Reflexividad, Coreflexividad y Teoría de las Estructuras Matemáticas

Roberto Vázquez García

Verano de 1997

Contenido

I Reflexividad y correflexividad en Top

1 Coproductos **1**
1.1 Descripción de los coproductos cartesianos y topológicos. 6

2 Espacios Finitamente Generados **7**

3 Espacios compactamente generados **10**

4 Subcategorías correflexivas de Top **12**

5 Subcategorías reflexivas de Top **18**
5.1 La T_0-reflexión 21
5.2 Caracterización de las subcategorías birreflexivas de Top 22
5.3 Descripción de las epirreflexiones 24
5.4 Descripción de la categoría birreflexiva generada 25

II Teoría de las Estructuras Matemáticas **29**

6 Categorías Concretas de Conjuntos Estructurados **32**
6.1 Isomorfismos en *ccce* 38
6.2 Fibras en *ccce* 41
6.3 *ccce* isomorfas 45
6.4 Subobjetos en *ccce* 53
6.5 Cocientes en *ccce* 59

Prólogo

Este trabajo cierra la compilación de las notas de los cursos de topología que el Dr. Roberto Vázquez García dictara entre 1985 y 1990 en la Facultad de Ciencias de la UNAM, quedando así reunida una versión de lo que fue su cátedra. Así concluye una etapa más en la tarea de difusión de su obra. Sin embargo, aquí no termina la cosa; hay una tercera etapa que está apenas por iniciar: Ya he hablado sobre la existencia de ciertos manuscritos, seis artículos de investigación que el doctor Vázquez escribió durante meses de convalecencia en su casa. Hemos escogido algunos de ellos para poner fin a esta tarea.

Por lo pronto ofrecemos aquí las notas de los dos últimos seminarios que don Roberto llegó a impartir, uno sobre *reflexividad y correflexividad* y otro sobre *teoría de las estructuras matemáticas*.

En Top la reflexividad y la correflexividad constituyen un delicioso juego con espejos cóncavos y convexos, respectivamente. Uno expone un espacio a la luna de un espejo; con su reflejo o correflejo éste nos devuelve una imagen transformada del espacio que, como la que todo espejo ofrece, es falsa pero fidedigna. Es propósito del topólogo aprovechar las conjeturas y proposiciones referentes a este singular hecho para profundizar más en el estudio de la topología. Un caso particular de reflexividad lo estudiamos ya cuando, en la clase del 20 de diciembre de 1985, dimos la descripción de la T_0-reflexión.

Con relación a esta primera parte hay que advertir que, con la salvedad de los sumideros cartesianos y topológicos, de cuya definición y propiedades pasaremos revista, los conceptos categóricos vistos en los cursos anteriores se darán por sabidos.

A excepción del último curso que recibimos de él, Vázquez nunca hacía presentaciones, como es costumbre de otros profesores hacer al inicio de cada curso, acaso porque su cátedra era en sí una presentación *in extenso*, acaso porque sabía aquello de que ≪en materia de arte, de amor o de ideas son poco eficaces anuncios y programas≫. Lo cierto es que jamás nos dictó un temario ni nos señaló objetivos que se vislumbrasen a largo plazo. Desde el primer día en que me hallé en la relación alumno-maestro con él aprendí topología; precisamente la definición de ésta ilustrada con ejemplos. Cuando nos tomó confianza, a veces lo más que nos decía al comenzar un tema era: ≪vamos a estar en esto hasta donde lleguemos≫.

Me acuerdo del día en que inició el cuarto curso. Todos creíamos que por no tratarse ya de un curso básico sino de un seminario, la primera clase constaría de una introducción. Por otra parte sabíamos que hacía mucho tiempo el doctor no impartía un seminario, -luego- inferíamos -habrá de tratarse de una sesión especial-. Además era viernes y, bueno, la opinión de algunos era que él sabría tenernos consideración. Llegamos temprano aguardando impacientes el desenlace inicial de algo que ya queríamos saber. Roberto llegó, tomó el gis, escribió la palabra COPRODUCTOS, la subrrayó y comenzó la clase con las definiciones correspondientes. ¡Chuchín lo interrumpió!:

-¡Maestro!

-Dígame- respondió Vázquez ajustándose los anteojos para ubicarlo mejor.

-¿Qué vamos a ver?- preguntó Chuchín algo indignado por no ser las cosas como "deben de ser", a lo cual el profesor respondió enérgico:

-¡Esto- y señalando con el índice al pizarrón terminó de decir: -coproductos!

... Margarita y yo nos miramos sonrientes; secretamente cómplices de Vázquez, secretamente satisfechos.

Pero con el último curso ocurrió al revés. Acostumbrados como estábamos a la ausencia de toda presentación, asistimos a la primera clase esperando reanudar la discusión interrumpida al final del semestre anterior. Pensábamos que, como solía hacer Vázquez, reescribiría los dos o tres últimos párrafos de la clase de hacía dos meses y continuaría adelante; tal vez sus únicas palabras antes de hacer esto serían: $\ll$ quedó pendiente una generalización del teorema de factorización (cocientes-monofuentes)$\gg$. Pero no; Vázquez nos tenía reservada otra sorpresa: Una introducción, nada menos.

Cambiaríamos radicalmente de tema y en lugar de continuar con la topología categórica pasaríamos a una parte de la teoría de categorías: la teoría de las estructuras matemáticas.

Es ésta una parte de la matemática cuyo objeto de estudio es la matemática misma, si bien no toda ella sí la parte comprendida por las teorías cuyos objetos de estudio sean conjuntos estructurados.

Aunque la introducción que nos dio el doctor fue platicada, yo guardé de ella memoria escrita. No fue, desde luego, el dictado de un programa ni la fijación de objetivos en lontananza. Fue más bien un preámbulo de los antecedentes históricos de la teoría que estábamos por abordar. Por supuesto, la segunda parte de este trabajo empieza con esa introducción.

Antes de finalizar creo necesario advertir lo siguiente:

1. En las *Lecciones de Topología*[1] procuré dejar en claro qué notas o comentarios eran ajenos a la mano del autor intercalándolos en el texto con letras cursivas. En esta segunda etapa no he tenido ese cuidado salvo cuando lo he creido necesario. Casi todas las notas que apunté a pie de página son comentarios que el propio doctor Vázquez hacía durante su clase, siempre referentes al asunto que se estuviese tratando. Me parece que será fácil para quien leyere distinguir notas así de otras que reconocerá como mías.

2. Aunque los ejercicios en este trabajo son independientes de los de la primera etapa, la cuenta en las tandas seguirá adelante hasta completar “la docena del fraile”.

3. En lugar de la poco tradicional arroba con la que señalábamos el fin de cada demostración recurriremos ahora a un como gatito chueco para indicar lo mismo.$\sharp$

4. Una flecha con su colita levantada $\hookrightarrow$ se empleará para denotar inclusión, y persiguiéndose la cola $\circlearrowright$ denotará conmutatividad en un diagrama.

[1] *Lecciones de Topología*

Agradecimientos

A Guillermo Gómez Alcaraz, que está haciendo público este trabajo en la revista a su cargo.

A Ruffo Arce Ugarte, que sostiene los espacios físico y electrónico en que este trabajo se lleva a cabo. [Quien primero se prestó a esto fue Santiago; falló la máquina (no el amigo).]

A Javier Páez Cárdenas por su asesoría amable y desinteresada.

A Isabel Vázquez Landázuri le pedimos que ilustrara la portada de este trabajo con una obra suya que creyese adecuada para estas notas. Ella se acuerda que al doctor le gustaba mucho la *Danza Profana* de Debussy y escogió un aguafuerte del mismo título para esta ocasión.

A Luis Lugo Goitia, sin cuya ayuda la edición de todo este material... ¿sería posible?

A Guilmer, por sus acertadas sugerencias técnicas a la hora de editar.

A Natzzie, por su revisión del texto.

A José Antonio Gómez Ortega y demás miembros del Consejo Departamental de Matemáticas por el apoyo que nos brindan. ¡Salud!

A Čeva, a Menelao, a Euler, a Hausdorff, ..., ¡a Sierpinski!, por engrandecer el espíritu humano.

Parte I

Reflexividad y correflexividad en Top

1

Coproductos

Noviembre 10 de 1989.

Definiciones. *a*) Un **sumidero en $\mathfrak{Set}$ (**también llamado **sumidero cartesiano)** es una pareja $((f_\lambda)_\Lambda, X)$ en la que X es un conjunto arbitrario y $(f_\lambda)_\Lambda$ es una clase arbitraria de funciones $f_\lambda : X_\lambda \to X$. En tal caso, X es el **codominio del sumidero** y la clase $(X_\lambda)_\Lambda$ es el **dominio del sumidero**.

b) Si $\mathcal{S} = ((f_\lambda)_\Lambda, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ de espacios topológicos, entonces la **topología final para X correspondiente a** $(\tau_\lambda)_\Lambda$ **y a** $(f_\lambda)_\Lambda$ es

$$\tau = \left\{U \subseteq X : f_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\right\}$$

y se dice que el sumidero $\mathcal{S}$ **es final**.

c) Un **sumidero en $\mathfrak{Top}$ o sumidero topológico** es una pareja $((f_\lambda)_\Lambda, (X, \tau))$ en la que (X, τ) es un espacio topológico y $(f_\lambda)_\Lambda$ una clase arbitraria de funciones continuas $f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau)$.

d) Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de conjuntos. **Un coproducto de** $(X_\lambda)_\Lambda$ es un sumidero en $\mathfrak{Set}$, $((f_\lambda)_\Lambda, X)$ de dominio $(X_\lambda)_\Lambda$, con la siguiente propiedad (*universal*): Para cualquier sumidero

$$(f'_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$$

existe una única función $f : X \to X'$ tal que

$$f f_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

En tal caso llamaremos **cofactores** a los miembros X_λ del dominio del coproducto y **coproyecciones** a cada una de las funciones f_λ. Por abuso del lenguaje, cuando está claro cuáles son las coproyecciones, se dice que X es el "coproducto" de $(X_\lambda)_\Lambda$, para el cual suele emplearse la notación

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

A los coproductos en $\mathfrak{Set}$ se los llama **coproductos cartesianos**.

e) Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de espacios topológicos; **un coproducto de** $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es un sumidero en $\mathfrak{Top}$

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$$

con la siguiente propiedad (*universal*): Para cualquier sumidero en $\mathfrak{Top}$

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X', \tau'))_\Lambda$$

existe una única función continua $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ tal que $f f_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. A los coproductos en $\mathfrak{Top}$ se los llama **coproductos topológicos**.

Cuando se hable de "coproducto" o de "sumidero" (a secas) es que se está pensando cualquiera de los dos casos, cartesiano o topológico.

<u>*Ejemplos:*</u> 1. Una biyección $f_1 : X_1 \to X$ es un coproducto cartesiano.

En efecto, sea $f_1' : X_1 \to X'$ cualquier función de dominio X_1 y sea $f : X \to X'$ la función $f = f_1' f_1^{-1}$; entonces

$$ff_1 = \left(f_1' f_1^{-1}\right) f_1 = f_1' \left(f_1^{-1} f_1\right) = f_1'$$

Además, si $g : X \to X'$ es tal que $gf_1 = f_1'$, entonces $g = f_1' f_1^{-1}$, i.e.$g = f$. Por lo tanto, f es única y $f_1 : X_1 \to X$ es un coproducto cartesiano.

2. Un homeomorfismo $f_1 : (X_1, \tau_1) \to (X, \tau)$ es un coproducto topológico.

Teorema. Sean

$$(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda \quad \text{y} \quad (f_\lambda' : X_\lambda \to X')_\Lambda$$

dos coproductos de la misma familia $(X_\lambda)_\Lambda$; entonces existe una biyección (homeomorfismo)

$$h : X \to X' .\!\ni\!. \; hf_\lambda = f_\lambda', \forall \lambda \in \Lambda$$

Demostración. Por definición de coproducto existen funciones (continuas)

$$X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X$$

tales que para cada $\lambda \in \Lambda$

$$ff_\lambda = f_\lambda' \quad \text{y} \quad f' f_\lambda' = f_\lambda$$

Entonces

$$(f'f) f_\lambda = f' (ff_\lambda) = f' f_\lambda' = f_\lambda$$

y

$$(ff') f_\lambda' = f (f' f_\lambda') = ff_\lambda = f_\lambda'$$

Pero dado que X y X' son coproductos, las únicas funciones (continuas) para las cuales

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f_\lambda"'] \arrow[dr, "f_\lambda"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X \arrow[rr, dashed] & {} & X \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f_\lambda'"'] \arrow[dr, "f_\lambda'"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X' & {} & X' \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

son 1_X y $1_{X'}$, respectivamente. Por lo tanto, $f'f = 1_X$ y $ff' = 1_{X'}$; por lo tanto, f y f' son biyecciones (continuas) mutuamente inversas, lo cual demuestra el teorema. $\sharp$

Teorema. Sea $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$ y $h : X \to X'$ una biyección (homeomorfismo) cualquiera; entonces $(hf_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$ también es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$.

Demostración. Sea $(f_\lambda' : X_\lambda \to X'')_\Lambda$ un sumidero cualquiera; como X es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$, existe una única función (continua) $f : X \to X''$ tal que $ff_\lambda = f_\lambda'$.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, "hf_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"] \arrow[ddr, "f_\lambda'"'] & & X' \arrow[ddl, "f'"] \\ & X \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "f"] & \\ & X'' & \end{tikzcd}$$

Consideremos la función inversa $h^{-1} : X' \to X$ y hagamos $f' = fh^{-1}$; entonces

$$f' (hf_\lambda) = f \left(h^{-1} h\right) f_\lambda = ff_\lambda = f_\lambda'$$

Y si $g : X' \to X''$ es una función (continua) tal que $g\,(hf_\lambda) = f'_\lambda$, entonces $(gh)\, f_\lambda = f'_\lambda$; $\therefore\, gh = f$ y $g = fh^{-1} = f'$, i.e. f' es única. Por lo tanto, $(hf_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$ es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$. $\sharp$

Definición. Se dice que un sumidero $\mathcal{S}$ es un **sumidero suprayectivo** o **episumidero** si todo punto de su codominio posee una preimagen bajo al menos un miembro de la clase de funciones de $\mathcal{S}$.

Ejemplos: 1. Una función suprayectiva es un episumidero.

2. Cualquier sumidero que contenga una función suprayectiva es un episumidero.

3. Si $\mathcal{S} = \left(X_\lambda \overset{f_\lambda}{\to} X\right)_\Lambda$ y $\mathcal{S}' = \left(X_\mu \overset{f_\mu}{\to} X\right)_M$ son sumideros tales que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}$ es un episumidero, entonces $\mathcal{S}'$ también es un episumidero.

Oncena tanda de ejercicios: 1. Sea $\mathcal{S} = (f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ un sumidero arbitrario. Probar que son equivalentes:

a) $\mathcal{S}$ es un episumidero.

b) Si $g, h : X \to Y$ son funciones (continuas) tales que $gf_\lambda = hf_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, entonces $g = h$.[1]

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 13 de noviembre de 1989.

En otra parte se ha dado ya una prueba de la proposición siguiente.[2]

Proposición. Sea $\mathcal{S} = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \overset{f_\lambda}{\to} (X, \tau)\right)_\Lambda$ cualquier sumidero en $\mathfrak{Top}$; son equivalentes:

(a) $\mathcal{S}$ es final.

(b) τ es la topología más grande para X según la cual cada f_λ es continua.

(c) Si $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es cualquier función tal que $gf_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (Y, \sigma)$ es continua para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces g es continua. $\sharp$

Teorema. Sea $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$ un sumidero en $\mathfrak{Top}$; son equivalentes:

a) $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$ es un coproducto topológico.

b) $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ es un coproducto cartesiano y τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y $(f_\lambda)_\Lambda$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $(f'_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$ cualquier sumidero en $\mathfrak{Set}$ y sea τ' la topologhía indiscreta para X'; entonces

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X', \tau'))_\Lambda$$

es un sumidero en $\mathfrak{Top}$; por (a) existe una, y sólo una, función continua

$$f : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

tal que $ff_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Si $g : X \to X'$ fuese otra función tal que $gf_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, entonces

$$g : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

sería continua y, por lo tanto, coincidiría con f. Esto prueba que $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ es un coproducto cartesiano.

Ahora sea τ' la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y $(f_\lambda)_\Lambda$. Entonces

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau'))_\Lambda$$

[1] Cancelación por la derecha.

[2] Véase la nota de clase del 7 de septiembre de 1987 en R. Vázquez, *Lecciones de Topología*, Foro RedMat, Vol. 2, No. 5, 1996, `http://www.red-mat.unam.mx`

es un sumidero en $\mathfrak{Top}$; por (a) existe una única función continua

$$f : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

tal que $ff_\lambda = f_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$. Obviamente $1_X f_\lambda = f_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$, y, por ($c$) de la proposición,

$$1_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

es continua, de modo que, por ser $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ un coproducto cartesiano, resulta $f = 1_X$. En consecuencia, $\tau' = \tau$. Por lo tanto, τ es la topología final.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X', \tau'))_\Lambda$$

cualquier sumidero en $\mathfrak{Top}$; por (b) existe una única función $f : X \to X'$ tal que $ff_\lambda = f'_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$. Entonces cada composición ff_λ es continua, de modo que, por (c) de la proposición, también $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ es continua. Por consiguiente, $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$ es un coproducto topológico, tal como se quería probar. $\sharp$[3]

Definiciones. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ es una familia de conjuntos tal que

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing$$

Entonces:

(a) **La suma ajena de** $(X_\lambda)_\Lambda$ es, simplemente, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

(b) Si para cada $\lambda \in \Lambda$ es τ_λ una topología para X_λ, **la suma ajena de la familia de espacios topológicos** $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es el espacio topológico (X, τ) cuyo conjunto subyacente X es $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y cuya topología τ es tal que restringida a X_λ coincide con τ_λ.

La notación que suele emplearse para referirse a la suma ajena de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$ es

$$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Ejercicio: 2. Si $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es una familia de espacios topológicos tal que

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing$$

probar que si existe una topología τ para $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tal que $\tau \mid X_\lambda = \tau_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$, entonces tal topología es única.

Noviembre 15 de 1989.

Lema. Sea (X, τ) la suma ajena de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$; entonces:

a) Cada inclusión

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau)$$

es continua.

b) τ es la topología final para X correspondiente a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ y $(\tau_\lambda)_\Lambda$.

Demostración. (a) Sea $\lambda \in \Lambda$; se sabe que

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau \mid X_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau)$$

[3] Existe un resultado dual para productos cartesiano y topológico y topología inicial. [Op.cit. (11 | ix | 85)]

es continua, y como $\tau_\lambda = \tau \mid X_\lambda$, entonces

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau)$$

es continua.

(b) Consideremos la topología final para X correspondiente a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ y $(\tau_\lambda)_\Lambda$,

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : \iota_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\right\}$$

y escojamos uno cualquiera de sus abiertos, digamos U; entonces

$$U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

o sea que

$$\tau' \mid X_\lambda \subseteq \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Por otra parte, si $V \in \tau_\lambda$, entonces

$$V \subseteq X \quad \text{y} \quad V \cap X_{\lambda'} = \begin{cases} V, \text{ si } \lambda' = \lambda \\ \varnothing, \text{ si } \lambda' \neq \lambda \end{cases}$$

es decir

$$\iota_{\lambda'}^{-1}(V) \in \tau_{\lambda'}, \forall \lambda' \in \Lambda$$

lo que significa que $V \in \tau'$. Por lo tanto, $V \cap X_\lambda \in \tau' \mid X_\lambda$; pero $V \cap X_\lambda = V$. Luego,

$$\tau_\lambda \subseteq \tau' \mid X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Por lo tanto, τ' es una topología para X tal que $\tau' \mid X_\lambda = \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Por el ejercicio 1, una topología para X con esta propiedad es única; luego, $\tau' = \tau$. $\sharp$

Ejercicio: 3. Si (X, τ) es la suma ajena de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, probar que cada inclusión

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau)$$

es una inmersión abierta y cerrada.

Definiciones. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de conjuntos donde hay varios miembros con elementos comunes. Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos un conjunto,

$$X'_\lambda = \{(x, \lambda) : x \in X_\lambda\}$$

y una función

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \overset{h_\lambda}{\to} & X'_\lambda \\ x & \mapsto & (x, \lambda) \end{array}$$

(Obviamente h_λ es una biyección, para toda $\lambda \in \Lambda$). En tal caso:

(a) **La suma ajena de** $(X_\lambda)_\Lambda$ es

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda$$

(b) Si cada X_λ está topologizado por cierta τ_λ, entonces **la suma ajena de la familia de espacios topológicos** $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es la suma ajena de la familia $(X'_\lambda, \tau'_\lambda)_\Lambda$, donde τ'_λ es tal que

$$h_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X'_\lambda, \tau'_\lambda)$$

resulte un homeomorfismo; es decir,

$$\tau'_\lambda = \{h_\lambda(U) : U \in \tau_\lambda\}$$

Notación: $\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Observación. Por el lema anterior, si (X, τ) es la suma ajena de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, entonces τ es la topología final respecto de

$$(\iota_\lambda h_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$$

1.1 Descripción de los coproductos cartesianos y topológicos.

I. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de conjuntos.

(a) Si los miembros de la familia no tienen puntos en común, entonces su coproducto es el sumidero

$$\left(\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

(b) En el caso restante, el coproducto es el sumidero

$$\left(\iota_\lambda h_\lambda : X_\lambda \to \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

II. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos.

(a) Si los miembros de la familia no tienen elementos comunes, entonces un coproducto suyo es

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \tau_\lambda) = (\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

donde (X, τ) es la suma ajena de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$.

(b) Para el caso restante,

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \tau_\lambda) = \left(\iota_\lambda h_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

Ejercicio: 4. Demuestre que $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \tau_\lambda)$ siempre es un episumidero.

Nota: En tres lecciones que siguieron a ésta, se pasó revista a resultados referentes a fibraciones y cocientes. Como ese tema fue tratado en otro curso (dictado a otra generación de estudiantes) lo he omitido aquí, y lo he añadido en la parte correspondiente de aquel curso que digo.[4]

[4]El lector interesado podrá hallarlas en la sección última del capítulo "*Topología final, identificación y cociente*" de la obra ya citada.

