubre a $\overline{W_\alpha}$. Sea D_α tal refinamiento. Consideremos $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha<\lambda} D_\alpha$.
Afirmación: $\mathcal{D}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$.

En efecto, es claro que $\mathcal{D}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$; además es también claro que cubre a X. Lo único que hace falta, es constatar que $\mathcal{D}$ es localmente finita. Para tal efecto, sea $x \in X$; como $\{W_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es localmente finita se tiene que x pertenece a una colección finita de los W_α, sean estos $W_{\alpha_1}, W_{\alpha_2}, ..., W_{\alpha_n}$, como $\{\overline{W_\alpha} : \alpha < \lambda\}$ es localmente finita (véase lema 1.5.1), aplicando el lema 1.5.2 obtenemos que

$$F = \bigcup_{\alpha \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}} \overline{W}_\alpha$$

es cerrado. Como $x \notin F$, existe una vecindad B_0 de x tal que $B_0 \cap F = \emptyset$. Ahora sea B_i una vecindad de x tal que B_i intersecta sólo una cantidad finita de elementos de D_{α_i} y tomemos $B = B_0 \cap B_1 \cap ... \cap B_n$. Entonces B así construida es una vecindad que intersecta una colección finita de elementos de $\mathcal{D}$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es localmente finita.

Ahora probemos que $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito. Sea $\mathfrak{B}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos en $\overline{\lambda}$ y para cada $B, D \in \mathfrak{B}$ definamos $G(B, D) = V_\alpha$, si α es el supremo de los ordinales ξ tales que $[0, \xi) \subset B$, si tal ordinal existe, y $G(B, D) = \emptyset$ en cualquier otro caso.
Afirmación: $\mathfrak{B}$=$\{G(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}$ *y* $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset\}$ es una $\mathfrak{B}$-cubierta que refina a $\mathcal{V}$.

En efecto, es claro que cada elemento de $\mathfrak{G}$ es abierto y también es claro que refina a $\mathcal{V}$. Ahora probaremos que para todo $B, B', D, D' \in \mathfrak{B}$ se tiene que

$$G(B, D) \cap G(B', D') = G(B \cap B', D \cap D'). \qquad (*)$$

Para tal efecto tenemos los siguientes casos:

a) $G(B,D) = V_\alpha$ y $G(B',D') = V_\beta$, esto significa que α es el supremo de los ordinales ξ tal que $[0,\xi) \subset B$ y β es el supremo de los ordinales η tal que $[0,\eta) \subset B'$. Sin perdida de generalidad supongamos que $\alpha < \beta$. Esto implica que $V_\alpha \cap V_\beta = V_\alpha$ y $[0,\alpha) \subset [0,\gamma)$. Por lo tanto, si $\xi < \alpha$, $[0,\xi) \subset B \cap B'$; y además α es el supremo de los ordinales que cumplen esta inclusión, pues de no ser así contradeciriamos las propiedades que definen a α. Por lo tanto $G(B \cap B', D \cap D') = V_\alpha$, así concluimos en este caso.

b) $G(B,D) = V_\alpha$ y $G(B',D') = \emptyset$, esto quiere decir que no existe β $[0,\beta) \subset B'$ y por tanto no existe γ tal que $[0,\gamma) \subset B \cap B'$ y así $G(B \cap B', D \cap D') = \emptyset$ y por lo tanto se tiene la igualdad en (*).

Análogamente se tiene la igualdad si $G(B,D) = \emptyset$ y $G(B',D') = V_\beta$, y también es claro si $G(B,D) = \emptyset = G(B',D')$. Así concluimos que $\mathfrak{G}$ es una $\mathfrak{B}$-cubierta de X que refina a $\mathcal{V}$. ■

Corolario 3.2.6 *(MORITA [1961])*
Sea k un cardinal. Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio X:
a) X es normal y k-paracompacto.
b) $X \times I^k$ es normal.
c) $X \times D^k$ es normal.
Donde I y D denotan el intervalo $[0,1]$ y el espacio discreto de dos elementos respectivamente.

DEMOSTRACION:

Obsérvese que por el Corolario 3.2.1, (a) implica (b), y obviamente (b) implica (c). Como el espacio D^k contiene una copia cerrada de $\overline{k}$, digamos A, y además $X \times A \subset X \times D^k$, entonces $X \times A$ es normal pues $X \times D^k$ es normal. Así por el corolario 3.2.5 obtenemos que (c) implica (a). ■

Corolario 3.2.7 *(DOWKER [1951])*
Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio X
a) X es normal y numerablemente paracompacto.
b) $X \times I$ es normal.
c) $X \times C$ es normal para todo espacio C métrico compacto infinito.
d) $X \times C$ es normal para algún espacio C métrico compacto infinito.

DEMOSTRACION:

Por el corolario 3.2.1 (a) implica tanto (b) ,(c) y (d).
Por otro lado, dado que todo espacio métrico compacto infinito contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $[0,\omega]$, el corolario 3.2.5 muestra que tanto (b) como (c) o (d) implican a (a). ■

Sea k un cardinal decimos que un espacio X es *k-colectivamente normal* si X es un espacio T_1 y para toda familia discreta $\{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos cerrados de X con $\mid S \mid= k$ existe una familia discreta $\{V_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_s \subset V_s$ para toda $s \in S$.

Teorema 3.2.1
Sea V un espacio vectorial topológico normado de peso λ. Sea $r \in I\!R$ con $r > 0$. Entonces existe una familia $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset V$ tal que $\| f_\alpha - f_\beta \|\geq r$ para toda $\alpha \neq \beta$.

DEMOSTRACION:
Sea $\{r_n\} \subset I\!R^+$ tal que $r_0 = r$ y $r_n \longrightarrow 0$. Obsérvese que para cada n siempre existe un conjunto A_n con la siguiente propiedad, $A_n \subset V$ y $\| f - g \|\geq r_n$ si $f, g \in A_n$ y $f \neq g$. Obsérvese además que esta propiedad es de caracter finito (véase definición A.0.1), por tanto aplicando el lema de Teichmuller-Tukey (véase lema A.0.3) existe un conjunto maximal B_n con tal propiedad y que contiene a A_n.
Ahora para cada n sea

$$\alpha_n = sup\{\mid B \mid: B \subset V \ \ tal \ \ que \quad \| f - g \|\geq r_n \ \ si \ \ f, g \in B \ \ y f \neq g\}.$$

Obsérvese que si B es tal que $\| f - g \|\geq t > 0$ para todo $f, g \in B$ y $f \neq g$ y $s > t$ entonces $B_s = \{s/tf : f \in B\}$ satisface que

$$\| s/tf - s/tg \|= s/t \| f - g \|\geq s$$

donde $f, g \in B$, $f \neq g$. Por lo tanto $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq ....$ Supongamos que cada $\alpha_n < \lambda$. Como $\mid B_n \mid\leq \alpha_n$ obtenemos que

$$\mid \bigcup_{n<\omega} B_n \mid< \lambda.$$

Sea $D = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, afirmamos que D es denso en V. En efecto, sea A un abierto en V y sea $a \in A$, si $a \in D$ ya no hay nada que hacer . Supongamos que $a \notin D$ y sea $t > 0$ tal que $B(a, t) \subset A$, donde $B(a, t)$ es la bola de radio t y centro en a. Sea $n \in I\!N$ tal que $r_n < t/2$. Como B_n es maximal, entonces $\{B(b, r_n) : b \in B_n\}$ cubre a V. Por lo tanto existe $b \in B_n$ tal que $a \in B(b, r_n)$ pero $r_n < t/2$ entonces

$$a \in B(b, r_n) \subset B(a, t) \subset A.$$

Por tanto $b \in A$ y así D es denso en V. Pero V es metrico y tenemos que $\lambda >\mid D \mid\geq d(V) = \omega(V)$ donde $d(V)$ denota la densidad de V lo cual es una contradicción. ■

Teorema 3.2.2 *(RUDIN [1975], DOWKER [1951])*
Si C es un espacio compacto infinito y $X \times C$ es normal, entonces X es numerablemente paracompacto y $\omega(C)$ - colectivamente normal.