2

Espacios Finitamente Generados

Miércoles 6 de diciembre de 1989.

Definición. Un espacio topológico (X, τ) está **finitamente generado** si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X, τ).

Ejemplos: 1. Todo espacio discreto está finitamente generado.

En efecto, si (X, τ) es discreto y $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es la familia de subespacios finitos de (X, τ), entonces el sumidero

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

es final, porque τ es la más grande de las topologías para X que hacen continuas a todas las inclusiones.

2. Todo espacio indiscreto está finitamente generado.

Sea τ la topología indiscreta para X y consideremos el sumidero

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

de inclusiones de los subespacios finitos de (X, τ). Quisiéramos probar que en este caso la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ es indiscreta. Para ello razonemos sobre sus miembros no vacíos: Sea U un subconjunto no vacío de X tal que

$$\iota_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Por ser no vacío existe al menos un $x \in U$. Supongamos que tampoco $X - U$ es vacío y que $y \in X - U$; entonces $x \neq y$ y

$$(\{x, y\}, \tau \mid \{x, y\})$$

es un subespacio finito (e indiscreto) de X y miembro, por lo tanto, de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Sin embargo, para la inclusión correspondiente

$$\iota : (\{x, y\}, \tau \mid \{x, y\}) \hookrightarrow (X, \tau)$$

tenemos

$$\iota^{-1}(U) = \{x\} \notin \tau \mid \{x, y\}$$

lo cual contradice el hecho de que U es miembro de la topología final. Luego $U = X$, lo que significa que τ es la topología final. Por lo tanto

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

es final y (X, τ) está finitamente generado. $\sharp$

Teorema. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; Son equivalentes:

(a) (X, τ) está finitamente generado.

(b) Las intersecciones arbitrarias de abiertos son abiertas.

(c) Las uniones arbitrarias de cerrados son cerradas.

(d) Si $(A_i)_I$ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos abiertos de (X,τ) y sea $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Por (a),

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap F \in \tau \mid F$$

para todo subconjunto F de X que sea finito. En consecuencia, para cada F que fijemos, tenemos que

$$A \cap F = \bigcap_{i\in I} (A_i \cap F)$$

es una intersección finita de abiertos de F (posiblemente de muchos intersectandos repetidos). Luego,

$$A \cap F \in \tau \mid F,\ \forall F \subseteq X \text{ finito.}$$

Por lo tanto, $A \in \tau$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Hay que probar que es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X,τ)

$$\mathcal{S} = (\iota : (F, \tau \mid F) \hookrightarrow (X,\tau))$$

para lo cual basta demostrar que si $U \subseteq X$ es tal que $U \cap F \in \tau \mid F$ para todo subconjunto finito F de X, entonces $U \in \tau$. Escojamos U con esas características y un punto $x \in U$. Por (b), x posee una vecindad abierta mínima $V(x)$ según τ; a saber:

$$V(x) = \cap \{W \in \tau : x \in W\}$$

Ahora bien, si ocurriese que $V(x) - U \neq \varnothing$, entonces podríamos escoger $y \in V(x) - U$ y formar el subespacio finito $\{x,y\}$. Entonces

$$U \cap \{x,y\} = \{x\} \in \tau \mid \{x,y\}$$

lo cual implica que este abierto relativo $\{x\}$ debe producirse también al intersectar el abierto absoluto más chico que contiene a x con $\{x,y\}$. Pero esto es falso, porque $V(x) \cap \{x,y\} = \{x,y\}$ $\underset{\circ}{\nabla}$. Por lo tanto, $V(x) \subseteq U$; por lo tanto, $U \in \tau$ y $\mathcal{S}$ es final.

Diciembre 8 de 1989.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de (X,τ) y sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Por (b),

$$X - A = \bigcap_{i\in I} (X - A_i) \in \tau$$

Por lo tanto, A es cerrado.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sea $(A_i)_I$ una familia arbitraria de subconjuntos de (X,τ). Claramente,

$$A_i \subseteq \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i},\ \forall i \in I$$

por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

Tomando cerraduras y aplicando (c) obtenemos

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

que es lo que se quiere.

(d) $\Rightarrow$ (b) Sea $(A_i)_I$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de (X, τ) y sea $A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Por (d),

$$\overline{X - A} = \bigcup_{i \in I} \overline{X - A_i}$$

pero

$$\overline{X - A_i} = X - A_i$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} \overline{X - A_i} = \bigcup_{i \in I} X - A_i = X - A$$

O sea que $X - A$ es cerrado y A es abierto, como se quería probar. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

3

Espacios compactamente generados

Miércoles 3 de enero de 1990.

<u>*Ejercicios:*</u> 5. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau \mid F, \forall F \subseteq X . \ni . \#(F) < \infty\}$$

probar que τ' es una topología para X y que es más fina que τ.

6. Sean (X, τ) y τ' como en 5. Probar que:

(a) (X, τ') está finitamente generado.

(b) Si $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ es continua y (W, ξ) está finitamente generado, entonces $f : (W, \xi) \to (X, \tau')$ es continua.

Definición. Un espacio topológico (X, τ) está **compactamente generado** si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios compactos de (X, τ).[1]

Proposición. Si (X, τ) es cualquier espacio topológico, son equivalentes:

$a)$ (X, τ) está compactamente generado.

$b)$ $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap K \in \tau \mid K, \forall K \subseteq X$ compacto.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $(K_i)_I$ la familia de subespacios compactos de (X, τ); por (a), es final el sumidero

$$(\iota_i : (K_i, \tau \mid K_i) \hookrightarrow (X, \tau))_I$$

Por lo tanto

$$U \in \tau \Leftrightarrow \iota_i^{-1}(U) \in \tau \mid K_i, \forall i \in I$$

es decir

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap K_i \in \tau \mid K_i, \forall i \in I$$

$(b) \Rightarrow (a)$ De acuerdo a la definición de sumidero final, (b) significa que τ es la topología final corespondiente a $(\iota_i)_I$ y $(\tau \mid K_i)_I$. Por lo tanto, el sumidero

$$(\iota_i : (K_i, \tau \mid K_i) \hookrightarrow (X, \tau))_I$$

es final y (X, τ) está compactamente generado. $\sharp$

<u>*Ejemplo*</u> 1. Todo espacio finitamente generado está compactamente generado.

En efecto, supongamos que (X, τ) está finitamente generado y que $(K_i)_I$ es la familia de los subespacios compactos de (X, τ). Sea $U \subseteq X$ tal que $U \cap K_i \in \tau \mid K_i, \forall i \in I$. En particular tenemos, dado que cualquier subespacio finito de (X, τ) es compacto, que

$$U \cap F \in \tau \mid F, \forall F \subseteq X \text{ finito}$$

y como se trata de un espacio finitamente generado, entonces $U \in \tau$; de modo que, por (b) de la proposición anterior, (X, τ) está compactamente generado.

---

[1] En la terminología antigua este concepto recibía el nombre de K-espacio.

Ejercicio: 7. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap K \in \tau \mid K, \forall K \subseteq X \text{ compacto}\}$$

pruebe que τ' es una topología para X más fina que τ.

Enero 8 de 1990.

Ejemplo 2. Todo espacio topológico en el que cada punto posea una vecindad compacta está compactamente generado. (V.gr. Todo espacio compacto; todo espacio localmente compacto.)

En efecto, sea (X, τ) cualquier espacio con la propiedad anterior. Hay que probar que

$$U \cap K \in \tau \mid K, \forall K \subseteq X \text{ compacto} \Rightarrow U \in \tau$$

Sea $x \in U$ y sea K la vecindad compacta que por hipótesis posee x; entonces

$$x \in U \cap K \in \tau \mid K$$

o sea que $U \cap K$ es una vecindad relativa de x contenida en la vecindad absoluta K; entonces es una vecindad absoluta de x contenida en U. Por lo tanto, $U \in \tau$.

Ejercicio: 8. Probar que todo espacio topológico que satisfaga el primer axioma de numerabilidad está compactamente generado.

Teorema. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:

a) (X, τ) está compactamente generado.

b) Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una función tal que $f \mid K : K \to (Y, \sigma)$ es continua, para todo subespacio compacto K de (X, τ), entonces f es continua en (X, τ).

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por (a), es final el sumidero

$$(\iota_i : (K_i, \tau \mid K_i) \hookrightarrow (X, \tau))_I$$

Como además cada composición

$$f\iota_i : (K_i, \tau \mid K_i) \to (Y, \sigma)$$

es continua, entonces una caracterización de sumidero final nos permite asegurar que f es continua.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ cualquier función tal que

$$f\iota_i : (K_i, \tau \mid K_i) \to (Y, \sigma)$$

es continua, para toda $i \in I$. Por (b), f es continua; por lo tanto

$$(\iota_i : (K_i, \tau \mid K_i) \hookrightarrow (X, \tau))_I$$

es un sumidero final. Luego, (X, τ) está compactamente generado. ♯

Ejercicio: 9. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; probar que

(A) Son equivalentes:

(a) (X, τ) está **conexamente generado** (i.e. es final el sumidero de inclusiones de los subespacios conexos de X).

(b) Toda componente conexa en (X, τ) es abierta.

(B) Todo espacio localmente conexo está conexamente generado.

Enero 10 de 1990.

Ejercicio: 10. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico. Si τ' es la topología para X del ejercicio 7, probar que:

(a) (X, τ') está compactamente generado.

(b) Si $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ es cualquier función continua, donde (W, ξ) está compactamente generado, entonces $f : (W, \xi) \to (X, \tau')$ es continua.

4

Subcategorías correflexivas de Top

Enero 12 de 1990.

Definiciones. a) Una **subcategoría de $\mathfrak{Top}$** es una familia $\underline{A}$ de espacios topológicos tal que

$$A \in \underline{A} \text{ y } B \cong A \Rightarrow B \in \underline{A}$$

b) Una subcategoría $\underline{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es **correflexiva** si satisface las siguientes condiciones:

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Top}$ existe $A \in \underline{A}$ y una función continua $c : A \to X$ tal que

(ii) Si $f : B \to X$ es una función continua con $B \in \underline{A}$, entonces existe una función continua, y solamente una, $g : B \to A$ tal que $cg = f$.

En tal caso nos referiremos a c como a una **$\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X.**

Observaciones. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

(a) Si

$$c : A \to X \quad \text{y} \quad c' : A' \to X$$

son $\underline{A}$-correflexiones de X, entonces existe un homeomorfismo $h : A \to A'$ tal que $c'h = c$.

En efecto, de acuerdo con la definición, por ser c y c' $\underline{A}$-correflexiones de X y por ser $A, A' \in \underline{A}$, existen sendas funciones continuas h y h' que hacen conmutativo el digrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ c \nearrow & & \nwarrow c' \\ A & \underset{h'}{\overset{h}{\rightleftarrows}} & A' \end{array}$$

Siendo así, observemos que la composición $h'h$ es una función continua de A en A tal que

$$c\,(h'h) = (ch')\,h = c'h = c$$

De acuerdo con (ii), existe una única función continua con esta propiedad; pero

$$c1_A = c$$

entonces $h'h = 1_A$. Análogamente se prueba que $hh' = 1_{A'}$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

(b) Si $c : A \to X$ es una $\underline{A}$-correflexión de X y $h' : A' \to A$ es un homeomorfismo, entonces $ch' : A' \to X$ también es una $\underline{A}$-correflexión de X.

En efecto, sea $f : B \to X$ cualquier función continua, con $B \in \underline{A}$; entonces existe una única función continua $g : B \to A$ tal que $cg = f$. Sea $g' = h'^{-1}g$; entonces

$$(ch')\,g' = c\left(h'h'^{-1}\right)g = cg = f;$$

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ ch' \nearrow & \circlearrowright & \nwarrow f \\ A' & \overset{g'}{\leftarrow} & B \\ & \underset{g'_1}{\dashleftarrow} & \end{array}$$

y si $g_1' : B \to A'$ fuese otra función continua tal que $(ch')\, g_1' = f$, entonces $h'g'$ y $h'g_1'$ serían dos funciones continuas de B en A tales que

$$c\,(h'g') = f = c\,(h'g_1')$$

Entonces, debido a (ii), $h'g' = h'g_1'$ y $g' = g_1'$. Por lo tanto, ch' es una $\underline{A}$-correflexión de X. $\sharp$

Enero 15 de 1990.

$\{\emptyset\}$ es ejemplo de una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

En efecto, para cualquier espacio topológico X sabemos que existe una única función continua

$$\emptyset \overset{\phi}{\to} X$$

Esta *función vacía* es la $\{\emptyset\}$-correflexión de X, como lo hace constar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \phi \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow \phi \\ \emptyset & \overset{\phi}{\leftrightarrow} & \emptyset \end{array}$$

También es cierto que sea cual sea la subcategoría correflexiva $\underline{A}$, $\emptyset$ es uno de sus miembros.

En efecto, como para cualquier $X \in \mathfrak{Top}$ debe existir una $\underline{A}$-correflexión $c : A \to X$, con $A \in \underline{A}$, en particular, cuando X es vacío no puede ser otra que $c = \phi$, con $A = \emptyset$; $\therefore\ \emptyset \in \underline{A}$.

Obsérvese que en el primer caso ϕ no es, desde luego, necesariamente suprayectiva. El siguiente teorema muestra que cualquiera otro ejemplo que se ocurra será distinto del anterior en ese sentido.

Teorema. Si $\underline{A}$ es cualquier subcategoría correflexiva con elementos no vacíos, entonces toda $\underline{A}$-correflexión debe ser biyectiva.

Demostración. Sea X cualquier espacio topológico y sea $c_X : A \to X$ una $\underline{A}$-correflexión de X.

Si $X = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ y $\phi : A \to X$ es biyectiva.

Supongamos que $X \neq \emptyset$; entonces c_X es suprayectiva. En efecto, escojamos cualquier punto $x \in X$ y definamos para cualquier elemento no vacío $B \in \underline{A}$

$$B \overset{f}{\to} X$$

como la constante de valor x. De acuerdo con la definición de subcategoría correflexiva debe existir una, y sólo una, función continua $g : B \to A$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ c_X \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow f \\ A & \overset{g}{\leftarrow} & B \end{array}$$

Pero entonces

$$c_X\,(g\,(b)) = f\,(b) = x, \forall b \in B$$

lo cual significa que $g\,(b)$ es preimagen de x en A bajo c_X; por lo tanto, c_X es suprayectiva.

Finalmente, sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $c_X\,(a_1) = c_X\,(a_2)$ y reconsideremos la función f anterior para $x = c_X\,(a_1)$. Entonces tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ c_X \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow f \\ A & \underset{g_2}{\overset{g_1}{\leftleftarrows}} & B \end{array}$$

en el cual las funciones g_1 y g_2 son las constantes definidas para $i \in \{1,2\}$ por

$$g_i\,(b) = a_i$$

Ambas hacen conmutar el diagrama, pero éste sólo conmuta bajo la acción de una función única. En consecuencia se trata de la misma constante, i.e. $a_1 = a_2$. Por lo tanto, c_X es inyectiva. $\sharp$

Debido a este resultado se habla de las subcategorías correflexivas con elementos no vacíos como de **subcategorías bicorreflexivas** ya que, como acabamos de ver, en ellas todas las $\underline{A}$-correflexiones son biyectivas.

Enero 17 de 1990.

Teorema. La subcategoría de los espacios discretos es la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Demostración. Sea $\underline{D}$ la subcategoría de los espacios discretos.

(a) $\underline{D}$ es bicorreflexiva.

Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; si τ_d es la topología discreta para X, entonces

$$1_X : (X,\tau_d) \to (X,\tau)$$

es una $\underline{D}$-correflexión porque es continua, $(X,\tau_d) \in \underline{D}$ y si $f : (W,\xi) \to (X,\tau)$ es continua, con $(W,\xi) \in \underline{D}$, entonces $f : (W,\xi) \to (X,\tau_d)$ es la única función continua para la cual

$$\begin{tikzcd} & (X,\tau) & \\ (X,\tau_d) \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & (W,\xi) \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

Además $\underline{D}$ tiene elementos no vacíos; por lo tanto es bicorreflexiva.

(b) $\underline{D}$ es la mínima bicorreflexiva.

Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) cualquier espacio discreto. Entonces existe una $\underline{A}$-correflexión

$$c_{(X,\tau)} : A \to (X,\tau)$$

que, como sabemos, es continua y biyectiva. Como (X,τ) es discreto, también $c^{-1}_{(X,\tau)}$ es continua; por lo tanto $c_{(X,\tau)}$ es un homeomorfismo y $(X,\tau) \in \underline{A}$. Por lo tanto, $\underline{D} \subseteq \underline{A}$. $\sharp$

Observaciones. (a) $\mathfrak{Top}$ es subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Si $X \in \mathfrak{Top}$, $1_X : X \to X$ es una $\mathfrak{Top}$-correflexión.

(b) Si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y X es cualquier espacio topológico, entonces una de las $\underline{A}$-correflexiones de X es de la forma 1_X.

En efecto, si

$$c : (A,\xi) \to (X,\tau)$$

es una $\underline{A}$-correflexión de (X,τ), sea

$$\tau' = \{c\,(U) : U \in \xi\}$$

Como c es biyectiva, τ' es una topología para X y

$$c^{-1} : (X,\tau') \to (A,\xi)$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, $(X,\tau') \in \underline{A}$ y $cc^{-1} = 1_X$ es una $\underline{A}$-correflexión de (X,τ). $\sharp$

Enero 19 de 1990.

La subcategoría de los espacios finitamente generados es bicorreflexiva.

En efecto, debido a los resultados de los ejercicios 5 y 6, para cualquier espacio topológico (X,τ) se tiene la topología

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau \mid F, \forall F \subseteq X . \ni . \#(F) < \infty\}$$

según la cual (X,τ') está finitamente generado,

$$1_X : (X,\tau') \to (X,\tau)$$

es continua, y si $f : (W,\xi) \to (X,\tau)$ es continua y (W,ξ)está finitamente generado, entonces $f : (W,\xi) \to (X,\tau')$ es la única función continua para la cual

$$\begin{array}{ccc} & (X,\tau) & \\ 1_X \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow f \\ (X,\tau') & \xleftarrow{f} & (W,\xi) \end{array}$$

Análogamente, pero apoyándonos en los resultados de los ejercicios 7 y 10, la subcategoría de los espacios compactamente generados es bicorreflexiva.

Lema. Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ está cerrada bajo la formación de retractos.

Demostración. Sean, X un espacio topológico, $\underline{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva y

$$r : A \to X, \text{ con } A \in \underline{A}$$

una retracción arbitraria. Entonces, si $c_X : A' \to X$ es una $\underline{A}$-correflexión de X, existe una función única y continua $f : A \to A'$ que hace:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ r \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow c_X \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

Luego, c_X también es retracción y, por lo tanto, es un homeomorfismo, de modo que $X \in \underline{A}$. $\sharp$

<u>*Doceava tanda de ejercicios:*</u> 1. Si $r : X \to Y$ es una retracción y $r = gf$, donde

$$f : X \to Z \quad \text{y} \quad g : Z \to Y$$

son continuas, probar que g es una retracción.

2. Probar que toda retracción inyectiva es homeomorfismo.

3. Probar que

$$\underline{A} = \{X \in \mathfrak{Top} : X \text{ es discreto o indiscreto}\}$$

es una subcategoría que no es bicorreflexiva.

Teorema. Toda subcategoría bicorreflexiva distinta de $\underline{D}$ tiene entre sus miembros al espacio de Sierpinski.

Demostración. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva distinta de $\underline{D}$. Entonces existe $A \in \underline{A}$ que no es discreto ni indiscreto (ejer.3); por lo tanto, existe un abierto U de A tal que

$$\varnothing \neq U \neq A$$

Sea

$$p_U : A \;\to\; \overset{\displaystyle S}{\overset{\shortparallel}{\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}\cdot\\ \cdot\end{matrix}}}}}$$

el cociente que identifica en un punto cada uno de los subconjuntos U y $A - U$. Entonces $p_U(U)$ es abierto en S y no es cerrado. Por lo tanto, S es el espacio de Sierpinski; y si $c : A' \to S$ es su $\underline{A}$-correflexión, entonces existe una única $f : A \to A'$ continua y tal que $cf = p_U$. Y como todo cociente es un sumidero final y c^{-1} es tal que $c^{-1}p_U = f$, entonces c^{-1} es continua y c es un homeomorfismo. Por lo tanto, $S \in \underline{A}$. $\sharp$

Enero 29 de 1990.

<u>*Ejercicio:*</u> 4. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva arbitraria. Probar que existen, un cociente $g : X \to Z$ y una función continua y biyectiva $h : Z \to Y$ tales que $f = hg$ (f y g tienen las mismas fibras).

TEOREMA. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Entonces:

(a) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de cocientes.

(b) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de coproductos.

Demostración. (a) Sea $g : A \to X$ cualquier cociente, con $A \in \underline{A}$; si $c_X : A' \to X$ es una $\underline{A}$-correflexión de X, entonces existe $f : A \to A'$ continua tal que

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ g \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow c_X \\ A & \overset{f}{\to} & A' \end{array}$$

Pero entonces c_X^{-1} es continua porque lo es $c_X^{-1}g$ y g es un cociente. Por lo tanto, c_X es un homeomorfismo y $X \in \underline{A}$.

(b) Sea $(\eta_i : A_i \to X)_I$ un coproducto, donde $A_i \in \underline{A}, \forall i \in I$; hay que probar que $X \in \underline{A}$. Sea $c_X : A \to X$ una $\underline{A}$-correflexión de X; entonces para toda $i \in I$ existe $f_i : A_i \to A$ continua tal que $c_X f_i = \eta_i$. Por la definición de coproducto existe una función continua $g : X \to A$ tal que $g\eta_i = f_i, \forall i \in I$; entonces $c_X g : X \to X$ es una función continua tal que

$$(c_X g)\,\eta_i = c_X\,(g\eta_i) = c_X f_i = \eta_i$$

Pero al ser $(\eta_i)_I$ un coproducto, 1_X es la única función continua que hace conmutar al triángulo

$$\begin{array}{ccc} & A_i & \\ \eta_i \swarrow & \circlearrowleft & \searrow \eta_i \\ X & \overset{1_X}{\to} & X \end{array}$$

Por lo tanto, $c_X g = 1_X$. Esto implica que g (que es continua) es la función inversa de c_X. Por lo tanto, c_X es un homeomorfismo; por lo tanto, $X \in \underline{A}$. $\sharp$

TEOREMA. Sea $\underline{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos. Son equivalentes:

a) $\underline{A}$ es bicorreflexiva.

b) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de cocientes y coproductos.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ ✓ (teorema anterior).

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea X cualquier espacio topológico. Si $X = \varnothing$, entonces $X \in \underline{A}$ porque $\varnothing$ es el coproducto de la familia vacía de $\underline{A}$.

Supongamos a X no vacío. Sea $\mathcal{S} = (f_i : A_i \to X)_I$ el sumidero de todas las funciones continuas de elementos de $\underline{A}$ en X. Hay que probar que existe una función continua $h : A \to X$, con $A \in \underline{A}$, y que para cada miembro de $\mathcal{S}$ existe una única función continua $g_i : A_i \to A$ tal que $hg_i = f_i$. Sea $(\eta_i : A_i \to C)_I$ el coproducto de $(A_i)_I$; por (b), $C \in \underline{A}$, y por tratarse de un coproducto existe una única función continua $f : C \to X$ tal que $f\eta_i = f_i, \forall i \in I$; por lo tanto, f es suprayectiva[1]. Por el ejercicio 4 existen, un cociente $g : C \to Z$ y una biyección continua $h : Z \to X$ tales que $f = hg$; al factorizar a f, que es única, también estas funciones son únicas. Haciendo $Z = A$ tenemos, debido a (b), que $A \in \underline{A}$, y haciendo $g_i = g\eta_i$ terminamos porque entonces $f_i = hg_i, \forall i \in I$. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 31 de enero de 1990.

<u>*Ejercicio*</u> 5. Sea $\underline{A}$ la subcategoría de los espacios compactamente generados. Si (X, τ) es cualquier espacio topológico y $1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$ es una $\underline{A}$-correflexión de (X, τ), pruebe que un subconjunto K de X es compacto en (X, τ) si, y sólo si, K es compacto en (X, τ').

---

[1] Aclárase esto al pensar que en $\mathcal{S}$ se hallan cada una de las constantes de valor $x, \forall x \in X$.

5

Subcategorías reflexivas de Top

Definiciones. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría de $\mathfrak{Top}$.

(a) Una **$\underline{A}$-reflexión** de un espacio X es una función continua $r : X \to A$ tal que:

(i) $A \in \underline{A}$;

(ii) Para toda función continua $f : X \to A'$, con $A' \in \underline{A}$, existe una función continua, y solamente una, $g : A \to A'$ tal que $gr = f$.

En tal caso se dice que X es **$\underline{A}$-reflejable** y el espacio A recibe el nombre de **$\underline{A}$-reflector** de X.

(b) Si $\underline{A}$ es tal que todo espacio topológico es $\underline{A}$-reflejable, entonces $\underline{A}$ es una **subcategoría reflexiva** de $\mathfrak{Top}$.[1]

<u>*Ejemplo:*</u> Sea $\underline{A}$ la subcategoría de los espacios singulares; entonces $\underline{A}$ es reflexiva.

En efecto, si X es cualquier espacio topológico, entonces la función constante $r : X \to \{z\}$ es una $\underline{A}$-reflexión de X.

Observaciones. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría reflexiva de $\mathfrak{Top}$.

(a) Si $r : X \to A$ es una $\underline{A}$-reflexión de X y $h : A \to A'$ es un homeomorfismo, entonces $hr : X \to A'$ también es una $\underline{A}$-reflexión de X.

En efecto, por ser r una $\underline{A}$-reflexión de X tenemos que si $f : X \to A''$ es continua y $A'' \in \underline{A}$, entonces existe una única función continua $g : A \to A''$ tal que $gr = f$. Sea $g' : A' \to A''$ la función $g' = gh^{-1}$; entonces g' es continua y tenemos

$$g'(hr) = \left(gh^{-1}\right)(hr) = gr = f$$

Además, si $g'_1 : A' \to A''$ es continua y tal que $g'_1(hr) = f$, entonces $(g'_1 h)\, r = gr = f$; $\therefore\ g'_1 h = g$; $\therefore\ g'_1 = gh^{-1} = g'$; de modo que g' es única, y como f es arbitraria, entonces hr es otra $\underline{A}$-reflexión de X.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "hr"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
A' \arrow[rr, shift left, "g'"] \arrow[rr, shift right, "g'_1"'] & {} & A''
\end{tikzcd}$$

(b) Si

$$r : X \to A \quad \text{y} \quad r' : X \to A'$$

son dos $\underline{A}$-reflexiones de X, entonces existe un homeomorfismo (único) $h : A \to A'$ tal que $hr = r'$.

En efecto, para estas $\underline{A}$-reflexiones existen sendas funciones

$$h : A \to A' \quad \text{y} \quad h' : A' \to A$$

[1]Se trata, desde luego, de la situación dual a las subcategorías correflexivas; comparando con ellas, es como si en cada diagrama las flechas se voltearan.

únicas y continuas, tales que vuelven conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r'"] & \\ A \arrow[rr, shift left, "h"] & & A' \arrow[ll, shift left, "h'"] \end{tikzcd}$$

Entonces

$$(h'h)\, r = h'\,(hr) = h'r' = r$$

y como la única función con que puede conseguirse esto es 1_A, entonces $h'h = 1_A$. Análogamente, $hh' = 1_{A'}$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

(c) Si $X \in \underline{A}$, entonces 1_X es una $\underline{A}$-reflexión.

Febrero 2 de 1990.

<u>*Ejercicio*</u> 6. Si

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \arrow[ll, "h"'] \end{tikzcd}$$

es un triángulo conmutativo y f es una inmersión, probar que también g es una inmersión.

TEOREMA. La subcategoría de los espacios singulares es la mínima subcategoría reflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Demostración. Sea $\underline{A_0}$ la subcategoría de los espacios singulares; se sabe que $\underline{A_0}$ es reflexiva, por lo tanto basta probar que está contenida en cualquiera otra. Sea entonces $\underline{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{Top}$ arbitraria y sean $X \in \underline{A_0}$ y $X \xrightarrow{r} A$ una $\underline{A}$-reflexión de X. Entonces 1_A es la única función continua que hace conmutar el triángulo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r"] & \\ A & & A \arrow[ll, "1_A"'] \end{tikzcd}$$

Sin embargo, es claro que para la constante $c : A \to A$ de valor $r(X)$ tenemos $cr = r$. Luego

$$1_A = c$$

lo cual significa que A es singular. Por lo tanto, r es un homeomorfismo; por lo tanto, $X \in \underline{A}$. $\sharp$

Definiciones. Sea $\underline{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{Top}$. Si E es una clase de funciones continuas y todas las $\underline{A}$-reflexiones pertenecen a E, diremos que $\underline{A}$ **es** E**-reflexiva.** Así:

$i)$ Si E es la clase de las funciones continuas y suprayectivas, entonces una subcategoría E-reflexiva se llama **epirreflexiva**.

$ii)$ Si E es la clase de los cocientes, entonces una subcategoría E-reflexiva se llama **cocienter-reflexiva**.

$iii)$ Si E es la clase de las biyecciones continuas, entonces una subcategoría E-reflexiva se llama **birreflexiva**.

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 7 de febrero de 1990.

Se denotó con $\underline{A}_0$ a la subcategoría de los espacios singulares. Sea $\underline{A}_0' = \{\emptyset\} \cup \underline{A}_0$; $\underline{A}_0'$ es la mínima subcategoría epirreflexiva. $\underline{A}_0$ no es epirreflexiva porque la única $\underline{A}_0$-reflexión del espacio vacío es la función vacía $\emptyset \xrightarrow{\phi} \{x\}$ que no es suprayectiva. En $\mathfrak{Top}$ se pueden dar otros ejemplos de subcategorías que no son epirreflexivas pero son muy complicados.

Teorema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva; entonces

a) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de subespacios.

b) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de productos.

Demostración. (a) Sea $X \subseteq A \in \underline{A}$ y supongamos que $e : X \to A'$ es una $\underline{A}$-reflexión de X; entonces, para la inclusión $\iota : X \hookrightarrow A$ existe $f : A' \to A$ continua tal que

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "e"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ A & & A' \arrow[ll, "f"'] \end{tikzcd}$$

Por el ejercicio 6, e es una inmersión; por lo tanto, e es un homeomorfismo (porque e es epi); por lo tanto, $X \in \underline{A}$.

(b) Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de miembros de $\underline{A}$ y sea $e : \prod_{i \in I} A_i \to A$ una $\underline{A}$-reflexión de su producto; entonces para cada i-proyección p_i existe una función continua $f_i : A \to A_i$ tal que

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i \in I} A_i \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "e"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ A_i & & A \arrow[ll, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto topológico existe una función continua $f : A \to \prod_{i \in I} A_i$ tal que $p_i f = f_i, \forall i \in I$. Entonces $fe : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} A_i$ es una función continua tal que

$$p_i\,(fe) = (p_i f)\,e = f_i e = p_i$$

Pero por la propiedad universal del producto topológico la única función que hace conmutativo el triángulo

$$\begin{tikzcd} & A_i & \\ \prod_{i \in I} A_i \arrow[ur, "p_i"] & \circlearrowright & \prod_{i \in I} A_i \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

es $1_{\prod_{i \in I} A_i}$. Por lo tanto, $fe = 1_{\prod_{i \in I} A_i}$; por lo tanto, e es inyectiva; por lo tanto, e es un homeomorfismo; por lo tanto, $\prod_{i \in I} A_i \in \underline{A}$. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Viernes 9 de febrero de 1990.

Teorema. Si $\underline{A}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ cerrada bajo la formación de subespacios y de productos topológicos, entonces $\underline{A}$ es epirreflexiva.

Demostración. Sea X un espacio topológico arbitrario y sea $\mathcal{F} = (f_i : X \to A_i)_I$ la fuente en $\mathfrak{Top}$ de todas las funciones de dominio X y codominio en $\underline{A}$. Si $\left(\prod_{i\in I} A_i, (p_i)_I\right)$ es un producto topológico de $(A_i)_I$, entonces $\prod_{i\in I} A_i \in \underline{A}$ y, aplicando la propiedad universal de este producto, tenemos que existe una función continua $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que $p_i f = f_i, \forall i \in I$. Esta f es, por consiguiente, una $\underline{A}$-reflexión de X; para obtener una epirreflexión, restrinjámosle el codominio hasta su imagen e incluyamos ésta como subespacio de aquél mediante la inclusión (valga la redundancia).

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dl, "f\,|^{f(X)}"'] \arrow[d, "f"] & A_i \\ f(X) \arrow[r, hook, "\eta"] & \prod_{i\in I} A_i \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Aplicando la totalidad de la hipótesis tenemos que $f(X) \in \underline{A}$ y entonces, como dijimos, $f\,|^{f(X)}$es la $\underline{A}$-epirreflexión buscada, pues para cada $f_i \in \mathcal{F}$ tenemos

$$(p_i \eta)\, f\,|^{f(X)} = f_i$$

o sea que $\underline{A}$ es una subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$. $\sharp$

Corolario. Las subcategorías T_0, T_1 y T_2 son epirreflexivas.

Febrero 12 de 1990.

Ejercicios: 7. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Para cada $x \in X$ sea $I(x)$ la unión de todos los subespacios indiscretos de (X, τ) que contienen a x; probar que

$$I(x) \cap I(z) \neq \varnothing \Rightarrow I(x) = I(z)$$

8. Para $x, z \in (X, \tau)$ pruebe que son equivalentes:
(a) $\overline{\{x\}} = \overline{\{z\}}$
(b) $I(x) = I(z)$

5.1 La T_0-reflexión

Teorema. Sea X un espacio topológico arbitrario y sea $r_0 : X \to X\,/\sim$ el cociente cuyas fibras son los subconjuntos $I(x)$ del ejercicio 7 ($\sim$ es la relación de equivalencia en X cuyas clases son estos conjuntos). Entonces r_0 es la T_0-reflexión de X, (en particular, T_0 resulta cocienterreflexiva).

Demostración. (i) $X\,/\sim \in T_0, \forall X \in \mathfrak{Top}$. En efecto, si $I(x), I(z) \in X\,/\sim$ son distintos, entonces, por el ejercicio 8, también $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{z\}}$;

$$\therefore \exists y \in \overline{\{x\}} .\ni. y \notin \overline{\{z\}};$$

$$\therefore \exists U \in \mathcal{N}_y^\circ .\ni. z \notin U;$$

pero

$$y \in \overline{\{x\}} \Rightarrow x \in U;$$

$$\therefore x \in U \cap I(x) = I(x)$$

por ser indiscreto. Y como todo abierto U de X es unión de clases $I(u)$, entonces r_0 es una función abierta. Por lo tanto, $r_0(U)$ es una vecindad abierta de $I(x)$ en $X/\sim$ e $I(z) \notin r_0(U)$; $\therefore X/\sim \in T_0$.

(ii) r_0 es una T_0-reflexión de X. Sea $f : X \to A$ una función continua, con $A \in T_0$; entonces $f(I(x))$ es un punto en A, $\forall x \in X$, es decir, las fibras de r_0 están contenidas en las fibras de f. Por lo tanto, existe $g : X/\sim \to A$ continua tal que $gr_0 = f$; por lo tanto, r_0 es una T_0-reflexión. $\sharp$

Febrero 16 de 1990.

5.2 Caracterización de las subcategorías birreflexivas de Top

Teorema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$; son equivalentes:

(a) $\underline{A}$ es birreflexiva.

(b) $\underline{A}$ contiene a todos los espacios indiscretos.

(c) $\underline{A}$ contiene a un espacio indiscreto con dos o más puntos.

(d) $\underline{A} \nsubseteq T_0$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea X cualquier espacio indiscreto. Por hipótesis la $\underline{A}$-reflexión de X, $r_X : X \to A$, es biyectiva; entonces A es indiscreto y $r_X^{-1} : A \to X$ resulta continua. Por lo tanto, r_X es un homeomorfismo; $\therefore X \in \underline{A}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) $\underline{A}$ contiene un espacio indiscreto con dos puntos porque, según (b), los contiene a todos.

(c) $\Rightarrow$ (d) $\underline{A} \nsubseteq T_0$ porque, según (c), contiene a un espacio indiscreto.

(d) $\Rightarrow$ (a) Por (d), existe un espacio topológico $X \in \underline{A}$ que no es T_0; por lo tanto, existen dos puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ tales que toda vecindad abierta de uno de ellos es vecindad abierta del otro. En consecuencia, el subespacio $\{x_1, x_2\}$ (con la topología inducida) es indiscreto, y como $\underline{A}$ es cerrada bajo la formación de subespacios ($\underline{A}$ es epirreflexiva), entonces $\{x_1, x_2\} \in \underline{A}$. Nos valdremos de esto para probar que todas las $\underline{A}$-reflexiones de esta subcategoría son funciones inyectivas.

Sean, Z cualquier espacio topológico, $r_Z : Z \to B$ una $\underline{A}$-reflexión de Z, y supongamos que Z tiene dos puntos distintos, z_1 y z_2, tales que

$$r_Z(z_1) = r_Z(z_2)$$

Si $f : Z \to \{x_1, x_2\}$ es una función tal que $f(z_i) = x_i$, entonces f es continua y deberá existir $g : B \to \{x_1, x_2\}$, continua también, tal que $gr_Z = f$. Pero entonces g deja de ser función, pues aplica dos valores distintos, x_1 y x_2, al punto $b = r_Z(z_i)$. Esta contradicción nos lleva a reconocer que si $z_1 \neq z_2$ entonces también $r_Z(z_1) \neq r_Z(z_2)$, es decir, que r_Z es inyectiva. Por lo tanto, $\underline{A}$ es birreflexiva. $\sharp$

Teorema. Sea $(\underline{A}_i)_I$ cualquier familia de subcategorías epirreflexivas de $\mathfrak{Top}$ y sea $\underline{A} = \bigcap_{i \in I} \underline{A}_i$; entonces $\underline{A}$ es epirreflexiva. En particular, si cada $\underline{A}_i$ es birreflexiva, entonces $\underline{A}$ también lo es.

Demostración. $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de subespacios ya que

$$A \in \underline{A} \text{ y } X \subseteq A \Rightarrow X \in \underline{A}_i, \forall i \in I$$

Para asegurar la epirreflexividad falta probar la cerradura bajo el producto. Sea $(X_j)_J$ cualquier familia de miembros de $\underline{A}$ y sea $\prod_{j \in J} X_j$ su producto topológico; entonces $(X_j)_J$ es una familia de miembros de $\underline{A}_i, \forall i \in I$;

$$\therefore \prod_{j \in J} X_j \in \underline{A}_i, \forall i \in I; \therefore \prod_{j \in J} X_j \in \underline{A}$$

Finalmente, si cada $\underline{A}_i$ es birreflexiva entonces, por el teorema anterior, cada una contiene a todos los espacios indiscretos; luego, $\underline{A}$ también los contiene a todos y, por lo tanto, es birreflexiva. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 19 de febrero de 1990.

Definición. Sea $\underline{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ arbitraria. Entonces:

(i) **La categoría epirreflexiva generada por** $\underline{A}$ es

$$\underline{A}' = \cap\{\underline{B} \subseteq \mathfrak{Top} \mid \underline{B} \text{ es epirreflexiva y } \underline{A} \subseteq \underline{B}\}$$

(ii) **La categoría birreflexiva generada por** $\underline{A}$ es

$$\underline{A}'' = \{\underline{B} \subseteq \mathfrak{Top} \mid \underline{B} \text{ es birreflexiva y } \underline{A} \subseteq \underline{B}\}$$

Ejemplos: 1. Si $\underline{A} = \emptyset$, entonces $\underline{A}'$ es la mínima subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$, es decir

$$\underline{A}' = \{\emptyset\} \cup \underline{A_0} = \underline{A_0}'$$

(que también es la categoría epirreflexiva generada por $\underline{A_0}$).

2. Si $\underline{A} = \emptyset$, entonces $\underline{A}''$ es la categoría de los espacios indiscretos que denotaremos por $\mathfrak{Ind}$.

Dem. i) $\mathfrak{Ind}$ es birreflexiva.

Sea (X,τ) cualquier espacio topológico. Si τ_i es la topología indiscreta para X, entonces $1_X : (X,\tau) \to (X,\tau_i)$ es una $\mathfrak{Ind}$-birreflexión. En efecto, para todo $(Y,\sigma) \in \mathfrak{Ind}$ tenemos

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{1_X} & (X,\tau_i) \\ f\searrow & \circlearrowleft & \swarrow f \\ & (Y,\sigma) & \end{array}$$

ii) En consecuencia, $\mathfrak{Ind}$ es la subcategoría birreflexiva mínima porque es la intersección de todas las subcategorías birreflexivas.

A continuación enunciaremos un lema cuya demostración omitiremos un rato.

Lema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva contenida en T_0; ($\therefore$ $\underline{A}$ no es birreflexiva, pues no contiene indiscretos con más de un punto). Si $\underline{B}$ es la categoría birreflexiva generada por $\underline{A}$, entonces $\underline{A} = T_0 \cap \underline{B}$.$_{[\ \sharp]}$

Lema. Considérense dos subcategorías epirreflexivas de $\mathfrak{Top}$ cualesquiera $\underline{A}_1$ y $\underline{A}_2$. Si $\underline{A} = \underline{A}_1 \cap \underline{A}_2$, entonces, para cualquier espacio topológico X, toda $\underline{A}$-reflexión de X es una composición

$$X \xrightarrow{r_1} A_1 \xrightarrow{r_2} A$$

en la que r_1 es una $\underline{A}_1$-reflexión de X y r_2 una $\underline{A}$-reflexión de $A_1 \in \underline{A}_1$.

Demostración. Sea $r : X \to A$ cualquier $\underline{A}$-reflexión de X; entonces $A \in \underline{A}_1$, y si $r_1 : X \to A_1$ es una $\underline{A}_1$-reflexión de X, entonces existe $r_2 : A_1 \to A$ continua y tal que $r_2 r_1 = r$. Aseguramos que r_2 es una $\underline{A}$-reflexión de A_1. En efecto, si $f : A_1 \to B$ es continua y $B \in \underline{A}$, entonces $fr_1 : X \to B$ también es continua y, dado que r es una $\underline{A}$-reflexión de X, existe otra función continua, $g : A \to B$, tal que $gr = fr_1$.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & r\swarrow & \circlearrowleft & \searrow r_1 & \\ A & & \xleftarrow{r_2} & & A_1 \\ & g\searrow & \circlearrowleft & \swarrow f & \\ & & B & & \end{array}$$

$$\therefore\ g(r_2 r_1) = (gr_2)\, r_1 = fr_1$$

de lo cual, debido a la suprayectividad de r_1, se tiene $gr_2 = f$, que es a lo que se tenía llegar. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 21 de febrero de 1990.

5.3 Descripción de las epirreflexiones

TEOREMA. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

a) Si $\underline{A} \nsubseteq T_0$, entonces toda $\underline{A}$-reflexión es continua y biyectiva.

b) Si $\underline{A} \subseteq T_0$, entonces toda $\underline{A}$-reflexión es la composición de una biyección continua con la T_0-reflexión de su codominio.

Demostración. (a) Se sabe que $\underline{A}$ es birreflexiva ssi $\underline{A} \nsubseteq T_0$; por consiguiente, en este caso toda $\underline{A}$-reflexión es una función continua y biyectiva.