DEMOSTRACION:
Dado que todo espacio compacto infinito C contiene un subespacio cerrado A que puede ser mapeado sobre $[0, \omega]$ (por ejemplo la cerradura de un subespacio infinito y discreto en C). Sea $f : A \longrightarrow [0, \omega]$ continua y sobre. $X \times A$ es normal ya que es un subespacio cerrado del espacio normal $X \times C$, y $id \times f : X \times A \longrightarrow X \times [0, \omega]$ es una función continua cerrada y suprayectiva, por lo tanto $X \times [0, \omega]$ es normal. Como $[0, \omega]$ es compacto métrico infinito obtenemos que la paracompacidad numerable de X se desprende directamente del corolario 3.2.7.
Ahora sea $\lambda = \omega(C)$.
Afirmación: X es λ colectivamente normal.
Sea $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección discreta de subconjuntos cerrados de X y sea $F = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$.
Como el espacio $\mathcal{C}(C)$ de funciones continuas reales en C con la norma del supremo tiene peso λ, y dado que $\mathcal{C}(C)$ es un espacio vectorial normado, por el teorema anterior contiene una familia $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de funciones tal que $\| f_\alpha - f_\beta \| \geq 1$ para toda $\alpha \neq \beta$.
Ahora definamos $g : F \times C \longrightarrow I\!R$ como sigue $g(x, y) = f_\alpha(y)$ para $x \in F_\alpha$ y $\alpha < \lambda$, como $X \times C$ es normal podemos considerar una extensión continua G de g sobre $X \times C$ Ahora sea ρ una pseudométrica en X definida como.

$$\rho(x, x') = sup\{| G(x, y) - G(x', y) | : y \in C\}$$

de aquí se sigue inmediatamente que los conjuntos
$V_\alpha = \{x \in X : \rho(x, F_\alpha) < 1/2\}$ son abiertos, ajenos y obviamente $F_\alpha \subset V_\alpha$ con lo que se concluye la demostración. ∎

Obsérvese que numerablemente paracompacto y $\omega(C)$ - colectivamente normal de X no implican en general la normalidad de $X \times C$ por ejemplo el espacio $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ no es normal.

Sea k un número cardinal denotemos por $A(k)$ la compactación unipuntual del espacio discreto de cardinalidad k, identificaremos $A(k)$ con los ordinales $\alpha \leq k$ con k como el único punto no aislado.

Teorema 3.2.3 *(ALAS [1971])*
El espacio $X \times A(k)$ es normal si y sólo si X es numerablemente paracompacto y k - colectivamente normal.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Esta implicación es inmediata del teorema 3.2.2.

$\Leftarrow$) *Afirmación*: Para todo subconjunto cerrado L de $X \times A(k)$ tal que $L \cap X \times \{k\} = \emptyset$ existe una vecindad abierta W de L tal que $\overline{W} \cap (X \times \{k\}) = \emptyset$.

En efecto, supongamos que L es cerrado en $X \times A(k)$ y $L \cap X \times \{k\} = \emptyset$. Consideremos la familia $\{F_\alpha : \alpha < k\}$, donde $F_\alpha = \{x \in X : (x, \alpha) \in L\}$ es una familia que consiste de conjuntos cerrados y es localmente finita. Como X es k - colectivamente normal y numerablemente paracompacto, existe una familia localmente finita $\{U_\alpha : \alpha < k\}$ de conjuntos abiertos en X tal que $F_\alpha \subset U_\alpha$. Por lo tanto considerando el conjunto $W = \bigcup\{U_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha < k\}$ el cual es abierto, contiene a L y $\overline{W} \cap (X \times \{k\}) = \emptyset$, con lo que completamos la prueba de la afirmación.

Ahora consideremos K_0 y K_1 subconjuntos cerrados ajenos en $X \times A(k)$ y sea

$$K_0' = K_0 \cap (X \times \{k\})$$
$$K_1' = K_1 \cap (X \times \{k\}).$$

Por la normalidad de X existen conjuntos abiertos ajenos U_0 y U_1 en $X \times A(k)$ tal que $K_0' \subset U_0$ y $K_1' \subset U_1$ y también conjuntos abiertos ajenos V_0 y V_1 en $X \times A(k)$ tales que $(K_0 \setminus K_0') \subset V_0$ y $(K_1 \setminus K_1') \subset V_1$.
Dado que los subconjuntos cerrados $L_0 = K_0 \setminus U_0$ y $L_1 = K_1 \setminus U_1$, no intersectan a $X \times \{k\}$ existen conjuntos abiertos W_0 y W_1 en $X \times A(k)$ tal que $L_i \subset W_i$ y $\overline{W_i} \cap (X \times \{k\}) = \emptyset$ para $i = 0, 1$. Podemos suponer que $W_i \subset V_i$, por lo tanto si consideramos los conjuntos

$$G_0 = U_0 \setminus (\overline{W_1} \cup W_0) \qquad\qquad G_1 = U_1 \setminus (\overline{W_0} \cup W_1).$$

Los cuales son abiertos ajenos, $K_0 \subset G_0$ y $K_1 \subset G_1$. Con lo que concluimos que $X \times A(k)$ es normal. ■

3.3 OBSERVACIONES FINALES

Para finalizar este capítulo obtendremos a partir de los corolarios de la sección 3.2 y del teorema de caracterización algunas consecuencias muy interesantes utilizando espacios concretos y familiares.