(b) Cuando $\underline{A} \subseteq T_0$ sabemos que $\underline{A} = T_0 \cap \underline{B}$, donde $\underline{B}$ es birrefexiva. Aplicando el lema anterior, una $\underline{A}$-reflexión de un espacio X será la composición

$$X \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_0} A$$

donde r_1 es la $\underline{B}$-reflexión de X y r_0 es la T_0-reflexión de B. $\sharp$

Ejercicio: 9. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva. Para $X \in \mathfrak{Top}$ arbitrario sean, $r : X \to A_0$ una $\underline{A}$-reflexión de X y $\mathcal{F} = (f_i : X \to A_i)_I$ la fuente de todas las funciones continuas de dominio X y codominio en $\underline{A}$. Si $\mathcal{F}' = (f_i' : A_0 \to A_i)_I$ es la fuente tal que $f_i' r = f_i, \forall i \in I$, probar que $\mathcal{F}'$ es inicial.

Febrero 23 de 1990.

Ejercicio: 10. Sea $\mathcal{F} = (f_i : X \to A_i)_I$ cualquier fuente en $\mathfrak{Top}$. Pruebe:

a) Si $\mathcal{F}$ es inicial y X es T_0, entonces $\mathcal{F}$ es monofuente.

b) Si $\mathcal{F}$ es monofuente y $(A_i)_I \subseteq T_0$, entonces $X \in T_0$.

Y para completar la docena:

Ejercicio *11*. Pruebe que toda función continua de dominio indiscreto es una fuente inicial.

12. Si $e : X \to Y$ es continua, suprayectiva e inicial, pruebe que e es una fuente inicial.

LEMA. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Si X es un espacio topológico y existe una fuente inicial $\mathcal{F}$ de dominio X y codominio en $\underline{A}$, entonces toda $\underline{A}$-reflexión de X es una retracción.

Demostración. Sea $e : X \to A$ cualquier $\underline{A}$-reflexión de X. Por hipótesis existe una fuente inicial

$$\mathcal{F} = (f_i : X \to A_i)_I \text{, con } A_i \in \underline{A}, \forall i \in I$$

En consecuencia, para cada $f_i \in \mathcal{F}$ existe una función continua $g_i : A \to A_i$ tal que $g_i e = f_i$. Entonces e resulta inicial porque $\mathcal{F}$ se factoriza a través de ella. En vista del ejercicio *12*, e también resulta una retracción. $\sharp$

LEMA. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Si X es un espacio topológico y existe una fuente inicial $\mathcal{F}$ de dominio X y codominio en $\underline{A}$, se tiene:

(i) Si $\underline{A} \nsubseteq T_0$, entonces $X \in \underline{A}$.

(ii) Si $\underline{A} \subseteq T_0$, entonces $X \in \underline{A}$ si, y sólo si, $X \in T_0$.

Demostración. (i) Si $\underline{A} \nsubseteq T_0$, se sabe que $\underline{A}$ es birreflexiva. Entonces, a consecuencia del lema anterior, toda $\underline{A}$-reflexión es un homeomorfismo; por lo tanto, $X \in \underline{A}$.

(ii) Si $X \in \underline{A}$, entonces $X \in T_0$. Supongamos que $X \in T_0$; si $e : X \to A$ es una $\underline{A}$-reflexión de X, entonces e es inicial, como se probó en el lema anterior, y por el ejercicio 10(a), e es inyectiva. Por lo tanto, como en el caso (i), e es un homeomorfismo y $X \in \underline{A}$. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

5.4 Descripción de la categoría birreflexiva generada

Lunes 5 de marzo de 1990.

Teorema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Entonces la categoría birreflexiva generada por $\underline{A}$ es

$$\underline{B} = \{X \in \mathfrak{Top} : \text{existe una fuente inicial de dominio } X \text{ y codominio en } \underline{A}\}$$

Demostración. $a)$ $\underline{B}$ es birreflexiva.

Sean, $X \in \underline{B}$, $A \subseteq X$ y $j : A \hookrightarrow X$. Por hipótesis, existe una fuente inicial

$$\mathcal{F} = (f_i : X \to A_i)_I \text{, con } A_i \in \underline{A}, \forall i \in I.$$

También j es una fuente inicial porque es la inclusión; luego, también es inicial la fuente

$$\mathcal{F}j = (f_i j : A \to A_i)_I$$

Por lo tanto $A \in \underline{B}$, lo cual demuestra que $\underline{B}$ está cerrada bajo la formación de subespacios.

Sea $(B_i)_I$ cualquier subfamilia de elementos de $\underline{B}$, y sea $\left(\prod\limits_{i \in I} B_i, (p_i)_I\right)$ su producto topológico. Como para cada $i \in I$ existe una fuente inicial

$$\mathcal{F}_i = (f_{ij} : B_i \to A_{ij})_{J_i} \text{ con } A_{ij} \in \underline{A}, \forall i \in I \text{ y } \forall j \in J_i$$

se tiene que

$$\prod_{i \in I} B_i \xrightarrow{p_i} B_i \quad \begin{array}{l} \overset{f_{ij}}{\to} A_{ij} \\ \rightrightarrows \vdots \\ \overset{f_{ik}}{\to} A_{ik} \end{array}$$

también es una fuente inicial. En efecto, si $g : X \to \prod\limits_{i \in I} B_i$ es cualquier función tal que $(f_{ij} p_i)\, g$ es continua, $\forall i \in I, \forall j \in J_i$, entonces, para $i \in I$ fija, $f_{ij}\,(p_i g)$, con $j \in J_i$, es continua y, por ser $\mathcal{F}_i$ inicial, resulta $p_i g$ continua, para cada $i \in I$. Como además $\left(\prod\limits_{i \in I} B_i, (p_i)_I\right)$ constituye una fuente inicial, entonces g es continua. Por lo tanto, la fuente $(f_{ij} p_i)_I$ es inicial y de codominio en $\underline{A}$. Por lo tanto, $\prod\limits_{i \in I} B_i \in \underline{B}$, es decir, $\underline{B}$ está cerrada bajo la formación de productos topológicos. Por lo tanto, $\underline{B}$ es epirreflexiva.

$\mathfrak{Ind} \subseteq \underline{B}$, porque, por el ejercicio *11*, toda función continua de dominio indiscreto y codominio en $\underline{A}$ es una fuente inicial. Por lo tanto, $\underline{B}$ es birreflexiva. Además, dado que $1_A : A \to A$ es una fuente inicial para todo $A \in \underline{A}$, resulta que $\underline{A} \subseteq \underline{B}$.

$b)$ Sea $\underline{B}'$ cualquier categoría birreflexiva que contenga a $\underline{A}$. Si $B \in \underline{B}$, entonces, por (i) del lema anterior, $B \in \underline{A}$; $\therefore B \in \underline{B}'$; $\therefore \underline{B} \subseteq \underline{B}'$. Por lo tanto, $\underline{B}$ es la categoría birreflexiva generada por $\underline{A}$. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Viernes 9 de marzo de 1990.

Tenemos pendiente la demostración de un lema.

Lema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva contenida en T_0. Si $\underline{B}$ es la categoría birreflexiva generada por $\underline{A}$, entonces $\underline{A} = T_0 \cap \underline{B}$.

Demostración. Es claro que $\underline{A} \subseteq T_0 \cap \underline{B}$. Sea $B \in T_0 \cap \underline{B}$, entonces, por el teorema anterior, existe una fuente inicial $\mathcal{F}$ de dominio B y codominio en $\underline{A}$. Por (ii) del lema anterior, $B \in \underline{A}$. Por lo tanto, también $T_0 \cap \underline{B} \subseteq \underline{A}$. $\sharp$

Lema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva contenida en T_0. Si $\underline{B}$ es la categoría birreflexiva generada por $\underline{A}$, y $B \in \underline{B}$, entonces la T_0-reflexión de B tiene codominio en $\underline{A}$.

Demostración. Sea $r_0 : B \to A$ la T_0-reflexión de B. Por el teorema anterior y por un lema, r_0 es una retracción; por lo tanto, existe $s_0 : A \to B$ continua y tal que $r_0 s_0 = 1_A$. Pero tada sección es inmersión; por lo tanto, A es homeomorfo a $s_0(A)$; $\therefore$ $s_0(A) \in T_0 \cap \underline{B}$. Por el lema anterior, $A \in \underline{A}$. $\sharp$

Teorema. Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría epirreflexiva contenida en T_0. Si $\underline{B}$ es la categoría birreflexiva generada por $\underline{A}$ y X es cualquier espacio topológico, entonces la composición

$$X \xrightarrow{b} B \xrightarrow{r_0} A$$

de la $\underline{B}$-reflexión b de X con la T_0-reflexión r_0 de B es una $\underline{A}$-reflexión de X.

Demostración. Sea $r = r_0 b$; entonces r es continua y suprayectiva y, por el lema anterior, $A \in \underline{A}$. Sea $f : X \to A'$ cualquier función continua, con $A' \in \underline{A}$; entonces $A' \in \underline{B}$. Por lo tanto, existe $g : B \to A'$ única y continua tal que $gb = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "r_0"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[dl, "h"] \\ & A' & \end{tikzcd}$$

Por ser $A' \in \underline{A}$, A' es T_0; por lo tanto, existe otra única función continua $h : A \to A'$ tal que $hr_0 = g$. Por lo tanto

$$hr = (hr_0)\, b = gb = f$$

lo que significa que r es una $\underline{A}$-reflexión de X, como se quería probar. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 12 de marzo de 1990.

A continuación, algunas definiciones sobre factorización de fuentes.

Definiciones: Sea $\mathcal{F} = (f_i : X \to X_i)_I$ una fuente cualquiera y supongamos que para cada $i \in I$ existe una fuente $\mathcal{F}_i = (f_{ij} : X_i \to X_{ij})_{J_i}$; entonces

a) **La composición de $\mathcal{F}$ con la fuente $\mathcal{F}_i$** es la fuente

$$\mathcal{F}_i \mathcal{F} = (f_{ij} f_i : X \to X_{ij})_{j \in J_i}$$

b) **La composición de $\mathcal{F}$ con la familia $(\mathcal{F}_i)_I$** es la fuente

$$(\mathcal{F}_i)_I \, \mathcal{F} = (f_{ij} f_i : X \to X_{ij})_{i \in I,\ j \in J_i}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_{i'}"] & X_i \arrow[r, "f_{ij}"] \arrow[dr, "f_{ij'}"] & X_{ij} \\ & X_{i'} & X_{ij'} \end{tikzcd}$$

Obsérvese que (a) es caso particular de (b) cuando I tiene un solo elemento.

c) Se dice que **una fuente G se factoriza mediante una fuente $\mathcal{F}$ y una familia de fuentes** $(\mathcal{F}_i)_I$ si $G = (\mathcal{F}_i)_I \, \mathcal{F}$.

Teorema. Para $G = (\mathcal{F}_i)_I \, \mathcal{F}$ tenemos que

(a) Si $\mathcal{F}$ y cada $\mathcal{F}_i$ son iniciales, entonces G es inicial.

(b) Si G es inicial, entonces $\mathcal{F}$ es inicial.

Demostración: $\mathcal{F} = (f_i : X \to X_i)_I$, $\mathcal{F}_i = (f_{ij} : X_i \to X_{ij})_{J_i}$; $G = (f_{ij} f_i : X \to X_{ij})_{i \in I,\, j \in J_i}$.

(a) Sea $f : W \to X$ una función tal que $(f_{ij} f_i) f$ es continua, $\forall i \in I, \forall j \in J_i$. Entonces, fijando $i \in I$, la función $f_i f$ es tal que $f_{ij} (f_i f)$ es continua para toda $j \in J_i$; por la inicialidad de $\mathcal{F}_i$, $f_i f$ es continua. Como $i \in I$ se fijó arbitrariamente, entonces, debido a la inicialidad de $\mathcal{F}$, f es continua, lo cual prueba la inicialidad de G.

(b) Sea $f : W \to X$ una función tal que $f_i f$ es continua, $\forall i \in I$. Entonces $f_{ij} (f_i f)$ es continua, $\forall i \in I, \forall j \in J_i$. Por la inicialidad de G, f es continua. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es inicial. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 14 de marzo de 1990.

Teorema. Para $G = (\mathcal{F}_i)_I \mathcal{F}$ tenemos que

(a) Si $\mathcal{F}$ y cada $\mathcal{F}_i$ son monofuentes, entonces G es monofuente.

(b) Si G es monofuente, entonces $\mathcal{F}$ es monofuente.

Demostración: (a) Sean $f, g : W \to X$ dos funciones continuas tales que

$$(f_{ij} f_i) f = (f_{ij} f_i) g, \forall i \in I, \forall j \in J_i$$

Fijando $i \in I$ tenemos

$$f_{ij} (f_i f) = f_{ij} (f_i g), \forall j \in J_i$$

Como $\mathcal{F}_i$ es monofuente, resultan iguales $f_i f$ y $f_i g$. Y como i se fijó arbitrariamente en I, se tiene

$$f_i f = f_i g, \forall i \in I$$

Entonces $f = g$ porque también $\mathcal{F}$ es monofuente. Esto demuestra que G es monofuente.

(b) Sean $f, g : W \to X$ dos funciones continuas tales que

$$f_i f = f_i g, \forall i \in I$$

Se tiene, obviamente,

$$(f_{ij} f_i) f = (f_{ij} f_i) g, \forall i \in I, \forall j \in J_i$$

Por ser G una monofuente, resulta $f = g$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es monofuente. $\sharp$

Nuestro siguiente objetivo es la generalización de un teorema de factorización (cocientes monofuentes) en topología.

Definiciones. (a) Si E es una clase de funciones continuas y $\mathbb{M}$ es una clase de fuentes en $\mathfrak{Top}$, se dice que $\mathfrak{Top}$ es $(E, \mathbb{M})$**-factorizable** si toda fuente en $\mathfrak{Top}$ se factoriza mediante un miembro $e \in E$ y una fuente $M \in \mathbb{M}$; es decir, si dada cualquier fuente de funciones continuas $\mathcal{F} = (f_i : X \to X_i)_I$ existen

$$\left(X \xrightarrow{e} Z\right) \in E \quad \text{y} \quad M = (m_i : Z \to X_i)_I \in \mathbb{M}$$

tales que $m_i e = f_i, \forall i \in I$, lo que denotaremos escribiendo $\mathcal{F} = M \circ e$.

(b) Se dice que $\mathfrak{Top}$ **tiene la propiedad de** $(E, \mathbb{M})$**-diagonalización** si dadas dos funciones continuas

$$f : X \to Y \text{ y } e : X \to Z, \text{ con } e \in E$$

y dos fuentes

$$\mathcal{F} = (f_i : Z \to X_i)_I \text{ y } M = (m_i : Y \to X_i)_I, \text{ con } M \in \mathbb{M}$$

tales que

$$f_i e = m_i f, \forall i \in I$$

existe una función continua, y solamente una, $Z \xrightarrow{g} Y$ que, para toda $i \in I$, hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & Z \\ f\downarrow & g\swarrow & \downarrow f_i \\ Y & \xrightarrow[m_i]{} & X_i \end{array}$$

<u>*Ejemplo:*</u> Sea E la familia de las biyecciones continuas y $\mathbb{M}$ la familia de las fuentes iniciales. Entonces, $\mathfrak{Top}$ es $(E, \mathbb{M})$-factorizable.

En efecto, dada cualquier fuente de funciones continuas

$$F = (f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_I$$

consideremos la topología inicial para X, $\tau(f_i, \tau_i)$, correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$. Con X así topologizado, definimos

$$M = (f_i : (X, \tau(f_i, \tau_i)) \to (X_i, \tau_i))_I$$

Obviamente, $M \in \mathbb{M}$, y si hacemos

$$e = 1_X : (X, \tau) \to (X, \tau(f_i, \tau_i))$$

entonces $e \in E$ y $F = M \circ e$. $\sharp$

≪*Aquí se interrumpe el manuscrito y es lástima*≫$_{A.R.}$

Parte II

Teoría de las Estructuras Matemáticas

Introducción

Lunes 21 de mayo de 1990.

Bajo el título que encabeza este curso se pretende abordar un amplio estudio acerca de cierto tipo de objetos de muy frecuente aparición en matemáticas: *los conjuntos estructurados*.

Ya desde fines del siglo pasado una particular estructura había suscitado gran revuelo en el gremio de los matemáticos a grado tal que se pensó en la posible reducción de toda la matemática a este concepto: se trataba de la estructura de grupo.

Desde la primera mitad del siglo XIX los matemáticos comenzaron a observar que diversos conjuntos de entidades con los que trabajaban hacía ya tiempo, pese a la distinta naturaleza de esas entidades, tenían sin embargo un comportamiento común; en unos y otros se conservaba un mínimo de propiedades algebraicas elementales. Un primer estudio de este hecho les llevó a definir los primeros conjuntos estructurados cuyo estudio sentó las bases del álgebra moderna.

Luego de algunos años de exploración en ese terreno, Félix Klein pudo reducir el estudio de las geometrías euclidiana y proyectiva a la teoría de grupos, concibiendo así el magnífico proyecto de extender este resultado a todas la matemáticas. Pero una parte cimarrona de éstas resultó incompatible con aquella idea y el famoso *Programa de Erlangen* en el que Klein presentó su definición de geometría quedó reducido a ser útil sólo en el dominio que hasta entonces abarcaba, esto es, en la geometría euclidiana clásica y en las geometrías centro afín, afín y proyectiva.

Este "fracaso" acrecentó el interés de los matemáticos por los conjuntos estructurados. Si bien dejó de creerse en la existencia de una estructura absoluta que redujese las matemáticas al estudio de una sola teoría no menguaron, sin embargo, los estudios exclusivos en cada una de las estructuras matemáticas sino al contrario, dieron en campos de investigación de una gran fertilidad. En la realización de estos estudios siguió llamando la atención el hecho cada vez más patente de que en distintas ramas de la matemática teorías distintas, con todo y contar con una metodología propia, tanto en el arribo de resultados como en la presentación de ideas mostraban una muy peculiar similitud no ya porque se hallasen supeditadas a una estructura común sino porque estructuras claramente diferenciadas (topológicas, anulares, reticulares, métricas, vectoriales, de orden, etcétera) parecían mostrarse fieles al dictamen de principios generales hasta entonces ignorados.

Con estos antecedentes sería raro no hallar en esta historia algún matemático o grupo de matemáticos que pretendiese el estudio completo de las estructuras matemáticas.

Parecen haber sido los matemáticos franceses del grupo Bourbaki quienes empezaron a fraguar esta teoría en algún año de la década del 40. Ya para 1957 el propio N. Bourbaki incluye un capítulo intitulado *Estructuras* en su *Teoría de Conjuntos*, donde apunta:

≪El propósito de este capítulo es describir, de una vez por todas, las construcciones y demostraciones que con frecuente particularidad hallamos en matemáticas.≫

A propósito tan firme sigue en el libro citado una descripción poco certera por carecer de un lenguaje adecuado en su desarrollo; como consecuencia, el éxito alcanzado fue más bien pobre al no dar nunca con el camino correcto para las indagaciones. Cabe mencionar que a pesar de esto se ha conservado mucho de esta *primera aproximación*; el nombre de *estructura matemática*, por ejemplo, procede de ese trabajo.

Por esos mismos años dos matemáticos, Eilenberg y Mac Lane, introducen una teoría que, aunque más abstracta, ha resultado más conveniente para el tratamiento de las estructuras matemáticas; la llamaron *Teoría de las Categorías*.[2]

En 1983 el matemático checoslovaco Jiří Adámek acopló al lenguaje categórico parte de la teoría expuesta por Bourbaki y consiguió dar consistencia a la por él llamada *Teoría de las Estructuras Matemáticas*.[3] Acaso su éxito en el logro de esta teoría radica en haber fijado su atención en conjuntos dotados de cierta estructura y en funciones que al operar sobre ellos preservan tal estructura. Para una estructura fija, la colección de conjuntos estructurados por ella y la colección de funciones (*morfismos*) que la preservan forman una *categoría concreta de conjuntos estructurados*. En inglés Adámek ha inventado un neologismo para referirse a tal entidad; abreviando las palabras *concrete* y *structure* ha dado en llamarla *construct*. Como nuestro curso será dictado en castellano resulta poco adecuado valernos del susodicho vocablo inglés, de modo que, en tanto no hallemos un término apropiado, utilizaremos la palabra *ccce* (que forman las iniciales del nombre en español [léase "*xe*" o simplemente "*se*"]) asignándole el género femenino y dejando ambiguo su número. (Así, hablaremos tanto de *las ccce* como de *la ccce*.)

Por lo que hace a la notación, hay que advertir lo siguiente:

($\cdot$) Las *ccce* particulares que vayamos presentando suelen tener nombres especiales. Escribiremos esos nombres con letras góticas.

($\cdot\cdot$) Al referirnos a *ccce* arbitrarias no utilizaremos el código gótico sino letras cursivas.

($\therefore$) Las letras mayúsculas de molde denotarán conjuntos.

($::$) Siendo X y Y dos conjuntos cualesquiera, el símbolo Y^X denotará al conjunto de funciones de X en Y.

($-$) Al aplicar los morfismos sobre elementos de un conjunto estructurado se omite el paréntesis tradicional y en lugar de escribir $f(x)$ se escribirá fx.

---

[2]Esta teoría ha gozado de un amplio desarrollo durante los años que han transcurrido desde aquella década (la del 40) hasta hoy. Actualmente, además de ser grande el número de matemáticos que se dedican a ella, también va en aumento el número de investigadores en otras ramas que se ven impelidos a usar el lenguaje de las categorías merced a las ventajas que ofrece en el tratamiento de especialidades que van desde la topología o el análisis hasta la ciencia de la computación.

[3]Con este título Jiří Adámek publicó un libro aparecido en México en 1990 y que sirvió como texto para este curso.

6

Categorías Concretas de Conjuntos Estructurados

Antes de la definición de una categoría concreta de conjuntos estructurados (*ccce*) conviene ilustrar el concepto mediante ejemplos, pero para ello hay que advertir que toda *ccce* está formada por tres subentidades básicas. En efecto, siendo $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria se tienen:

i) Una clase o familia de *estructuras* (que en cada caso específico debe estar determinada). Para cada conjunto X, denotaremos esta clase por $\mathcal{S}[X]$.

ii) Una colección de *conjuntos estructurados* llamada *colección de objetos de la ccce.*

iii) Una colección de funciones que preservan la estructura entre los objetos, llamada *colección de morfismos de la ccce*. Si A y B son objetos de $\mathcal{S}$ (o $\mathcal{S}$-objetos), denotaremos al conjunto de morfismos de A en B mediante el símbolo $\hom_{\mathcal{S}}(A, B)$.