Dado que todo espacio métrico M es paracompacto (véase el teorema de Stone en el Apéndice) aplicando el corolario 3.2.3 obtenemos que $M \times C$ es paracompacto para cualquier espacio compacto C. En particular si M es un espacio discreto o M es $\mathbb{R}^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora consideremos el espacio X_M como en el teorema 2.0.5. Dado que X_M es paracompacto (de hecho es hereditariamente paracompacto) se tiene que $X_M \times C$ es paracompacto y por tanto normal, donde C es cualquier espacio compacto. En particular si tomamos $X_M = \mathbb{R}^*$ la línea de Michael y $C = I$ el intervalo [0,1] tenemos que $\mathbb{R}^* \times I$ es paracompacto.

En el ejemplo 3 probamos que $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ no es normal por lo tanto el teorema 1.6.2 nos dice que no es paracompacto. Dado que $[0, \omega_1]$ es compacto (véase afirmación 2.3.1 del ejemplo 3), aplicando el corolario 3.2.3 obtenemos que $[0, \omega_1)$ no es paracompacto y así $[0, \omega_1)$ es un espacio normal que no es paracompacto.

De la misma manera como $X \times I$ no es normal donde X es el espacio dado por Rudin en la pregunta 4 capítulo dos obtenemos, aplicando el corolario 3.2.3, que X no es paracompacto. Más aún por el corolario 3.2.7 se tiene que X ni siquiera es numerablemente paracompacto.

Obsérvese además que del corolario 3.2.7 se deduce la siguiente caracterización

Teorema 3.3.1
Sea X un espacio normal entonces
X es un espacio de Dowker si y sólo si X no es numerablemente paracompacto. ■

APENDICE

En este apartado, damos las demostraciones de cuatro resultados, los cuales no sólo son importantes en la teoría de productos de espacios normales sino que constituyen parte de los pilares básicos de la Topología General.

Uno de los resultados cruciales acerca de espacios normales es el Lema de Urysohn, el cual establece que conjuntos cerrados ajenos en un espacio normal son completamente separados. Comenzamos con un resultado preliminar.

Lema A.0.1
Sea X un espacio arbitrario, sea D cualquier subconjunto denso de la linea real $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{U} = \{U_r : r \in D\}$ una familia de subconjuntos abiertos en X indicada por D. Supóngase que $\mathcal{U}$ satisface

$$(a) \quad \bigcup_{r \in D} U_r = X, \qquad\qquad (b) \quad \bigcap_{r \in D} U_r = \emptyset$$

$$(c) \quad \overline{U_r} \subset U_s \quad cuando \quad r < s.$$

Entonces la fórmula

$$f(x) = inf\{r \in D : x \in U_r\} \qquad\qquad x \in X$$

define una función continua sobre X.

DEMOSTRACION:

Lo primero que tenemos que ver, es que $dom f = X$ y que $f(x)$ está bien definido como un número real, pero esto es claro ya que

$$\bigcup_{r \in D} U_r = X, \qquad y \qquad \bigcap_{r \in D} U_r = \emptyset.$$

Ahora obsérvemos que, $x \in U_r$ implica que $f(x) \leq r$ y $f(x) < r$ implica que $x \in U_r$. También $x \in \overline{U_r}$ implica que $x \in U_s$ para todo $s > r$, por lo que $f(x) \leq r$.

Ahora mostraremos que la función es continua. Fijemos $a \in X$, dado que D es denso en $\mathbb{R}$ los intervalos $[r,s]$ donde $r, s \in D$ y $r < f(a) < s$, forman una base de vecindades de $f(a)$, y las observaciones anteriores muestran que para cualesquiera r y s, $U_s \setminus \overline{U_r}$ es una vecindad de a y es tal que $f(x) \in [r,s]$ para todo $x \in U_s \setminus \overline{U_r}$, por lo que f es continua. ∎

Lema A.0.2 *(LEMA DE URYSOHN [1925])*
Un espacio X es normal si y sólo si dados conjuntos cerrados ajenos A y B en X, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ con $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$.

DEMOSTRACION:
$\Rightarrow$) Sean A y B conjuntos cerrados ajenos en un espacio normal X.
Definamos conjuntos abiertos U_r para todo $r \in \mathbb{Q}$ de la siguiente manera:
primero tomamos

$$U_r = \emptyset \qquad\qquad \forall r < 0$$

y

$$U_r = X \qquad\qquad \forall r > 1.$$

Ahora hacemos $U_1 = X \setminus B$, entonces U_1 es una vecindad de A, dado que X es normal, U_1 contiene una vecindad cerrada de A;
consideremos U_0 abierto tal que

$$A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1,$$

ahora enumeramos los racionales en $[0,1]$ en una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$, inductivamente para cada $n > 2$ consideremos U_{r_n} abierto tal que

$$\overline{U_{r_k}} \subset U_{r_n} \subset \overline{U_{r_n}} \subset U_{r_l}$$

cuando $r_k < r_n < r_l$ y $k, l < n$. Observemos que los conjuntos U_r $(r \in \mathbb{Q})$, por la manera en que se tomaron, satisfacen las hipótesis del lema anterior. Y evidentemente la función f del lema es tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$, con lo que concluimos esta implicación.
$\Leftarrow$) Supóngase que A y B son conjuntos cerrados ajenos en X y

$$f : X \longrightarrow [0,1]$$

es una función continua tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$, entonces $f^{-1}([0,1/2))$ y $f^{-1}((1/2,1])$ son conjuntos abiertos y ajenos en X que contienen a A y B respectivamente. ∎

Otro resultado crucial en la teoría de espacios normales es el siguiente:

Teorema A.0.2 *(TEOREMA DE EXTENSION DE TIETZE)*
Un espacio X es normal si y sólo si dado un subconjunto cerrado M de X y una función continua $f : M \longrightarrow I\!R$, existe una extensión de f a todo X.

DEMOSTRACION:

Supongamos primero que $f : M \longrightarrow J$ donde $J = [-1, 1]$, comenzamos con una observación.

Observación: para cualquier $f_0 : M \longrightarrow I\!R$ que satisface $\mid f_0(x) \mid \leq c$ para todo $x \in M$, existe $g : X \longrightarrow I\!R$ tal que

$$\mid g(x) \mid \leq \frac{1}{3}c \qquad \forall x \in X \tag{A.1}$$

$$\mid f_0(x) - g(x) \mid \leq \frac{2}{3}c \qquad \forall x \in M \tag{A.2}$$

En efecto, consideremos los conjuntos

$$A = f_0^{-1}([-c, -1/3c])$$

y

$$B = f_0^{-1}([1/3c, c])$$

evidentemente A y B son cerrados ajenos en X, aplicando el lema de Urysohn existe una función $K : X \longrightarrow I$ tal que $K(A) \subset \{0\}$ y $K(B) \subset \{1\}$. Consideremos $g : X \longrightarrow I\!R$ dada por

$$g(x) = \frac{2}{3}c(K(x) - \frac{1}{2})$$

la cual es claro que satisface $(A.1)$ y $(A.2)$.

Ahora definamos por inducción una sucesión $g_1, g_2, g_3, ...$ de funciones continuas de X en $I\!R$ tal que

$$\mid g_i(x) \mid \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1} \qquad \forall x \in X \tag{A.3}$$

$$\mid f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \mid \leq (\frac{2}{3})^i \quad \forall x \in M \tag{A.4}$$

Para obtener g_1 basta con aplicar la observación a $f_0 = i_j \circ f$ y $c = 1$, donde i_j es el encaje de $[-1, 1]$ en $I\!R$. Supongamos que $g_1, g_2, ..., g_i$ están definidas, aplicando la misma observación a

$$f_0 = i_j \circ f - (\sum_{j=1}^{i} g_j)|_M$$

y

$$c = (\frac{2}{3})^i$$

obtenemos una función g_{i+1} que satisface $(A.3)$ y $(A.4)$ remplazando i por $i+1$.

Consideremos ahora $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$; $F : X \longrightarrow J$.