Ejemplos de ccce.

1. La categoría $\mathfrak{Top}$ de los espacios topológicos es nuestro primer ejemplo de *ccce*.

(i) Para cada X en $\mathfrak{Set}$, sea $\mathfrak{Top}[X]$ la familia de topologías de X. En este caso $\mathfrak{Top}[X]$ es la familia de *estructuras topológicas* de X.

(ii) Los objetos en este ejemplo son parejas (X, τ), donde $X \in \mathfrak{Set}$ y $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$, es decir, los $\mathfrak{Top}$-objetos son los espacios topológicos.

(iii) Dados dos objetos $A = (X, \tau)$ y $B = (Y, \sigma)$ en $\mathfrak{Top}$, los morfismos de A en B son los elementos $f \in Y^X$ que son funciones continuas.

Observemos que en este ejemplo los morfismos satisfacen el siguiente par de condiciones:

(a) Para $A, B, C \in \mathfrak{Top}$, si

$$f \in \hom_{\mathfrak{Top}}(A, B) \quad \text{y} \quad g \in \hom_{\mathfrak{Top}}(B, C)$$

entonces $gf \in \hom_{\mathfrak{Top}}(A, C)$, ya que gf es una función continua de A en C.

(b) Para todo $\mathfrak{Top}$-objeto $A = (X, \tau)$, $1_A = 1_X : (X, \tau) \to (X, \tau) \in \hom_{\mathfrak{Top}}(A, A)$.

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 23 de mayo de 1990.

Antes de nuestro segundo ejemplo recordemos qué es un *conjunto parcialmente ordenado.*

Definición. Un **orden parcial** en un conjunto X es una relación binaria α de X (i.e. un subconjunto de $X \times X$) tal que

($\cdot$) α contiene a la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$

($\cdot\cdot$) Si $(x, y) \in \alpha$ y $(y, z) \in \alpha$, entonces $(x, z) \in \alpha$.

($\cdots$) Si $(x, y) \in \alpha$ y $(y, x) \in \alpha$, entonces $x = y$.

Un conjunto X provisto de un orden parcial α se llama **conjunto parcialmente ordenado** (*copo*). Empleando la notación tradicional, $\leq$, tenemos que

$$x \leq y \Leftrightarrow (x, y) \in \alpha$$

Así, las propiedades ($\cdot$), ($\cdot\cdot$), ($\cdots$) anteriores son las conocidas propiedades *reflexiva, transitiva y antisimétrica*, respectivamente.

2. El siguiente ejemplo de *ccce* nos lo proporciona la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados que se la denota como $\mathfrak{Pos}$.[1]

(i) En este caso $\mathfrak{Pos}\,[X]$ denota a la familia de órdenes parciales en el conjunto X.

(ii) Los objetos en $\mathfrak{Pos}$ son parejas $(X, \leq)$, donde $\leq$ es un orden parcial en el conjunto X, (i.e. los$\mathfrak{Pos}$-objetos son los *copos*).[2]

(iii) Para dos objetos cualesquiera $A = (X, \alpha)\,, B = (Y, \beta)$ en $\mathfrak{Pos}$, los morfismos de A en B son las *funciones monótonas* de A en B, i.e.

$$\hom_{\mathfrak{Pos}}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : (x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (fx_1, fx_2) \in \beta \right\}$$

Veamos que también aquí los morfismos satisfacen las condiciones (a) y (b) del ejemplo 1.

(a) Sean

$$A = (X, \alpha)\,, B = (Y, \beta)\,, C = (Z, \gamma) \in \mathfrak{Pos};$$

si

$$f \in \hom_{\mathfrak{Pos}}(A, B) \quad \text{ y } \quad g \in \hom_{\mathfrak{Pos}}(B, C)$$

se tiene $gf \in Z^X$, y si $(x_1, x_2) \in \alpha$, entonces $(fx_1, fx_2) \in \beta$ [porque $f \in \hom_{\mathfrak{Pos}}(A, B)$]; luego, $(gfx_1, gfx_2) \in \gamma$ [porque $g \in \hom_{\mathfrak{Pos}}(B, C)$]. Por lo tanto, $gf \in \hom_{\mathfrak{Pos}}(A, C)$.

(b)

$$1_A = 1_X : (X, \alpha) \to (X, \alpha) \in \hom_{\mathfrak{Pos}}(A, A)$$

pues si $(x_1, x_2) \in \alpha$, entonces $(1_X x_1, 1_X x_2) \in \alpha$.

3. Gráficas y funciones compatibles.

La notación para esta *ccce* es $\mathfrak{Gra}$.

(i) En este ejemplo la familia de estructuras para cada conjunto X es la familia de relaciones binarias en X, i.e.

$$\mathfrak{Gra}\,[X] = \{\alpha \mid \alpha \subseteq X \times X\}$$

(ii) Un objeto en $\mathfrak{Gra}$ es una pareja $A = (X, \alpha)$, donde $\alpha \in \mathfrak{Gra}\,[X]$.[3]

(iii) Dados $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ en $\mathfrak{Gra}$, los morfismos de A en B son las funciones de X en Y que son *compatibles respecto a* α *y* β, i.e.

$$\hom_{\mathfrak{Gra}}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : (x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (fx_1, fx_2) \in \beta \right\}$$

Veamos que se satisfacen las condiciones (a) y (b) anteriores:

(a) Sean

$$A = (X, \alpha)\,, B = (Y, \beta)\,, C = (Z, \gamma) \in \mathfrak{Gra};$$

si

$$f \in \hom_{\mathfrak{Gra}}(A, B) \quad \text{ y } \quad g \in \hom_{\mathfrak{Gra}}(B, C)$$

entonces

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (fx_1, fx_2) \in \beta \Rightarrow (gfx_1, gfx_2) \in \gamma; \therefore gf \in \hom_{\mathfrak{Gra}}(A, C)\,.$$

---

[1] Por el inglés: *partial ordered sets.*

[2] Sólo cuando se preste a confusión el uso del símbolo tradicional $\leq$ (v.gr. cuando se está haciendo referencia a órdenes parciales distintos) se reemplazará por letras griegas minúsculas: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

[3] Los $\mathfrak{Gra}$-objetos reciben el nombre de **gráficas dirigidas** o **digráficas**; en tal caso, los elementos de X se llaman **vértices** de la digráfica y los elementos de α **flechas** de la misma.

(b) Si $A = (X, \alpha) \in \mathfrak{Gra}$, entonces $1_A \in \hom_{\mathfrak{Gra}}(A, A)$, pues

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (1_X x_1, 1_X x_2) \in \alpha$$

donde $1_A = 1_X : (X, \alpha) \to (X, \alpha)$.

Estos tres ejemplos aclaran bastante la idea de lo que es una *ccce*. Nótese que los objetos son, primero que otra cosa, conjuntos ($\mathfrak{Set}$-objetos), que en cada caso llevan asignada alguna estructura particular (posiblemente vacía).

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 28 de mayo de 1990.

Ahora nos resultará comprensible la siguiente

Definición. Una **ccce** o **categoría concreta de conjuntos estructurados** $\mathcal{S}$ es una colección que consta de:

(i) Una clase $\mathcal{S}[X]$, para cada $X \in \mathfrak{Set}$, cuyos miembros se llaman **$\mathcal{S}$-estructuras del conjunto X.**

(ii) Una colección de parejas $A = (X, \alpha)$, donde $\alpha \in \mathcal{S}[X]$, cuyos miembros son los **$\mathcal{S}$-objetos** u **objetos de la** *ccce* $\mathcal{S}$.

(iii) Si $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ son dos $\mathcal{S}$-objetos, los **$\mathcal{S}$-morfismos de** A **en** B constituyen un subconjunto, $\hom_{\mathcal{S}}(A, B)$, de Y^X.

Tal colección debe satisfacer los axiomas siguientes:

(a) **Axioma de la composición de morfismos**.

Para $\mathcal{S}$-objetos arbitrarios A, B y C, si

$$f \in \hom_{\mathcal{S}}(A, B) \quad \text{y} \quad g \in \hom_{\mathcal{S}}(B, C)$$

entonces

$$gf \in \hom_{\mathcal{S}}(A, C)$$

(b) **Axioma de la identidad.**

Para todo $\mathcal{S}$-objeto $A = (X, \alpha)$,

$$1_A = 1_X : (X, \alpha) \to (X, \alpha) \in \hom_{\mathcal{S}}(A, A)$$

Dos definiciones más. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos *ccce* cualesquiera;

1ª Se dice que $\mathcal{T}$ **es una subccce de** $\mathcal{S}$ si:

($\cdot$) Todo $\mathcal{T}$-objeto es un $\mathcal{S}$-objeto, i.e.

$$\mathcal{T}[X] \subseteq \mathcal{S}[X], \forall X \in \mathfrak{Set}$$

($\cdot\cdot$) Para dos $\mathcal{T}$-objetos A y B cualesquiera

$$\hom_{\mathcal{T}}(A, B) \subseteq \hom_{\mathcal{S}}(A, B)$$

2ª Si en ($\cdot\cdot$) se tiene

$$\hom_{\mathcal{T}}(A, B) = \hom_{\mathcal{S}}(A, B)$$

entonces se dice que $\mathcal{T}$ **es una subccce plena de** $\mathcal{S}$.

LEMA. $\mathfrak{Pos}$ es *subccce* de $\mathfrak{Gra}$.

Demostración. ($\cdot$) Dado que todo orden parcial de X es una relación binaria particular de X, se tiene que $\mathfrak{Pos}[X] \subseteq \mathfrak{Gra}[X]$.

$(\cdot\cdot)$ De acuerdo con las definiciones, si $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ son dos objetos en $\mathfrak{Pos}$ (y por lo tanto en $\mathfrak{Gra}$) entonces una función de A en B es monótona si, y sólo si, es compatible respecto a los órdenes parciales α y β (que son relaciones binarias especiales). Por lo tanto,

$$\hom_{\mathfrak{Pos}}(A, B) \subseteq \hom_{\mathfrak{Gra}}(A, B)$$

Esto prueba que $\mathfrak{Pos}$ es *subccce* de $\mathfrak{Gra}$. $\sharp$

Primera tanda de ejercicios. 1. Compruebe que $\mathfrak{Pos}$ es una *subccce* plena de $\mathfrak{Gra}$.

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 30 de mayo de 1990.

Veamos otro ejemplo de *ccce*.

Definiciones. (i) Una **retícula** (*lattice*) es un copo $(X, \leq)$ con la propiedad de que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ existen

$$x_1 \vee x_2, x_1 \wedge x_2 \in X$$

tales que

$(\cdot)$ $x_1 \wedge x_2 \leq x_1, x_2 \leq x_1 \vee x_2$

$(\cdot\cdot)$ Si para $z, z' \in X$ se tiene

$$z' \leq \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} \leq z$$

entonces

$$z' \leq x_1 \wedge x_2 \quad \text{y} \quad x_1 \vee x_2 \leq z$$

A $x_1 \vee x_2$ y $x_1 \wedge x_2$ se los llama **supremo** e **ínfimo**, respectivamente.

(ii) Sean $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ dos retículas cualesquiera; entonces $f \in Y^X$ es un **homomorfismo reticular** si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$f(x_1 \vee x_2) = fx_1 \vee fx_2 \quad \text{y} \quad f(x_1 \wedge x_2) = fx_1 \wedge fx_2$$

4. La *ccce* que a continuación presentamos suele denotarse mediante $\mathfrak{Lat}$.

(i) $\mathfrak{Lat}[X]$ es la familia de *estructuras reticulares*, es decir, la familia de órdenes parciales que convierten a X en retícula.

(ii) Por supuesto, los objetos en $\mathfrak{Lat}$ son las retículas o *lattices*.

(iii) Los morfismos en $\mathfrak{Lat}$ son los homomorfismos reticulares.

LEMA. $\mathfrak{Lat}$ es una *subccce* de $\mathfrak{Pos}$, pero no es plena.

Demostración. I.- $\mathfrak{Lat}$ es una *ccce*.

(a) Sean $(X, \leq), (Y, \leq)$ y $(Z, \leq)$ retículas arbitrarias y sean $f \in Y^X$ y $g \in Z^Y$ dos homomorfismos reticulares cualesquiera; entonces, para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ tenemos

$$f(x_1 \vee x_2) = fx_1 \vee fx_2 \in Y \Rightarrow g(fx_1 \vee fx_2) = gfx_1 \vee gfx_2$$

$$\therefore gf(x_1 \vee x_2) = gfx_1 \vee gfx_2$$

Análogamente

$$gf(x_1 \wedge x_2) = gfx_1 \wedge gfx_2$$

Esto prueba que se cumple el axioma de la composición.

(b) Sea $(X, \leq)$ cualquier retícula; entonces

$$1_{(X,\leq)}(x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2 = 1_{(X,\leq)}x_1 \vee 1_{(X,\leq)}x_2$$

Similarmente

$$1_{(X,\leq)}(x_1 \wedge x_2) = 1_{(X,\leq)}x_1 \wedge 1_{(X,\leq)}x_2$$

Por lo tanto, también el axioma de la identidad se cumple.

II.- $\mathfrak{Lat}$ es *subcccce* de $\mathfrak{Pos}$.

$(\cdot)$ De acuerdo con la definición, todo objeto en $\mathfrak{Lat}$ es un objeto en$\mathfrak{Pos}$.

$(\cdot\cdot)$ Sea $f : (X,\leq) \to (Y,\leq)$ cualquier homomorfismo reticular, y sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \leq x_2$; entonces

$$x_2 = x_1 \vee x_2$$

Por lo tanto

$$fx_2 = f(x_1 \vee x_2) = fx_1 \vee fx_2$$

lo cual significa que

$$\left.\begin{matrix} fx_1 \\ fx_2 \end{matrix}\right\} \leq fx_2;$$

en particular

$$fx_1 \leq fx_2$$

Por lo tanto, f es monótona.

III.- $\mathfrak{Lat}$ no es *subcccce* plena de $\mathfrak{Pos}$.

En efecto, existen retículas y funciones monótonas entre ellas que no son homomorfismos reticulares. Por ejemplo, consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales con el orden parcial α definido por la divisibilidad, i.e.

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n_1 \mid n_2\}$$

Claramente, $(\mathbb{N}, \alpha)$ es un copo; además, si para $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ hacemos

$$n_1 \wedge n_2 = \text{ m.c.d.}\,(n_1, n_2) \quad \text{ y } \quad n_1 \vee n_2 = \text{ m.c.m.}\,(n_1, n_2)$$

entonces:

$(\cdot)$

$$n_1 \wedge n_2 \mid n_1, n_2 \quad \text{ y } \quad n_1, n_2 \mid n_1 \vee n_2$$

$$\therefore (n_1 \wedge n_2, n_j), (n_j, n_1 \vee n_2) \in \alpha, \text{ para } j = 1, 2$$

$(\cdot\cdot)$ Y si $k, k' \in \mathbb{N}$ son tales que $k' \mid n_j$ y $n_j \mid k$, $(j = 1, 2)$, entonces

$$k' \mid n_1 \wedge n_2 \quad \text{ y } \quad n_1 \vee n_2 \mid k$$

(por propiedades del m.c.d. y del m.c.m. de n_1 y n_2, respectivamente). Por lo tanto, $(\mathbb{N}, \alpha)$ es una retícula.

También es claro que si β es el orden usual en $\mathbb{N}$, entonces $(\mathbb{N}, \beta)$ también es una retícula, pues en este caso hacemos

$$n_1 \wedge n_2 = \min\{n_1, n_2\} \quad \text{ y } \quad n_1 \vee n_2 = \max\{n_1, n_2\}$$

Ahora consideremos la función

$$1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \alpha) \to (\mathbb{N}, \beta) .$$

$1_{\mathbb{N}}$ es monótona, pues

$$(n_1, n_2) \in \alpha \Rightarrow n_1 \mid n_2 \Rightarrow n_1 \leq n_2 \Rightarrow 1_{\mathbb{N}}n_1 \leq 1_{\mathbb{N}}n_2 \Rightarrow (1_{\mathbb{N}}n_1, 1_{\mathbb{N}}n_2) \in \beta$$

Si embargo, $1_{\mathbb{N}}$ no es un homomorfismo reticular ya que, por ejemplo, para $2, 3 \in \mathbb{N}$, se tiene que en $(\mathbb{N}, \alpha)$

$$2 \wedge 3 = \text{ m.c.d.}\,(2,3) = 1$$

$$\therefore 1_{\mathbb{N}}\,(2 \wedge 3) = 1_{\mathbb{N}} 1 = 1$$

en tanto que en $(\mathbb{N}, \beta)$

$$1_{\mathbb{N}} 2 \wedge 1_{\mathbb{N}} 3 = \min\{2, 3\} = 2$$

Por lo tanto

$$1_{\mathbb{N}}\,(2 \wedge 3) \neq 1_{\mathbb{N}} 2 \wedge 1_{\mathbb{N}} 3 \qquad \sharp$$

Continuaremos la vez próxima.

Viernes 8 de junio de 1990.

Consideremos ahora algunas definiciones con sentido en los objetos de $\mathfrak{Pos}$.

Sea $(X, \leq)$ un copo arbitrario y sea A cualquier subconjunto de X; entonces:

$(\cdot)$ $\begin{cases} c \in X \text{ es una } \textbf{cota superior de } A \text{ en } X \text{ si } a \leq c, \forall a \in A; \\ d \in X \text{ es una } \textbf{cota inferior de } A \text{ en } X \text{ si } d \leq a, \forall a \in A. \end{cases}$

$(\cdot\cdot)$ $\begin{cases} x \in X \text{ es } \textbf{un supremo de } A \text{ en } X \text{ si } x \text{ es cota superior de } A \text{ en } X \\ \text{y si } x \leq c, \text{ para toda cota superior } c \text{ de } A \text{ en } X. \text{ Notación: } \sup A \\ x \in X \text{ es } \textbf{un ínfimo de } A \text{ en } X \text{ si } x \text{ es cota inferior de } A \text{ en } X \\ \text{y si } d \leq x, \text{ para toda cota inferior } d \text{ de } A \text{ en } X. \text{ Notación: } \inf A \end{cases}$

Observaciones: (a) En el caso particular en que A es vacío, todo $x \in X$ es tanto cota superior como cota inferior de A, ya que en tal caso $a \in A \Rightarrow a \leq x \leq a, \forall x \in X$.

(b) Por la condición de antisimetría en un copo, cuando A posee supremo e ínfimo, éstos son únicos.

(c) Si además el copo es una retícula, entonces para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$\sup\{x_1, x_2\} = x_1 \vee x_2 \quad \text{ e } \quad \inf\{x_1, x_2\} = x_1 \wedge x_2$$

Definición. Se dice que una retícula $(X, \leq)$ es una retícula completa cuando todo subconjunto de X posee ínfimo y supremo en X.

En una retícula completa los elementos $\sup \varnothing$ e $\inf \varnothing$ reciben los nombres de cero y uno, respectivamente; (0 es el primer elemento de X, según $\leq$, y 1 el último).

Ejemplo de retícula completa: Para cualquier conjunto X consideremos su conjunto potencia $\mathrm{Pot}\,(X)$. Claro es que $(\mathrm{Pot}\,(X), \subseteq)$ es un copo. Y si A es un subconjunto arbitrario de elementos de Pot(X), entonces A es una familia $(X_i)_I$ de subconjuntos de X; luego

$$\sup A = \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{ e } \quad \inf A = \bigcap_{i \in I} X_i$$

Por lo tanto, $(\mathrm{Pot}\,(X), \subseteq)$ es una retícula completa.

Las retículas completas nos proporcionan otro ejemplo de *ccce* que denotaremos $\mathfrak{Clat}$.

(i) $\mathfrak{Clat}\,[X]$ es la familia de órdenes parciales que hacen de X una retícula completa.

(ii) Desde luego, los $\mathfrak{Clat}$-objetos son las retículas completas.

(iii) Para cualesquiera dos $\mathfrak{Clat}$-objetos $A = (X, \leq)$ y $B = (Y, \leq)$, definimos

$$\hom_{\mathfrak{Clat}}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : \begin{cases} f\,(\sup U) = \sup fU \\ f\,(\inf U) = \inf fU \end{cases} \forall U \subseteq X \right\}$$

Veamos que se satisfacen los axiomas de la composición y de la identidad.

(a) Sean,

$$A = (X, \leq), B = (Y, \leq), C = (Z, \leq)$$

retículas completas,

$$f \in \hom_{\mathfrak{Clat}}(A, B),\ g \in \hom_{\mathfrak{Clat}}(B, C) \text{ y } U \subseteq X$$

Entonces

$$gf(\sup U) = g(\sup fU) = \sup gfU$$

Análogamente

$$gf(\inf U) = \inf gfU$$

Esto significa que

$$gf \in \hom_{\mathfrak{Clat}}(A, C)$$

(b) Por otra parte

$$\begin{aligned} 1_A \sup U &= \sup U = \sup(1_A U) \\ 1_A \inf U &= \inf U = \inf(1_A U) \end{aligned}$$

$$\therefore 1_A \in \hom_{\mathfrak{Clat}}(A, A) \qquad \sharp$$

Continuaremos la vez próxima.

6.1 Isomorfismos en *ccce*

Miércoles 20 de junio de 1990.

Definiciones. (a) Sea $\mathcal{S}$ cualquier *ccce* y sean $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ dos $\mathcal{S}$-objetos arbitrarios. Un **isomorfismo** $f : A \to B$ es una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que

$$f \in \hom_{\mathcal{S}}(A, B) \quad \text{y} \quad f^{-1} \in \hom_{\mathcal{S}}(B, A)$$

(b) Cuando tal morfismo f existe se dice que A y B son **isomorfos**, lo cual se significa:

$$f : A \cong B, \quad A \overset{f}{\cong} B, \quad A \cong B.$$

Ejemplos: 1. En $\mathfrak{Top}$ los isomorfismos son los homeomorfismos.