Afirmación: F es continua.

Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, fijemos $N > 0$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

dado que cada g_i es continua para $i = 1, 2, ..., N$ elegimos un abierto U_i que contiene a x tal que si $y \in U_i$ entonces $| g_i(x) - g_i(y) | < \frac{\varepsilon}{2N}$ dado que $U = U_1 \bigcap .... \bigcap U_N$ es abierto en X y si $y \in U$ obtenemos que

$$| F(x) - F(y) | \leq \sum_{i=1}^{N} | g_i(x) - g_i(y) | + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^i < N(\frac{\varepsilon}{2N}) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

por lo que F es continua.

Por $(A.4)$ tenemos que $F(x) = f(x)$ para $x \in M$. Por lo tanto F es una extensión de f sobre X.

Ahora consideremos una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

Afirmación: f se extiende sobre todo X consideremos $i \circ f : M \longrightarrow J$ donde $i : \mathbb{R} \longrightarrow J$ dada como

$$i(x) = \frac{x}{1 + | x |}$$

Por la parte anterior de la prueba tenemos que existe una función $F_1 : X \longrightarrow J$ que extiende a $i \circ f$ a todo X

Obsévese que $| i(x) | < 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y que i tiene inversa continua $i^{-1} : J \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto haciendo $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = i^{-1} \circ F_1(x)$ obtenemos la extensión de f sobre X. ∎

Cabe hacer mención que la prueba del teorema anterior fue dada por Urysohn en [1925], pero antes, en [1915] Tietze la desarrollo para espacios métricos.

Damos paso ahora a la prueba del teorema de Tychonoff, el cual es uno de los teoremas más importantes en topología general. Recordemos que todos nuestros espacios son de Hausdorff.

Definición A.0.1

Decimos que una propiedad P es de caracter finito si el conjunto vacío la *tiene y un conjunto $A \subset X$ tiene la propiedad siempre que todo subconjunto finito de A tiene esta propiedad .*

A continuación enunciamos un lema propio de la teoría de conjuntos por lo cual se omitirá la demostración.

Lema A.0.3 *(TEICHMULLER - TUKEY)*
Si P es una propiedad de caracter finito perteneciente a subconjuntos de un conjunto X, entonces todo conjunto $A \subset X$ con la propiedad P está contenido en un conjunto $B \subset X$ con la propiedad P y es maximal en la familia de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad P. Ordenados con la relación $\subset$.

Definición A.0.2
Decimos que una familia $\mathfrak{F}=\{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de la intersección finita si $\mathfrak{F}\neq \emptyset$ y

$$F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap ... \cap F_{s_k} \neq \emptyset$$

para todo subconjunto finito $\{s_1, s_2, ..., s_k\} \subset S$.

Antes de pasar concretamente a la demostración del teorema damos una caracterización de los espacios compactos en términos de la propiedad de la intersección finita.

Teorema A.0.3
Un espacio X es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

DEMOSTRACION:
$\Rightarrow$) Sea X un espacio compacto y $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos cerrados de X, tal que $\bigcap_{s\in S} F_s = \emptyset$ consideremos entonces los conjuntos abiertos $U_s = X \setminus F_s$ como

$$\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{s\in S} X \setminus F_s = X \setminus \bigcap_{s\in S} F_s = X.$$

Deducimos que la familia $\{U_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de X dado que X es compacto, la cubierta $\{U_s\}_{s\in S}$ tiene una subcubierta finita digamos $\{U_{s_1}, U_{s_2}, ..., U_{s_k}\}$. Entonces

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

lo cual implica que $\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \emptyset$; esto es una contradicción, por lo tanto si una familia $\{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos cerrados de X tiene la propiedad de la intersección finita, entonces tiene intersección no vacía.

$\Leftarrow$) Supóngase que existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ tal que ninguna subfamilia finita cubre a X. Sea $U_1, U_2, ..., U_n$ cualquier subfamilia finita de $\mathcal{U}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \neq X$, por lo tanto $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus U_i$ como cada U_i es abierto, obtenemos que $\mathfrak{F}=\{X \setminus U_i : U_i \in \mathcal{U}\}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, por hipótesis esta familia no tiene intersección vacía por lo tanto $\bigcup \mathcal{U} \neq X$ esto quiere decir que $\mathcal{U}$ no es una cubierta de X, pero esto es una contradicción. Por lo tanto X es compacto.