2. Una función f entre dos copos (X, α) y (Y, β) es un isomorfismo si es biyectiva y

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Leftrightarrow (fx_1, fx_2) \in \beta$$

Observación: Un $\mathcal{S}$-morfismo $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ en el que $f : X \to Y$ es biyectiva, no necesariamente es un isomorfismo. V.gr.:

3. Sea

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n_1 \mid n_2\}$$

y sea β el orden usual en $\mathbb{N}$. Entonces

$$1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \alpha) \to (\mathbb{N}, \beta)$$

es una biyección monótona. Sin embargo,

$$1_{\mathbb{N}}^{-1} = 1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \beta) \to (\mathbb{N}, \alpha)$$

no es monótona.

Proposición. En cualquier *ccce* la relación $\cong$ es de equivalencia.

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria y sean A, B y C $\mathcal{S}$-objetos cualesquiera.

$(\cdot)$ Debido al axioma de identidad, $1_A : A \to A$ es un $\mathcal{S}$-morfismo que, por ser biyectivo y coincidir con su inverso, es un isomorfismo; $\therefore A \cong A$. Por lo tanto, $\cong$ es reflexiva.

$(\cdot\cdot)$ Si $f : A \to B$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : B \to A$ es un $\mathcal{S}$-morfismo biyectivo cuyo inverso, f, también es un $\mathcal{S}$-morfismo; $\therefore A \cong B \Rightarrow B \cong A$. Por lo tanto, $\cong$ es simétrica.

$(\cdot\cdot\cdot)$ Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son isomorfismos, entonces, por el axioma de la composición, $gf \in \hom_{\mathcal{S}}(A, C)$. Obviamente, gf y $f^{-1}g^{-1}$ son mutuamente inversas, y como f^{-1} y g^{-1} son $\mathcal{S}$-morfismos, entonces (por el mismo axioma) $f^{-1}g^{-1} \in \hom_{\mathcal{S}}(C, A)$. Por lo tanto, gf también es un isomorfismo y $A \cong C$. Por lo tanto, $\cong$ es transitiva. $\sharp$

Junio 25 de 1990.

Veremos otro ejemplo de *ccce* que denotaremos mediante $\mathfrak{Met}$.

(i) Las $\mathfrak{Met}$-estructuras para un conjunto X son las **métricas en** X, o sea que

$$\mathfrak{Met}[X] = \left\{ \alpha : X \times X \to [0, \infty) \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha(x,y) = \alpha(y,x) \\ \alpha(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \alpha(x,y) + \alpha(y,z) \geq \alpha(x,z) \end{array} \right\}$$

(ii) A los objetos (X, α) de $\mathfrak{Met}$ se los llama **espacios métricos**.

(iii) Si $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$ son espacios métricos, entonces

$$\hom_{\mathfrak{Met}}(A, B) = \left\{ f \in Y^X : \beta(fx_1, fx_2) \leq \alpha(x_1, x_2) \right\}$$

A estas funciones se las llama **contracciones**.

Verifiquemos los axiomas de *ccce*.

(a) Sean $A = (X, \alpha), B = (Y, \beta), C = (Z, \gamma)$ espacios métricos cualesquiera y supongamos que

$$f \in \hom_{\mathfrak{Met}}(A, B) \quad \text{y} \quad g \in \hom_{\mathfrak{Met}}(B, C)$$

Sean $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios; como f y g son contracciones tenemos:

$$\gamma(gfx_1, gfx_2) \leq \beta(fx_1, fx_2) \leq \alpha(x_1, x_2)$$

Por lo tanto, también gf es una contracción, i.e.

$$gf \in \hom_{\mathfrak{Met}}(A, C)$$

y se satisface el axioma de la composición.

(b) Obviamente

$$\alpha(1_X x_1, 1_X x_2) \leq \alpha(x_1, x_2)$$

$$\therefore 1_A \in \hom_{\mathfrak{Met}}(A, A)$$

por lo que también se satisface el axioma de la identidad. $\sharp$

Veamos cómo son los isomorfismos en $\mathfrak{Met}$.

Si $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un isomorfismo entre espacios métricos, entonces f es una contracción biyectiva cuya función inversa también es una contracción. Por lo tanto, para cualesquier $x_1, x_2 \in X$ tenemos

$$\alpha\left(f^{-1}fx_1, f^{-1}fx_2\right) \leq \beta\left(fx_1, fx_2\right) \leq \alpha\left(x_1, x_2\right)$$
$$\text{i.e. } \alpha\left(x_1, x_2\right) = \beta\left(fx_1, fx_2\right)$$

lo que significa que f conserva la distancia. Las contracciones con esta característica reciben el nombre de **isometrías**.

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 27 de junio de 1990.

Definición. Una *ccce* $\mathcal{S}$ es **transportable** si para todo $\mathcal{S}$-objeto (X, α) y cualquier biyección $f : X \to Y$ existe una única $\mathcal{S}$-estructura $\beta \in \mathcal{S}[Y]$ tal que $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un isomorfismo.

Ejemplos: 1. $\mathfrak{Top}$ es transportable.

Sea (X, α) cualquier espacio topológico y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Si

$$\beta = \{fU : U \in \alpha\}$$

entonces

$$Y = fX, \varnothing = f\varnothing \in \beta;$$

si $(fU_\lambda)_\Lambda$ es una familia arbitraria de elementos de β, entonces

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} fU_\lambda = f \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \beta, \text{ porque } \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \alpha$$

y como f es biyectiva, si Λ es finito tenemos

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} fU_\lambda = f \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \beta, \text{ pues } \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \alpha$$

Por lo tanto, β es una topología para Y según la cual f es continua, pues

$$f^{-1}fU = U \in \alpha, \forall fU \in \beta$$

También es abierta (por definición de β). Luego, f es un homeomorfismo. Y si β' es otra topología para Y que hace de f un homeomorfismo, entonces

$$(Y, \beta) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \alpha) \quad \text{y} \quad (X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, \beta')$$

son homeomorfismos y

$$ff^{-1} = 1_Y : (Y, \beta) \cong (Y, \beta')$$
$$\therefore \beta' = \beta \qquad \sharp$$

2. $\mathfrak{Gra}$ es transportable.

Dados un $\mathfrak{Gra}$-objeto (X, α) y una función biyectiva $f : X \to Y$, hacemos

$$\beta = \{(fx_1, fx_2) : (x_1, x_2) \in \alpha\}$$

Entonces, $\beta \subseteq Y \times Y$ y $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ resulta claramente compatible. Además, también $f^{-1} : (Y, \beta) \to (X, \alpha)$ es compatible porque

$$(fx_1, fx_2) \in \beta \Rightarrow \left(f^{-1}fx_1, f^{-1}fx_2\right) = (x_1, x_2) \in \alpha$$

Y si β' es otra relación binaria en Y que hace de f un isomorfismo, entonces son compatibles

$$(Y,\beta) \stackrel{f^{-1}}{\to} (X,\alpha), (X,\alpha) \stackrel{f}{\to} (Y,\beta') \quad \text{y} \quad (Y,\beta') \stackrel{f^{-1}}{\to} (X,\alpha), (X,\alpha) \stackrel{f}{\to} (Y,\beta)$$

Por lo tanto, también los son

$$(Y,\beta) \stackrel{1_Y}{\to} (Y,\beta') \quad \text{y} \quad (Y,\beta') \stackrel{1_Y}{\to} (Y,\beta)$$

de lo cual resulta que $\beta' = \beta$. $\sharp$

3. $\mathfrak{Pos}$ también es transportable. Por tratarse de una *subccce* de $\mathfrak{Gra}$, los argumentos son análogos a los anteriores.

Ahora veamos un ejemplo de una *ccce* que no es transportable.

4. Mediante $\mathfrak{Mtc}$ denotaremos a la *ccce* de los espacios métricos y las funciones continuas.

(i)

$$\mathfrak{Mtc}[X] = \{\alpha : X \times X \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es métrica para } X\}$$

(ii) Los $\mathfrak{Mtc}$-objetos son los espacios métricos.

(iii) Sea $\alpha \in \mathfrak{Mtc}[X]$ y sea $\tau(\alpha)$ la topología inducida por α en X, es decir, aquélla que tiene por base a la familia de discos abiertos. Así, para espacios métricos $A = (X,\alpha)$ y $B = (Y,\beta)$ definimos

$$\hom_{\mathfrak{Mtc}}(A,B) = \{f : (X,\tau(\alpha)) \to (Y,\tau(\beta)) \mid f \text{ es continua}\}$$

Como se sabe por los cursos elementales de análisis y topología, la identidad de cualquier $\mathfrak{Mtc}$-objeto, así como la composición de $\mathfrak{Mtc}$-morfismos, también son $\mathfrak{Mtc}$-morfismos. Por lo tanto, son válidos los axiomas de composición e identidad. Veamos que $\mathfrak{Mtc}$ no es transportable.

Sea X un conjunto y sean α_1 y α_2 dos métricas diferentes que le induzcan la misma topología, (v.gr. $\alpha_2 = 2\alpha_1$). Tomemos $Y = X$ y $f : X \to Y$ como $f = 1_X$; entonces no es única la $\mathfrak{Mtc}$-estructura para Y que hace de f un isomorfismo, pues, por el axioma de identidad

$$1_X : (X,\alpha_1) \to (X,\alpha_1)$$

lo es, pero, por construcción, también lo es

$$1_X : (X,\alpha_1) \to (X,\alpha_2)$$

Por lo tanto, $\mathfrak{Mtc}$ no es transportable. $\sharp$

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 2 de julio de 1990.

Ejercicio: 2. Probar que todo morfismo $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ en $\mathfrak{Met}$ es una función continua

$$f : (X,\tau(\alpha)) \to (Y,\tau(\beta))$$

6.2 Fibras en *ccce*

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria y X cualquier conjunto. Sean $\alpha,\beta \in \mathcal{S}[X]$; se dice que α **es más fina que** β, o bien , que β **es más áspera que** α si

$$1_X : (X,\alpha) \to (X,\beta)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo. Tal situación la denotaremos escribiendo $\alpha \leq_{\mathcal{S}} \beta$.

Ejemplos: 1. Debido al axioma de identidad, cualquier $\mathcal{S}$-estructura de cualquier *ccce* $\mathcal{S}$ es más fina y más áspera que sí misma.

2. En $\mathfrak{Gra}$, α es más fina que β si, y sólo si, $\alpha \subseteq \beta$.

En efecto, $1_X : (X, \alpha) \to (X, \beta)$ es un morfismo en $\mathfrak{Gra}$ si, y sólo si,

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (1_X x_1, 1_X x_2) \in \beta$$

lo que significa lo mismo que $\alpha \subseteq \beta$.

3. En $\mathfrak{Top}$, α es más fina que β si, y sólo si, $\beta \subseteq \alpha$.

En efecto, $1_X : (X, \alpha) \to (X, \beta)$ es un morfismo en $\mathfrak{Top}$ si, y sólo si,

$$1_X^{-1} U = U \in \alpha, \forall U \in \beta$$

lo cual implica que $\beta \subseteq \alpha$.

4. En $\mathfrak{Pos}$, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Dado que $\mathfrak{Pos}$ es *subccce* plena de $\mathfrak{Gra}$ se tiene:

$$\left\{(X, \alpha) \overset{1_X}{\to} (X, \beta)\right\} \subseteq \hom_{\mathfrak{Pos}} \Leftrightarrow \left\{(X, \alpha) \overset{1_X}{\to} (X, \beta)\right\} \subseteq \hom_{\mathfrak{Gra}} \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

5. Es la plenitud de $\mathfrak{Pos}$ en $\mathfrak{Gra}$ la que permite garantizar el resultado anterior. Podría pensarse que la fineza o aspereza entre las $\mathcal{S}$-estructuras que figuren en cualquier *subccce* $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ es la misma que en $\mathcal{S}$, pero esto es falso. Piénsese, por ejemplo, en $\mathfrak{Lat}$, que es *subccce* de $\mathfrak{Pos}$, pero no plena. Ya sabemos que en $\mathfrak{Pos}$ el orden parcial para $\mathbb{N}$

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n_1 \mid n_2\}$$

es más fino que el orden usual β; pero esto deja de ser cierto si pensamos a α y β como estructuras reticulares, pues sabemos también que

$$1_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \alpha) \to (\mathbb{N}, \beta)$$

no es un homomorfismo reticular.

Definición. Sea $\mathcal{S}$ cualquier *ccce* transportable. Se dice que $\mathcal{S}$ **tiene fibras pequeñas** si para cada $X \in \mathfrak{Set}$ la clase $\mathcal{S}[X]$ es un conjunto.

Nótese que para definir este concepto no se requiere que $\mathcal{S}$ sea transportable. Ya veremos, sin embargo, que es en este caso cuando tiene sentido la definición.

Proposición. Si $\mathcal{S}$ tiene fibras pequeñas, entonces $(\mathcal{S}[X], \leq_{\mathcal{S}})$ es un copo.

Demostración. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{S}[X]$. Entonces

$(\cdot)$ Por el axioma de la identidad tenemos $\alpha \leq_{\mathcal{S}} \alpha$; por lo tanto, $\leq_{\mathcal{S}}$ es reflexiva.

$(\cdot\cdot)$ Si

$$\alpha \leq_{\mathcal{S}} \beta \quad \text{y} \quad \beta \leq_{\mathcal{S}} \gamma$$

entonces podemos aplicar el axioma de la composición a los morfismos

$$(X, \alpha) \overset{1_X}{\to} (X, \beta) \overset{1_X}{\to} (X, \gamma)$$

para obtener $\alpha \leq_{\mathcal{S}} \gamma$. Por lo tanto, $\leq_{\mathcal{S}}$ es transitiva.

$(\cdots)$ Supongamos que además de $\alpha \leq_{\mathcal{S}} \beta$ se tiene $\beta \leq_{\mathcal{S}} \alpha$. Entonces

$$(X, \alpha) \overset{1_X}{\to} (X, \beta) \quad \text{y} \quad (X, \beta) \overset{1_X}{\to} (X, \alpha)$$

son isomorfismos, pues $1_X : X \to X$ es biyectiva y cada desigualdad de la hipótesis indica que la 1_X correspondiente es un $\mathcal{S}$-morfismo. Por consiguiente se tienen los $\mathcal{S}$-morfismos

$$(X,\alpha) \xrightarrow{1_X} (X,\beta) \quad \text{y} \quad (X,\alpha) \xrightarrow{1_X \circ 1_X} (X,\alpha)$$

Como $\mathcal{S}$ es transportable debemos tener $\alpha = \beta$. Por lo tanto, $\leq_{\mathcal{S}}$ es antisimétrica.

Esto prueba que $\leq_{\mathcal{S}}$ es un orden parcial en $\mathcal{S}[X]$, que es un conjunto por ser $\mathcal{S}$ de fibras pequeñas. Luego, $(\mathcal{S}[X], \leq_{\mathcal{S}})$ es un copo. ♯

Verano de 1990. [4]

Definiciones. *a*) Cuando dos puntos cualesquiera de un copo son incomparables se dice que tal copo está **discretamente ordenado**. (Tambien suele decirse que el copo en cuestión forma una **anticadena**.)

Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* de fibras pequeñas;

b) Cuando $(\mathcal{S}[X], \leq_{\mathcal{S}})$ está discretamente ordenado, se dice que $\mathcal{S}$ está **discretamente fibrada**.

c) Cuando $(\mathcal{S}[X], \leq_{\mathcal{S}})$ es una retícula completa, se dice que $\mathcal{S}$ está **completamente fibrada**.

Observación. Se definió una retícula completa como un copo dentro del cual todo subconjunto posee ínfimo y supremo. Sin embargo, basta con que el conjunto sea **superable**, esto es, que cada subconjunto suyo tenga un supremo dentro del copo.

En efecto, suponiendo que tal es el caso para el copo (X,α), sea A cualquier subconjunto de X y sea I el conjunto de las cotas inferiores de A. De acuerdo con la hipótesis, I tiene un supremo $s \in X$. Entonces, $s \leq a, \forall a \in A$, porque cada $a \in A$ es cota superior de I. Pero entonces s es una cota inferior de A, y es la más grande porque si c es cualquiera otra, entonces $c \in I$ y, por lo tanto, $c \leq s$. Por lo tanto, $s = \inf A$; por lo tanto, (X,α) es retícula completa. ♯

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 9 de julio de 1990.

Ejemplos de ccce completamente fibradas.

1. $\mathfrak{Top}$

En efecto, $\mathfrak{Top}$ es de fibras pequeñas porque

$$\mathfrak{Top}[X] \subseteq \mathtt{Pot}(\mathtt{Pot}(X)) \in \mathfrak{Set}, \forall X \in \mathfrak{Set}$$

Dada la observación anterior, sólo resta probar que $(\mathfrak{Top}[X], \leq_{\mathfrak{Top}})$ es superable. Sea $T \subseteq \mathfrak{Top}[X]$ arbitrario y sea $\alpha = \cap T$; entonces

$$1_X : (X,\beta) \to (X,\alpha), \text{ con } \beta \in T$$

es continua porque $\alpha \subseteq \beta$; o sea que

$$\beta \leq_{\mathfrak{Top}} \alpha, \forall \beta \in T$$

lo cual significa que α es una cota superior de T. Y si γ es cualquier cota superior de T, entonces

$$\beta \leq_{\mathfrak{Top}} \gamma, \forall \beta \in T \quad \text{i.e.} \quad \gamma \subseteq \beta, \forall \beta \in T$$

$$\therefore \gamma \subseteq \alpha \; ; \quad \therefore \alpha \leq_{\mathfrak{Top}} \gamma \; ; \quad \therefore \alpha = \sup T$$

[4] *¡Me gustaban tus veranos, oh mundo!*

Esto prueba que $(\mathfrak{Top}[X], \leq_{\mathfrak{Top}})$ es una retícula completa. Por lo tanto, $\mathfrak{Top}$ está completamente fibrada. $\sharp$

2. $\mathfrak{Gra}$

En vista de la definición de una $\mathfrak{Gra}$-estructura tenemos que

$$\mathfrak{Gra}[X] = \mathtt{Pot}(X \times X) \in \mathfrak{Set}, \forall X \in \mathfrak{Set}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{Gra}$ es de fibras pequeñas. Por otra parte, sabemos que

$$\alpha \leq_{\mathfrak{Gra}} \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta, \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{Gra}[X]$$

$$\therefore (\mathfrak{Gra}[X], \leq_{\mathfrak{Gra}}) = (\mathtt{Pot}(X \times X), \subseteq)$$

Pero bajo la contención cualquier potencia es una retícula completa. Por consiguiente, $\mathfrak{Gra}$ está completamente fibrada. $\sharp$

A continuación mostraremos que $\mathfrak{Pos}$ no está completamente fibrada, lo cual resulta curioso debido a que se trata de una *subccce* plena de $\mathfrak{Gra}$ y $\mathfrak{Gra}$, como acabamos de ver, sí lo está.

Sea X un conjunto con dos o más elementos, sea

$$\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$$

y sean x_1 y x_2 dos elementos distintos de X. Ahora hagamos

$$\alpha = \Delta(X) \cup \{(x_1, x_2)\} \quad \text{y} \quad \alpha' = \Delta(X) \cup \{(x_2, x_1)\}$$

Entonces, $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{Pos}[X]$ pero $\{\alpha, \alpha'\}$ no tiene supremo en $(\mathfrak{Pos}[X], \leq_{\mathfrak{Pos}})$ porque no está acotado superiormente. En efecto, si $\beta \in \mathfrak{Pos}[X]$ fuese una cota superior de $\{\alpha, \alpha'\}$, entonces

$$\alpha, \alpha' \subseteq \beta \ ; \quad \therefore (x_1, x_2), (x_2, x_1) \in \beta \ ; \quad \therefore x_1 = x_2 \ \underset{\circ}{\nabla}$$

Por lo tanto, $(\mathfrak{Pos}[X], \leq_{\mathfrak{Pos}})$ no es una retícula completa y, por consiguiente, $\mathfrak{Pos}$ no está completamente fibrada. $\sharp$

Notemos de paso que $\mathfrak{Pos}$ tampoco está discretamente fibrada. En efecto, si X es como antes $(\# X > 1)$, entonces

$$1_X : (X, \Delta(X)) \to (X, \alpha)$$

es un morfismo para todo orden parcial α en X, o sea que $\Delta(X)$ es siempre comparable con cualquier otro orden parcial en X;

$$(\ \Delta(X) \leq_{\mathfrak{Pos}} \alpha, \forall \alpha \in \mathfrak{Pos}[X]\ )$$

Por lo tanto, $(\mathfrak{Pos}[X], \leq_{\mathfrak{Pos}})$ no está discretamente ordenado ni $\mathfrak{Pos}$ discretamente fibrada. $\sharp$

Ejercicio. 3. Probar que $\mathfrak{Cat}$ está discretamente fibrada.

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 11 de julio de 1990.

Veamos otro ejemplo de *ccce*.

Sus objetos son parejas $\left(X, \overline{\ \ }\right)$ en las que X es un conjunto y $\overline{\ \ }$ es una cerradura, i.e.

$$\overline{\ \ } : \mathtt{Pot}(X) \to \mathtt{Pot}(X)$$

es una función tal que:

$(\cdot)$ $A \subseteq \overline{A}$ ($\overline{}$ es isótona)

$(\cdot\cdot)$ $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ($\overline{}$ es idempotente)

$(\cdot\cdot\cdot)$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ($\overline{}$ es aditiva)[5]

Por su parecido con $\mathfrak{Top}$ la denotaremos como $\mathfrak{Top}'$.

En cuanto a sus morfismos,

$$f : \left(X, \overline{}\right) \to \left(Y, \overline{}'\right)$$

sun funciones $f \in Y^X$ tales que

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}'$$

es decir, son las funciones continuas $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ en las que α y β son las topologías correspondientes a $\overline{}$ y $\overline{}'$, respectivamente. En consecuencia, se satisfacen los axiomas de composición e identidad. Por lo tanto, $\mathfrak{Top}'$ es una *ccce*.