■

Teorema A.0.4 *(TYCHONOFF [1935])*
El producto cartesiano $\prod_{s\in S} X_s$ donde $X_s \neq \emptyset$ para $s \in S$ es compacto si y sólo si cada espacio X_s es compacto.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Como el producto cartesiano es de Hausdorff si y sólo si cada factor es de Hausdorff, y cada X_s es homeomorfo a un subespacio cerrado en el producto obtenemos que cada X_s es compacto.

$\Leftarrow$) Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios compactos, sea X el producto cartesiano de tal familia entonces X es un espacio de Hausdorff. Consideremos una familia $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita. Dado que la propiedad de la intersección finita es de caracter finito se sigue del lema de Teichmüler - Tukey que la familia $\mathcal{F}_0$ está contenida en una familia maximal $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, la cual tiene la propiedad de la intersección finita.
Afirmación: $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Es suficente mostrar que existe un punto $x \in X$ tal que

$$x \in \overline{A} \qquad \forall A \in \mathcal{F}. \tag{A.5}$$

De la maximalidad de $\mathcal{F}$ tenemos que si

$$A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{F} \quad entonces \quad A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \in \mathcal{F} \tag{A.6}$$

$$si \;\; A_0 \;\; es \;\; cerrado \;\; en \;\; X \;\; y$$

$$A_0 \cap A \neq \emptyset \;\; para \;\; todo \;\; A \in \mathcal{F} \;\; entonces \;\; A_0 \in \mathcal{F}. \tag{A.7}$$

Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, la familia

$$\mathcal{F}_s = \{\overline{\pi_s(A)}\}_{A\in\mathcal{F}}$$

de subconjuntos cerrados de X_s también tiene esta propiedad para toda $s \in S$. Entonces para toda $s \in S$ existe un punto

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{\pi_s(A)} \subset X_s.$$

Sea W_s una vecindad cerrada de x_s en X_s, por la expresión anterior

$$W_s \cap \pi_s(A) \neq \emptyset$$

para toda $A \in \mathcal{F}$ y por (A.7) obtenemos que $\pi_s^{-1}(W_s) \in \mathcal{F}$ y por (A.6) se sigue que todos los miembros de la base canónica con cerraduras para X que contienen el punto $x = \{x_s\}$ están en la familia $\mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, cada $A \in \mathcal{F}$ los intersecta a todos ellos. De aquí se sigue (A.5). ∎

Concluimos este apartado con la demostración de uno de los pilares en la Topología General el teorema de Stone.

Definición A.0.3
Si todo punto de $x \in X$ tiene una vecindad que intersecta a lo más un conjunto de una familia dada, decimos entonces que la familia es discreta.

Teorema A.0.5 *(A.H. STONE [1948])*
Todo espacio métrico es paracompacto

DEMOSTRACION:

Sea X un espacio métrico con métrica d. Sea $\{U_s\}_{s \in S}$ una cubierta abierta de X donde S es un conjunto bien ordenado con la relación de $<$.

Definamos inductivamente las familias

$$\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s \in S}$$

de subconjuntos de X, haciendo

$$V_{s,i} = \bigcup B(c, 1/2^i)$$

donde la unión se toma sobre todos los puntos $c \in X$, que satisfacen las siguientes condiciones;

$$s \textit{ es el menor elemento de } S \textit{ tal que } c \in U_s \tag{A.8}$$
$$c \notin V_{t,j} \textit{ para } j < i \textit{ y } t < s \tag{A.9}$$
$$B(c, 3/2^i) \subset U_s \tag{A.10}$$

De la manera en que se definió a los conjuntos $V_{s,i}$ se sigue que son abiertos, de (A.10) se sigue que $V_{s,i} \subset U_s$.

Ahora sea $x \in X$, tomemos $s \in S$ el elemento más pequeño tal que $x \in U_s$ y un número natural i tal que $B(x, 3/2^i) \subset U_s$.

Claramente tenemos que $x \in V_{t,j}$ para alguna $j < i$ y $t < s$ o $x \in V_{s,i}$. Por lo tanto, la unión

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$$

es un refinamiento de la cubierta $\{U_s\}_{s \in S}$.