Para cada $X \in \mathfrak{Set}$, sea

$$I_X : \mathfrak{Top}[X] \to \mathfrak{Top}'[X]$$

la función siguiente: $I_X(\alpha)$ es la cerradura en X determinada por α. Se sabe que I_X es biyectiva[6]. Además, si $\alpha \in \mathfrak{Top}[X]$ y $f \in Y^X$, entonces $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un morfismo en $\mathfrak{Top}$ si, y sólo si, $f : (X, I_X(\alpha)) \to (Y, I_X(\beta))$ es un morfismo en $\mathfrak{Top}'$.[7]

6.3 *ccce* isomorfas

Definición. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos *ccce* cualesquiera. Diremos que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son **concretamente isomorfas** si para cada $X \in \mathfrak{Set}$ existe una "*biyección natural*"

$$I_X : \mathcal{S}[X] \to \mathcal{T}[X] \ ;$$

o sea que si $f : X \to Y$ es una función cualquiera, entonces

$$\left\{(X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, \beta)\right\} \subseteq \hom_{\mathcal{S}} \Leftrightarrow \left\{(X, I_X(\alpha)) \xrightarrow{f} (Y, I_Y(\beta))\right\} \subseteq \hom_{\mathcal{T}}$$

<u>*Ejemplo:*</u> $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{Top}'$ son concretamente isomorfas.

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 16 de julio de 1990.

Veremos otro par de *ccce* que son isomorfas. A la primera de ellas la denotaremos mediante $\mathfrak{Pros}$.

<u>*Def.*</u> $\mathfrak{Pros}$ es la *subccce* plena de $\mathfrak{Gra}$ cuyos objetos son los conjuntos preordenados (i.e. aquéllos en que está definida una relación binaria que es reflexiva y transitiva)[8] y cuyos morfismos son las funciones monótonas.

$$\mathfrak{Pos} \subseteq \mathfrak{Pros} \subseteq \mathfrak{Gra}$$

---

[5] *(Nota del Autor)* Hay que averiguar si es necesario o no agregar: $(::)$ $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

[6] *(N. del A.)* Esto es debido a que la cerradura es un concepto básico en topología, pero hay que considerar $(::)$. Adámek no lo toma en cuenta.

[7] Es otro modo de decir: f es continua ssi $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

[8] ¿Podríamos llamarlos "copros"?

El otro ejemplo lo denotaremos como $\mathfrak{CDTop}$.

Definición. Un espacio topológico es **casi discreto** si intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.[9]

Def. $\mathfrak{CDTop}$ es la *subccce* plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son los espacios casi discretos. (Sus morfismos, debido a la plenitud, son todas las funciones continuas definibles entre estos espacios.)

TEOREMA. $\mathfrak{Pros}$ es concretamente isomorfa a $\mathfrak{CDTop}$.

Demostración. Sea $(X, \leq)$ cualquier conjunto preordenado; definimos

$$\widetilde{\alpha} = \{U \subseteq X : x_1 \leq x_2 \text{ y } x_2 \in U \Rightarrow x_1 \in U\}$$

Entonces $\widetilde{\alpha}$ es una topología casi discreta para X.[10] En efecto, para cualquier $(U_i)_I \subseteq \widetilde{\alpha}$ tenemos que:

(i) Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, y se tienen $x_1 \leq x_2$, con $x_2 \in U$, entonces $x_2 \in U_i$, para alguna $i \in I$; por lo tanto, para ese mismo i, $x_1 \in U_i$; en consecuencia, $x_1 \in U$. Por lo tanto, $U \in \widetilde{\alpha}$; por lo tanto $\widetilde{\alpha}$ está cerrada bajo la formación de uniones arbitrarias.

(ii) Si $U = \bigcap_{i \in I} U_i$, y se tienen $x_1 \leq x_2$, con $x_2 \in U$, entonces $x_2 \in U_i, \forall i \in I$; por lo tanto, $x_1 \in U_i, \forall i \in I$; en consecuencia, $x_1 \in U$. Por lo tanto, $U \in \widetilde{\alpha}$; por lo tanto $\widetilde{\alpha}$ está cerrada bajo la formación de intersecciones arbitrarias.

Por consiguiente, podemos definir una función que asocie un objeto $(X, \widetilde{\alpha})$ de $\mathfrak{CDTop}$ a cada $\mathfrak{Pros}$-objeto $(X, \leq)$. Veamos que esta función es biyectiva.

Para $(X, \tau) \in \mathfrak{CDTop}$ definimos

$$x_1 \leq_\tau x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \in U \in \tau \Rightarrow x_1 \in U$$

Entonces, $\leq_\tau$ es un preorden en X. En efecto,

(1) Que $x \leq_\tau x, \forall x \in X$, es obvio.

(2) Si $x_1 \leq_\tau x_2$, $x_2 \leq_\tau x_3$ y $x_3 \in U$, entonces $x_2 \in U$. Luego, $x_1 \in U$; por lo tanto, $x_1 \leq x_3$.

Ahora pensemos en la función que asocia a cada $\mathfrak{CDTop}$-objeto (X, τ) el $\mathfrak{Pros}$-objeto $(X, \leq_\tau)$ y veamos que se trata de la inversa de la función que definimos antes. Para ello pensemos en las composiciones

$$\leq \ \mapsto \ \widetilde{\alpha} \ \mapsto \ \leq_{\widetilde{\alpha}}$$

y

$$\tau \ \mapsto \ \leq_\tau \ \mapsto \ \widetilde{\alpha}$$

Con relación a la primera hay que probar que

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq_{\widetilde{\alpha}} x_2$$

$(\Rightarrow)$ De acuerdo con la definición de $\widetilde{\alpha}$, si

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{y} \quad x_2 \in U \in \widetilde{\alpha}$$

entonces $x_1 \in U$, o sea que

$$x_2 \in U \in \widetilde{\alpha} \Rightarrow x_1 \in U$$

[9] En el curso anterior ya habíamos tratado este concepto pero con otro nombre; en efecto, estos espocios casi discretos coinciden con los espacios finitamente generados, (los cuales, por cierto, constituyen una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$).

[10] (*N. del A.*) A la topología $\widetilde{\alpha}$ para retículas completas se la llama **topología de Scott**. Está relacionada con la teoría de retículas continuas y tiene aplicaciones en la teoría de la computación. Su aparición data de hace más o menos 20 años.

lo cual significa precisamente $x_1 \leq_{\widetilde{\alpha}} x_2$.

($\Leftarrow$) Sea

$$U = \{x \in X : x \leq x_2\}$$

Entonces $U \in \widetilde{\alpha}$ y $x_2 \in U$; luego, $x_1 \in U$, pues por hipótesis

$$x_2 \in U \in \widetilde{\alpha} \Rightarrow x_1 \in U$$

Por lo tanto, $x_1 \leq x_2$.

También es cierto que al considerar la composición

$$\tau \ \mapsto \ \leq_\tau \ \mapsto \widetilde{\widetilde{\alpha}}$$

obtenemos $\tau = \widetilde{\alpha}$. Veamos cómo es esto.

($\subseteq$) Sea $V \in \tau$, y supongamos que $x_1, x_2 \in X$ son tales que

$$x_1 \leq_\tau x_2 \quad \text{y} \quad x_2 \in V \qquad ^{11}$$

Sabemos que

$$x_1 \leq_\tau x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \in U \in \tau \Rightarrow x_1 \in U$$

Por consiguiente, $x_1 \in V$;

$$\therefore V \in \{U \subseteq X : x_1 \leq_\tau x_2 \text{ y } x_2 \in U \Rightarrow x_1 \in U\} = \widetilde{\alpha}$$

($\supseteq$) Sea $U \in \widetilde{\alpha}$; veremos que todo elemento de U contiene una vecindad abierta según τ. En efecto, para cualquier $x_2 \in U$, sea

$$V = \bigcap_{x_2 \in W \in \tau} W$$

Como τ es casi discreta, $V \in \tau$; o sea que V es una vecindad abierta de x_2 según τ. Finalmente, observemos que para todo $x_1 \in V$ es válida la implicación

$$x_2 \in W \in \tau \Rightarrow x_1 \in W$$

que, por definición, significa $x_1 \leq_\tau x_2$. Como además $x_2 \in U$ y

$$U \in \widetilde{\alpha} = \{U \subseteq X : x_1 \leq_\tau x_2 \text{ y } x_2 \in U \Rightarrow x_1 \in U\}$$

entonces $x_1 \in U$. Por lo tanto, $V \subseteq U$; por lo tanto, $U \in \tau$.

Julio 23 de 1990.

Con relación al teorema que nos ocupa hasta ahora hemos probado que, para cada $X \in \mathfrak{Set}$, podemos establecer una correspondencia biunívoca

$$I_X : \mathfrak{Pros}\,[X] \to \mathfrak{CDTop}\,[X]$$

de la cual falta verificar la naturalidad. Para ello nos valdremos de lo siguiente:

Sea $(X, \leq) \in \mathfrak{Pros}$ arbitrario. Para $x \in X$ definimos

$$\uparrow x = \{y \in X : x \leq y\}$$

Aseguramos que

$$\uparrow x = \overline{\{x\}} \text{ según } \widetilde{\alpha}\,(= I_X\,(\leq))\,.$$

Para probar esto primero veremos que $\uparrow x$ es un conjunto cerrado según $\widetilde{\alpha}$. Sea $U = X - \uparrow x$ y supongamos que $y \in U$; si $x_1 \leq y$, entonces $x_1 \notin \uparrow x$, pues de lo contrario $y \in \uparrow x$, lo que es falso. Luego, $x_1 \in U$; y como y fue arbitrariamente escogido en U, entonces

$$U \in \{U \subseteq X : x_1 \leq x_2 \text{ y } x_2 \in U \Rightarrow x_1 \in U\} = \widetilde{\alpha}$$

Por lo tanto, $X - U = \uparrow x$ es cerrado en X según $\widetilde{\alpha}$.

Por otro lado, si $y \in \uparrow x$ y V es una vecindad abierta de y según $\widetilde{\alpha}$, entonces $x \in V$ porque

$$x \leq y,\ y \in V \text{ y } V \in \widetilde{\alpha};$$

$$\therefore \{x\} \cap V \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{N}_y^\circ;$$

$$\therefore y \in \overline{\{x\}}, \forall y \in \uparrow x; \text{ i.e. } \uparrow x \subseteq \overline{\{x\}}$$

La contención en sentido contrario también vale, pues $\uparrow x$ es cerrado y $x \in \uparrow x$. Por lo tanto es cierto que $\uparrow x = \overline{\{x\}}$.

Para verificar la naturalidad de I_X hay que probar que para toda $f \in Y^X$

$$f : (X, \alpha) \to (Y, \beta) \in \hom_{\mathfrak{Pros}} \Leftrightarrow f : (X, I_X(\alpha)) \to (Y, I_Y(\beta)) \text{ es continua}$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es monótona y tomemos $V \in I_Y(\beta)$ arbitrario. Si

$$(x_1, x_2) \in \alpha \quad \text{y} \quad x_2 \in f^{-1}V$$

entonces

$$(fx_1, fx_2) \in \beta \quad \text{y} \quad fx_2 \in V$$

porque f es monótona. En consecuencia, $fx_1 \in V$, i.e. $x_1 \in f^{-1}V$. Por lo tanto, $f^{-1}V \in I_X(\alpha)$, lo que significa que f es continua.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f : (X, I_X(\alpha)) \to (Y, I_X(\beta))$ es continua y sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $(x_1, x_2) \in \alpha$. Debido a la continuidad de f tenemos

$$f\overline{\{x\}} \subseteq \overline{f\{x\}} \quad \text{i.e.} \quad f(\uparrow x) = \uparrow fx$$

Como $x_1 \leq x_2$, $[(x_1, x_2) \in \alpha]$, tenemos $\uparrow x_2 \subseteq \uparrow x_1$; en consecuencia

$$f(\uparrow x_2) \subseteq f(\uparrow x_1) \subseteq \uparrow fx_1$$

$$\therefore fx_2 \in \uparrow fx_1 \quad \text{i.e.} \quad (fx_1, fx_2) \in \beta$$

lo que significa que f resulta monótona, como se quería demostrar.¡♯!

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 25 de julio de 1990.

<u>*Ejercicio:*</u> 4. Con relación al isomorfismo natural

$$I_X : \mathfrak{Pros}[X] \to \mathfrak{CDTop}[X]$$

probar que

$$(X, \alpha) \in \mathfrak{Pos} \Leftrightarrow I_X(\alpha) \in T_0$$

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria. Para $\alpha, \beta \in \mathcal{S}[X]$ diremos que α **es equivalente a** β ($\alpha \equiv \beta$) si $\alpha \leq_{\mathcal{S}} \beta$ y $\beta \leq_{\mathcal{S}} \alpha$; i.e. si $1_X : (X, \alpha) \to (X, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-isomorfismo.

Es claro que para cada $X \in \mathfrak{Set}$, $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}[X]$.

Proposición. Si $\mathcal{S}$ es transportable, entonces

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Demostración. Supongamos $\alpha \equiv \beta$; entonces tenemos el $\mathcal{S}$-isomorfismo $1_X : (X, \alpha) \to (X, \beta)$. Por otro lado, debido a la transportabilidad de $\mathcal{S}$, tenemos que la única $\mathcal{S}$-estructura para X que hace de $1_X : (X, \alpha) \to X$ un $\mathcal{S}$-morfismo es α. Por lo tanto, $\alpha = \beta$. $\sharp$

Ejercicio: 5. Probar que en $\mathfrak{Mtc}$

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \tau(\alpha) = \tau(\beta)$$

Definición. Se dice que una *ccce* $\mathcal{S}$ **es múltiplemente transportable** si dada $\alpha \in \mathcal{S}[X]$ y una biyección $f \in Y^X$ existe $\beta \in \mathcal{S}[Y]$ (no necesariamente única) tal que $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-isomorfismo.

Ejemplo: Del ejercicio anterior resulta que $\mathfrak{Mtc}$ es múltiplemente transportable.

El concepto de *ccce* isomorfas se amplía debido a la definición anterior:

Definición. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos *ccce* arbitrarias. Se dice que $\mathcal{S}$ **es casi isomorfa a** $\mathcal{T}$ si para cada $X \in \mathfrak{Set}$ existe una función

$$I_X : \mathcal{S}[X] \to \mathcal{T}[X]$$

que es natural, i.e. $\forall f \in Y^X$

$$f \in \hom_{\mathcal{S}}[(X, \alpha), (Y, \beta)] \Leftrightarrow f \in \hom_{\mathcal{T}}[(X, I_X(\alpha)), (Y, I_Y(\beta))]$$

y **casi biyectiva**, o sea

(i) I_X es **casi inyectiva**, i.e. para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{S}[X]$,

$$I_X(\alpha_1) = I_X(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2$$

(ii) I_X es **casi suprayectiva**, i.e. si $\beta \in \mathcal{T}[X]$, entonces existe $\alpha \in \mathcal{S}[X]$ tal que $I_X(\alpha) \equiv \beta$.

Proposición. Toda *ccce* múltiplemente transportable contiene una *subccce* que es plena, transportable y casi isomorfa a ella.

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ qualquier *ccce* múltiplemente transportable y consideremos, para cada $X \in \mathfrak{Set}$, la relación de equivalencia $\equiv$ en $\mathcal{S}[X]$. Sea $\mathcal{T}[X]$ una colección de representantes de las clases definidas por $\equiv$ en $\mathcal{S}[X]$, de manera que en $\mathcal{T}[X]$ haya un representante de cada clase, y solamente uno. Procediendo así damos lugar a una colección de objetos (X, α), con $\alpha \in \mathcal{T}[X]$, y de morfismos que son necesariamente todos los $\mathcal{S}$-morfismos definibles entre estos objetos. O sea que obtenemos una *subccce* plena $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$.

Ahora definamos, para cada $X \in \mathfrak{Set}$, $I_X : \mathcal{S}[X] \to \mathcal{T}[X]$ como la aplicación canónica que asocia a cada $\alpha \in \mathcal{S}[X]$ la única estructura $\beta \in \mathcal{T}[X]$ tal que $\alpha \equiv \beta$. Claramente se satisfacen las condiciones (i) y (ii) de la definición anterior. Además, si $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo arbitrario, entonces $f : (X, I_X(\alpha)) \to (Y, I_Y(\beta))$ es un $\mathcal{T}$-morfismo porque la composición

$$f : (X, I_X(\alpha)) \xrightarrow{1_X} (X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, \beta) \xrightarrow{1_Y} (Y, I_Y(\beta))$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo. Y análogamente, si $f : (X, I_X(\alpha)) \to (Y, I_Y(\beta))$ es un $\mathcal{T}$-morfismo, entonces es un $\mathcal{S}$-morfismo y la composición

$$f : (X, \alpha) \xrightarrow{1_X} (X, I_X(\alpha)) \xrightarrow{f} (Y, I_Y(\beta)) \xrightarrow{1_X} (Y, \beta)$$

también lo es. Esto prueba que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son casi isomorfos.

Veamos, para finalizar, que $\mathcal{T}$ es transportable. Sea (X,α) un $\mathcal{T}$-objeto arbitrario y $f : X \to Y$ una biyección cualquiera. Como $\mathcal{S}$ es múltiplemente transportable, existe $\beta' \in \mathcal{S}[Y]$ tal que $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta')$ es un $\mathcal{S}$-isomorfismo. Sea β la única estructura en $\mathcal{T}[Y]$ tal que $\beta' \equiv \beta$. Entonces $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ es un $\mathcal{T}$-isomorfismo, pues es la composición

$$(X,\alpha) \xrightarrow{f} (Y,\beta') \xrightarrow{1_Y} (Y,\beta)$$

que es un $\mathcal{S}$-morfismo entre objetos de $\mathcal{T}$. Esto prueba que $\mathcal{T}$ es transportable y la proposición queda demostrada. $\sharp$

Agosto 20 de 1990.

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria. **Un esqueleto de** $\mathcal{S}$ es una colección[15] $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$-objetos y $\mathcal{S}$-morfismos que satisface las condiciones siguientes:

(i) Para cualquier $\mathcal{S}$-objeto (X,α) existe exactamente un objeto (X',α') en $\mathcal{S}_0$ que es isomorfo a (X,α).

(ii) Si (X',α') y (Y',β') son miembros de $\mathcal{S}_0$, entonces

$$\hom_{\mathcal{S}_0}\left((X',\alpha'),(Y',\beta')\right) = \hom_{\mathcal{S}}\left((X',\alpha'),(Y',\beta')\right)$$

Ejemplos: 1. Sea $\mathcal{S} = \mathfrak{Top}$. Para cualquier número cardinal c (finito ó infinito) sea X_c el conjunto tal que $\#X_c = c$. Consideremos la familia de espacios topológicos

$$\{(X_c,\tau_i) : \tau_i \in \mathfrak{Top}[X_c]\}$$

en la que

$$i \neq j \Rightarrow \nexists h \in X_c^{X_c} \text{ biyectiva } .\ni. \begin{cases} h \in \hom_{\mathfrak{Top}}\left((X_c,\tau_i),(X_c,\tau_j)\right) \text{ y} \\ h^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Top}}\left((X_c,\tau_j),(X_c,\tau_i)\right) \end{cases}$$

Si d es otro número cardinal, sea

$$\hom_{\mathcal{S}_0}\left((X_c,\tau),(X_d,\sigma)\right) = \hom_{\mathfrak{Top}}\left((X_c,\tau),(X_d,\sigma)\right)$$

Entonces la colección de espacios topológicos (X_c,τ) y de morfismos $\hom_{\mathcal{S}_0}$ es un esqueleto de $\mathfrak{Top}$. En efecto,

(i) Si (X,τ) es un espacio topológico y $\#X = c$, entonces existe una biyección $h \in X_c^X$. Sea $\tau_i = h(\tau)$; entonces $h : (X,\tau) \to (X_c,\tau_i)$ es un isomorfismo en $\mathfrak{Top}$. Y si (X',τ') fuese otro miembro de $\mathcal{S}_0$ isomorfo a (X,τ), entonces $X' = X_c$ y $\tau' = \tau_i$.

(ii) Según lo hemos construido, claramente se satisface esta segunda condición.

Agosto 22 de 1990.

2. Sea $\mathcal{S} = \mathfrak{Pos}$. Para cada número cardinal c sea X_c como antes. Para la construcción del esqueleto definamos el conjunto

$$F_c = \{(X_c,\alpha) : \alpha \in \mathfrak{Pos}[X_c]\} \ ;$$

[15] *(N. del A.)* Hacemos uso de la palabra "colección" porque no todo esqueleto es una *ccce*. Adámek comete el error de afirmar lo contrario.

considerémoslo con la relación de isomorfía $\cong$ y elijamos un elemento (solamente uno) en cada clase de equivalencia. Así, $\mathcal{S}_0$ quedará formado por los copos elegidos en F_c, para cada número cardinal c. En cuanto a los morfismos, procedemos directamente haciendo

$$\hom_{\mathcal{S}_0}\left((X_c,\alpha),(X_d,\beta)\right)=\hom_{\mathfrak{Pos}}\left((X_c,\alpha),(X_d,\beta)\right)$$

(i) Sea (X,α) un copo arbitrario; si $\#X=c$, entonces existe una biyección $h\in X_c^X$. Transportando mediante h el orden parcial α de X en X_c se obtiene $(X_c,\alpha')\in F_c$ y $h:(X,\alpha)\to(X_c,\alpha')$ es un $\mathfrak{Pos}$-isomorfismo. Sea (X_c,β) el representante elegido en la clase de F_c a la que pertenece (X_c,α'); entonces hay un isomorfismo $k:(X_c,\alpha')\to(X_c,\beta)$; por lo tanto, $kh:(X,\alpha)\to(X_c,\beta)$ es un isomorfismo y $(X_c,\beta)\in\mathcal{S}_0$.

(ii) Por construcción, esta condición también se satisface.

Teorema. Toda *ccce* posee un esqueleto.