Ahora probaremos que para todo i

$$si \;\; x_1 \in V_{s_1,i}, \;\; x_2 \in V_{s_2,i} \;\; y \;\; s_1 \neq s_2 \;\; entonces \;\; d(x_1, x_2) > 1/2^i \quad \text{(A.11)}$$

Y así mostramos que toda bola de radio $1/2^{i+1}$ intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{V}_i$.

Supongamos que $s_1 < s_2$, por definición de $V_{s_1,i}$ y $V_{s_2,i}$ existen puntos c_1 y c_2 que satisfacen (A.8) - (A.10) tales que

$$x_k \in B(c_k, 1/2^i) \subset V_{s_k,i} \;\; para \;\; k = 1, 2.$$

De (A.10) se sigue que

$$B(c_1, 3/2^i) \subset U_{s_1}$$

y de (A.8) tenemos que $c_2 \notin U_{s_1}$, por lo que $d(c_1, c_2) \geq 3/2^i$. Entonces

$$d(x_1, x_2) \geq d(c_1, c_2) - d(c_1, x_1) - d(c_2, x_2) > 1/2^i$$

con lo que probamos (A.11).

De (A.11)tenemos que, para toda $x \in X$, $B(x, 1/2^{i+1})$ intersecta a lo más a un conjunto de la forma $V_{s,i}$. esto muestra que $\{V_{s,i} : s \in S\}$ es localmente finita. De manera que $\mathcal{V}$ es σ-localmente finita. Por lo tanto X es paracompacto. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] Alas,O.T. *On a characterization of collectionwise normality.* Canad. Math. Bull. Vol 14 (1) 13 - 15, 1971.

[2] Arkhangel'skii A.V. and Ponomarev V.I. *Fundamentals of General Topology, Problems and Exercises.* Mathematics and its Applications, D. Reidel Publishing Company, 1983.

[3] Bešlagić A. *The normality of products with one compact factor, revisited.* Topology and its applications. Vol 52, 121 - 126, 1993.

[4] Dieudonné J. *Un critére de normalité pour les espaces produits.* Coll. Math. Vol 6, 29 - 32, 1958.

[5] Dowker, C. H. *On countably paracompact spaces.* Cand. J. Math. Vol 3, 219 - 224, 1951.

[6] Dugundji, James. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston 1966.

[7] Engelking, Ryszard. *General Topology.* Heldermann Verlag Berlin (sigma series in pure mathematics; vol 6), 1989.

[8] García-Máynez C. A. y Tamariz M. A. *Topología General.* Porrúa, 1988.

[9] Juhász, I. *Cardinal Funtions in Topology.* Math. Centre Tracts No. 34, Amsterdam, 1971.

[10] Kuratowski, K. *Topology.* Academic Press. New York. Vol I, 1966.

[11] Kuratowski, K. *Topology.* Academic Press. New York. Vol II, 1968.

[12] Michael, E. A. *Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable cartesian products.* Compositio Mathematica, Vol 23, 199 - 214, 1971.

[13] Munkres, J. R. *Topology, a first course.* Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1975.

[14] Przymusiński, Teodor C. *Products of normal spaces.* Handbook of Set - theoretic Topology (K. Kunen and J. Vaughan, eds), North - Holland, Amsterdam, 781 - 826, 1984.

[15] Rudin, M. E. *A normal space X for which $X \times I$ is not normal.* Fund. Math., Vol 73, 179 - 186, 1971.

[16] Rudin, M. E. *The normality of a produc with a compact factor.* Bull. Amer. Math.Soc., Vol 79, 984 - 985, 1973.

[17] Rudin, M. E. *The normality of products with one compact factor.* Gen. Topology. Appl., Vol 5, 45 - 59, 1975.

[18] Sorgenfrey R. H. *On the topological products of paracompact spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., Vol 53, 631 - 632, 1947.

[19] Starbird, Michael. *Products with a compact factor.* Gen. Topology. Appl., Vol 6, 297 - 303, 1976.

[20] Steen, L. A. *A direct proof that a linearly ordered space is hereditarily collectionwise normal.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol 24, 727 - 728, 1970.

[21] Steen, L. A. and Seebach Jr, J. A. *Counterexamples in Topology.* Springer - Verlag New York 1978.

[22] Vaughan, J. E. *Non - normal products of ω_μ - metrizable spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol 51, 203 - 208, 1975.

[23] Willard, S. *General Topology.* Addison - Wesley, series in mathematics, Reading Mass., 1970.