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria. Para cada número cardinal c definimos

$$F_c=\{(X_c,\alpha):\alpha\in\mathcal{S}[X_c]\}\ ;$$

consideramos la relación de isomorfía $\cong$ en F_c y las clases de equivalencia correspondientes. Ahora $\mathcal{S}_0$ se construye del siguiente modo:

(i) Los $\mathcal{S}$-objetos en $\mathcal{S}_0$ forman una clase de representantes de las clases de equivalencia de F_c según $\cong$, para cada número cardinal c.

(ii) Los $\mathcal{S}$-morfismos en $\mathcal{S}_0$ los construimos directamente mediante

$$\hom_{\mathcal{S}_0}(A_0,B_0)=\hom_{\mathcal{S}}(A_0,B_0)$$

Es claro que $\mathcal{S}_0$ es un esqueleto. $\sharp$

Teorema. Sea $\mathcal{S}$ cualquier *ccce*; si $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_0'$ son esqueletos de $\mathcal{S}$, entonces existe una biyección

$$I:\mathcal{S}_0\to\mathcal{S}_0'$$

tal que:

$(\cdot)$ Para cada $\mathcal{S}$-objeto $A_0\in\mathcal{S}_0$

$$IA_0\cong A_0\quad\text{e}\quad I1_{A_0}=1_{IA_0}$$

$(\cdot\cdot)$ Si

$$f\in\hom_{\mathcal{S}_0}(A_0,B_0)\quad\text{y}\quad g\in\hom_{\mathcal{S}_0}(B_0,C_0)$$

entonces

$$If\in\hom_{\mathcal{S}_0'}(IA_0,IB_0)\ ,\quad Ig\in\hom_{\mathcal{S}_0'}(IB_0,IC_0)$$

e

$$I(gf)=Ig\circ If$$

Demostración. Sea A_0 cualquier $\mathcal{S}_0$-objeto; por ser $\mathcal{S}_0'$ un esqueleto existe un $\mathcal{S}_0'$-objeto único, A_0', tal que $A_0'\cong A_0$. De este modo, definimos $IA_0=A_0'$, para los objetos; y si $f\in\hom_{\mathcal{S}_0}(A_0,B_0)$, entonces definimos $If=h_{B_0}fh_{A_0}^{-1}$, donde h_{A_0} y h_{B_0} son los $\mathcal{S}$-isomorfismos del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & & \xrightarrow{f} & & B_0 \\ h_{A_0}\downarrow & \cong & & \cong & \downarrow h_{B_0} \\ A_0' & & \underset{If}{\dashrightarrow} & & B_0' \end{array}$$

($\cdot$) De acuerdo con esta definición tenemos $IA_0 \cong A_0$. Si además $B_0 = A_0$ y $f = 1_{A_0}$, entonces

$$If = I1_{A_0} = h_{A_0} 1_{A_0} h_{A_0}^{-1} = h_{A_0} h_{A_0}^{-1} = 1_{A_0'} = 1_{IA_0}$$

con lo que ($\cdot$) queda demostrado.

($\cdot\cdot$) Si f y g son como arriba, tenemos

$$I(gf) = h_{C_0} gf h_{A_0}^{-1} = h_{C_0} g h_{B_0}^{-1} h_{B_0} f h_{A_0}^{-1} = Ig \circ If$$

con lo que el teorema queda demostrado. $\sharp$

Agosto 27 de 1990.

Definición. Sean $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{T}_0$ esqueletos de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente. Entonces, $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{T}_0$ **son concretamente isomorfos** si existe una biyección

$$I : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{T}_0$$

tal que:

($\cdot$) con cada miembro (X_c, α) de $\mathcal{S}_0$ ponga en correspondencia un $\mathcal{T}_0$-objeto (Y_c, β) y una función biyectiva $h_c : X_c \to Y_c$ de modo que

($\cdot\cdot$) siendo

$$f \in \hom_{\mathcal{S}_0}((X_c, \alpha), (X_d, \alpha'))$$

exista un único morfismo

$$g \in \hom_{\mathcal{T}_0}((Y_c, \beta), (Y_d, \beta'))$$

que haga que conmute el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X_c, \alpha) & \xrightarrow{f} & (X_d, \alpha') \\ h_c \downarrow & & \downarrow h_d \\ (Y_c, \beta) & \xrightarrow[g]{} & (Y_d, \beta') \end{array}$$

Nota. Cabe resaltar en esta definición que

$$I1_A = 1_{IA}\ , \quad g = If \quad \text{e} \quad I(gf) = Ig \circ If$$

Ejemplo: Dos esqueletos cualesquiera de una *ccce* arbitraria siempre son concretamente isomorfos.

En efecto, del teorema anterior sabemos que si $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_0'$ son esqueletos de $\mathcal{S}$, entonces existe una biyección

$$I : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0'$$

tal que:

($\cdot$) con cada $\mathcal{S}_0$-objeto $A_0 = (X_c, \alpha)$ asocia un $\mathcal{S}_0'$-objeto $IA_0 = (Y_c, \beta)$ y una biyección $h_{A_0} = h_c$ [que de hecho es un isomorfismo en $\hom_{\mathcal{S}}(A_0, IA_0)$], y

($\cdot\cdot$) si $f \in \hom_{\mathcal{S}_0}(A_0, B_0)$, entonces el $\mathcal{S}_0'$-morfismo $g = h_d f h_c^{-1}$ (con $B_0 \overset{h_d}{\cong} IB_0$) hace conmutativo el diagrama de arriba (y es de hecho If).

Definición. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos *ccce* cualesquiera. Se dice que $\mathcal{S}$ **es concretamente equivalente a** $\mathcal{T}$ si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ poseen esqueletos concretamente isomorfos.

Observación. Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son concretamente isomorfos, entonces son concretamente equivalentes, pero no recíprocamente.

6.4 Subobjetos en *ccce*

Septiembre 3 de 1990.

Sean, (Y, σ) cualquier espacio topológico, $X \subseteq Y$, ι la inclusión $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$ y $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$. Por los cursos de topología sabemos que una condición necesaria y suficiente para que (X, τ) sea un subespacio topológico de (Y, σ) es que τ coincida con la topología inicial correspondiente a ι y σ, la cual está determinada por las dos condiciones siguientes:

$(\cdot)$ $\iota : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua.

$(\cdot\cdot)$ Si $\varrho \in \mathfrak{Top}[Z]$ y $g : Z \to X$ es una función tal que $\iota g : (Z, \varrho) \to (Y, \sigma)$ es continua, entonces $g : (Z, \varrho) \to (X, \tau)$ es continua.

A continuación introduciremos un concepto del cual esto viene a ser un ejemplo.

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria y sean, (Y, β) cualquier $\mathcal{S}$-objeto, $X \subseteq Y$, ι la inclusión $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$ y $\alpha \in \mathcal{S}[X]$. Diremos que (X, α) **es un subobjeto de** (Y, β) si se satisfacen las condiciones siguientes:

$(\cdot)$ $\iota : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo.

$(\cdot\cdot)$ Si $\gamma \in \mathcal{S}[Z]$ y $g : Z \to X$ es una función tal que $\iota g : (Z, \gamma) \to (Y, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo, entonces $g : (Z, \gamma) \to (X, \alpha)$ también es un $\mathcal{S}$-morfismo.

Nota: El subobjeto de (Y, σ) cuyo conjunto subyacente es X no necesariamente es único, pero puede considerarse único salvo isomorfismos. Existen *ccce* en las que la unicidad sí ocurre totalmente. También puede ocurrir que el subconjunto X no determine subobjeto alguno[16].

Definición. Una *ccce* $\mathcal{S}$ **es hereditaria** si para todo $\mathcal{S}$-objeto (Y, β) y cualquier $X \subseteq Y$ existe $\alpha \in \mathcal{S}[X]$ (al menos una) tal que (X, α) sea un subobjeto de (Y, β).

Ejemplo: $\mathfrak{Top}$ es hereditaria, y notamos que se trata de un caso especial porque la $\mathfrak{Top}$-estructura involucrada, que es la topología inicial, es única. La extensión del concepto de topología inicial es el concepto de *estructura inicial*. Como en $\mathfrak{Top}$, puede demostrarse que en toda *ccce* en la que tal estructura siempre existe, es única. Sin embargo, existen *ccce* que, a diferencia de $\mathfrak{Top}$, no siempre poseen estructuras iniciales. De aquí que se dé el nombre de *topológicas* a aquéllas que siempre tienen tales estructuras.

Viernes 7 de septiembre de 1990.

Ejemplo de subobjeto. Sean, $(Y, \leq)$ un copo arbitrario, $X \subseteq Y$ y $\leq'$ el orden parcial inducido por $\leq$ en X, i.e.

$$x_1 \leq' x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2, \forall x_1, x_2 \in X$$

Entonces $(X, \leq')$ es un subobjeto de $(Y, \leq)$. En efecto

$(\cdot)$ Si $x_1 \leq' x_2$, entonces

$$\iota x_1 = x_1 \leq x_2 = \iota x_2$$

lo cual significa que $\iota : (X, \leq') \hookrightarrow (Y, \leq)$ es monótona.

$(\cdot\cdot)$ Si $(Z, \leq'')$ es un copo y $g : Z \to X$ una función tal que $\iota g : (Z, \leq'') \to (Y, \leq)$ es monótona, entonces para $z_1 \leq'' z_2$ se tiene

$$\iota g z_1 \leq \iota g z_2 \ ;$$

pero $gz_1, gz_2 \in X$; por lo tanto

$$\iota g z_1 = g z_1 \leq' g z_2 = \iota g z_2$$

[16]Píensese, por ejemplo, en $\mathfrak{Vec}$, la *ccce* de los *espacios vectoriales reales de dimensión finita y transformaciones lineales.* En $\mathfrak{Vec}$ no todo subconjunto de un espacio vectorial acepta, por así decirlo, la vestidura lineal de modo que resultase subespacio del espacio en cuestión.

Por lo tanto g es monótona. $\sharp$

A consecuencia del ejemplo anterior tenemos que también $\mathfrak{Pos}$ es hereditaria.

TEOREMA. Sea $\mathcal{S}$ cualquier *ccce* transportable. Si B es un $\mathcal{S}$-objeto dado y A un subobjeto de B, entonces no existe otro subobjeto de B con el mismo conjunto subyacente de A.

Demostración. Sean, (X, α) y (X, α') dos subobjetos de (Y, β). Entonces,

$$\iota : (X, \alpha') \hookrightarrow (Y, \beta)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo, de acuerdo con $(\cdot)$ de la definición. Y como al componer ι con la función

$$1_X : (X, \alpha) \to (X, \alpha')$$

obtenemos

$$\iota = \iota 1_X : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$$

que también es un $\mathcal{S}$-morfismo [porque (X, α) también es subobjeto de (Y, β)], entonces podemos aplicar $(\cdot\cdot)$ de la definición y concluir que

$$1_X : (X, \alpha) \to (X, \alpha')$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo. Análogamente podemos demostrar que también

$$1_X : (X, \alpha') \to (X, \alpha)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo. Por lo tanto, $\alpha' \equiv \alpha$, y como $\mathcal{S}$ es transportable, entonces $\alpha' = \alpha$. $\sharp$

Ejercicio: 6. En $\mathfrak{Lat}$ sean (X, α) y (Y, β) dos objetos arbitrarios. Si $X \subseteq Y$, probar que (X, α) es subobjeto de (Y, β) si, y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$x_1 \wedge_\beta x_2 = x_1 \wedge_\alpha x_2 \quad \text{y} \quad x_1 \vee_\beta x_2 = x_1 \vee_\alpha x_2$$

Antes de finalizar la clase, consideremos nuevamente la retícula $(\mathbb{N}, \alpha)$ en la que

$$\alpha = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n_1 \mid n_2\}$$

e ínfimos y supremos se definen para cualesquier $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mediante

$$n_1 \wedge n_2 = \text{ m.c.d.}\,(n_1, n_2) \quad \text{y} \quad n_1 \vee n_2 = \text{ m.c.m.}\,(n_1, n_2)$$

Sea $2\mathbb{N}$ el conjunto de números pares y pensémoslo dotado del orden parcial α' que α le proporciona. Como consecuencia del ejercicio anterior tenemos que $(2\mathbb{N}, \alpha')$ es una subretícula de $(\mathbb{N}, \alpha)$, pues tanto el máximo común divisor como el mínimo común múltiplo de cualesquiera dos números pares también es par. En cambio, si mediante $\mathbb{P}$ denotamos al conjunto de números primos, el copo $(\mathbb{P}, \alpha')$ no resulta subretícula de $(\mathbb{N}, \alpha)$ ya que para cualquier par de números primos p_1 y p_2 se tiene

$$p_1 \wedge p_2 = 1 \notin \mathbb{P} \quad \text{y} \quad p_1 \vee p_2 = p_1 p_2 \notin \mathbb{P}$$

Obsérvese que, de hecho, α' en $\mathbb{P}$ da el orden discreto.

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 10 de septiembre de 1990.

Ejercicio: 7. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* cualquiera y sea (Z,γ) uno de sus objetos. Probar que:

(a) Si (X,α) es subobjeto de (Y,β) y (Y,β) es subobjeto de (Z,γ), entonces (X,α) es subobjeto de (Z,γ).

(b) Si (X,α) y (Y,β) son subobjetos de (Z,γ) y $X \subseteq Y$, entonces (X,α) es subobjeto de (Y,β).

Veamos más ejemplos de subobjetos en *ccce*.

1. Sea (X,α) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$; entonces

$$\alpha' = \alpha \mid Y \times Y : Y \times Y \to [0,\infty)$$

es una métrica para Y con la que (Y,α') resulta un subobjeto de (X,α) en $\mathfrak{Met}$, i.e. un subespacio métrico.

En efecto;

$(\cdot)$ $\iota : (Y,\alpha') \hookrightarrow (X,\alpha)$ es una contracción porque

$$\alpha\left(\iota y_1, \iota y_2\right) = \alpha\left(y_1, y_2\right) = \alpha'\left(y_1, y_2\right), \forall y_1, y_2$$

$(\cdot\cdot)$ Si $(Z,\gamma) \in \mathfrak{Met}$ y $g : Z \to Y$ es tal que $\iota g : (Z,\gamma) \to (X,\alpha)$ es una contracción, entonces

$$\alpha\left(\iota g z_1, \iota g z_2\right) \leq \gamma\left(z_1, z_2\right)$$

pero $\iota g z_i = \iota\left(g z_i\right) = g z_i \in Y$, $i = 1,2$. Por lo tanto

$$\alpha\left(\iota g z_1, \iota g z_2\right) = \alpha'\left(g z_1, g z_2\right)$$

$$\therefore \alpha'\left(g z_1, g z_2\right) \leq \gamma\left(z_1, z_2\right), \forall z_1, z_2 \in Z$$

Por lo tanto, también $g : (Z,\gamma) \to (Y,\alpha')$ es una contracción.

En consecuencia, también $\mathfrak{Met}$ es hereditaria.

2. Mediante $\mathfrak{Topc}_2$ denotaremos a la *subccce* plena de $\mathfrak{Top}$ formada por **espacios compactos de Hausdorff y funciones continuas**. Vamos a mostrar que los subobjetos de un $(X,\alpha) \in \mathfrak{Topc}_2$ son precisamente los subconjuntos cerrados de X con la topología inducida.

En efecto, si $Y \subseteq X$ es cerrado en (X,α), entonces $(Y,\alpha \mid Y)$ es compacto y de Hausdorff porque los subconjuntos cerrados de un espacio compacto son compactos y porque el ser de Hausdorff es una propiedad que hereda cualquier subobjeto de un $\mathfrak{Top}$-objeto que la tiene, como demostramos en los cursos de topología (con otra terminología, claro).Además:

$(\cdot)$ $\iota : (Y,\alpha \mid Y) \hookrightarrow (X,\alpha)$ es continua ya que

$$\iota^{-1} U = U \cap Y \in \alpha \mid Y,\ \forall U \in \alpha$$

$(\cdot\cdot)$ Si $(Z,\gamma) \in \mathfrak{Topc}_2$ y $g : Z \to Y$ es tal que $\iota g : (Z,\gamma) \to (X,\alpha)$ es continua, entonces

$$g^{-1}\left(U \cap Y\right) = g^{-1}\left(\iota^{-1} U\right) = \left(\iota g\right)^{-1} U \in \gamma,\ \forall U \in \alpha$$

lo cual significa que también $g : (Z,\gamma) \to (Y,\alpha \mid Y)$ es continua. Por lo tanto, $(Y,\alpha \mid Y)$ es subobjeto de (X,α).

Recíprocamente, si $(Y,\alpha \mid Y)$ es subobjeto de $(X,\alpha) \in \mathfrak{Topc}_2$, entonces Y es cerrado en (X,α) porque los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff son cerrados.$_\sharp$

Observación. Para una *ccce* $\mathcal{S}$ arbitraria, si (Y,β) es subobjeto de (X,α), entonces β es la más áspera de todas las estructuras $\beta_i \in \mathcal{S}[Y]$ tales que $\iota : (Y,\beta_i) \hookrightarrow (X,\alpha)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo.

En efecto, si consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & (X,\alpha) & \\ \iota \circ 1_Y \nearrow & \circlearrowleft & \nwarrow \iota \\ (Y,\beta_i) & \underset{1_Y}{\rightarrow} & (Y,\beta) \end{array}$$

y aplicamos la condición $(\cdot\cdot)$ de la definición de subobjeto, podemos asegurar que

$$1_Y : (Y,\beta_i) \ \ \rightarrow (Y,\beta)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo, lo cual implica que β es más áspera que β_i.

Ejercicio: 8. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* cualquiera. Probar que:

a) Todo $\mathcal{S}$-objeto es subobjeto de sí mismo.

b) Si (X,α) y (X,α') son dos $\mathcal{S}$-objetos, entonces (X,α') es subobjeto de (X,α) si, y sólo si,

$$1_X : (X,\alpha) \rightarrow (X,\alpha')$$

es un $\mathcal{S}$-isomorfismo. (*Sugerencia:* Utilice la observación anterior.)

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria. Se dice que $\mathcal{S}$ **tiene intersecciones** si para todo $\mathcal{S}$-objeto (X,α) y para cualesquiera subobjetos suyos $(Y_i,\beta_i)_I$ existe una $\mathcal{S}$-estructura para $\bigcap_{i\in I} Y_i$ con la cual resulte subobjeto de (X,α).

Septiembre 12 de 1990.

Ejemplos de ccce con intersecciones y sin ellas:

1. Toda *ccce* hereditaria posee intersecciones.

2. Como los subobjetos de cualquier $(X,\alpha) \in \mathfrak{Topc}_2$ son los subconjuntos cerrados de (X,α) y como toda intersección cerrada de éstos es cerrada en (X,α), tenemos que $\mathfrak{Topc}_2$ tiene intersecciones.

3. Sea $(Y_i,\beta_i)_I$ una familia cualquiera de subretículas de una retícula arbitraria (X,α) y sea $Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$. Debido al resultado establecido en el ejercicio 6, dados cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$ tenemos

$$y_1 \wedge_\alpha y_2 \ , \, y_1 \vee_\alpha y_2 \in Y_i, \ \forall i \in I$$

Por lo tanto, siendo β el orden inducido por α en Y y haciendo

$$y_1 \wedge_\beta y_2 = y_1 \wedge_\alpha y_2 \quad \text{y} \quad y_1 \vee_\beta y_2 = y_1 \vee_\alpha y_2$$

tenemos que (Y,β) es también una subretícula de (X,α). Por lo tanto, $\mathfrak{Lat}$ tiene intersecciones.

4. Mediante $\mathfrak{Topc}$ denotaremos a la *subccce* plena de $\mathfrak{Top}$ formada por **espacios compactos y funciones continuas**. Veremos un ejemplo que muestra que $\mathfrak{Topc}$ carece de intersecciones.

Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ y sea α la topología para X definida por

$$U \in \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X - U \text{ es finito} \\ \text{o} \\ U \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \emptyset \end{array} \right.$$

Entonces, $\alpha \in \mathfrak{Topc}[X]$. En efecto, si $\mathcal{A} = (U_i)_I$ es una cubierta abierta arbitraria de X, entonces $\infty_1 \in U_{i_0}$, p.a. $i_0 \in I$; luego, $U_{i_0} \cap \{\infty_1, \infty_2\} \neq \varnothing$, y como $U_{i_0} \in \alpha$, entonces $X - U_{i_0}$ es finito y por lo tanto puede ser cubierto por un número finito de miembros de $\mathcal{A}$. Estos miembros y U_{i_0} constituyen una subcubierta finita para X, lo cual prueba que, efectivamente, $(X,\alpha) \in \mathfrak{Topc}$.

Valiéndonos de argumentos similares a éste podemos evidenciar que

$$Y_1 = X - \{\infty_1\} \quad \text{y} \quad Y_2 = X - \{\infty_2\}$$

son subconjuntos compactos de X. En consecuencia, los subespacios (Y_1, β_1) y (Y_2, β_2) de (X,α) son subobjetos en $\mathfrak{Topc}$. Sin embargo, su intersección

$$\mathbb{N} = Y_1 \cap Y_2$$

no puede mirarse como subobjeto de (X,α) en $\mathfrak{Topc}$ ya que, de hecho, la topología β inducida por α en $\mathbb{N}$ es la topología discreta:

$$U_n = \{n\} \in \alpha \text{ porque } U_n \cap \{\infty_1, \infty_2\} = \varnothing$$

de manera que

$$U_n \cap \mathbb{N} = \{n\} \in \beta, \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por consiguiente, si γ fuese una topología para $\mathbb{N}$ según la cual $(\mathbb{N},\gamma)$ resultase $\mathfrak{Topc}$-subobjeto de (X,α), entonces, por la continuidad de la inclusión

$$\iota : (\mathbb{N},\gamma) \hookrightarrow (X,\alpha)$$

tenemos

$$\{n\} = \iota^{-1} U_n \in \gamma, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

i.e. $\gamma = \beta$. Pero $(\mathbb{N},\beta)$ no es compacto porque de la cubierta abierta

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\}$$

es imposible extraer una subcubierta finita. Así pues, tal γ no existe.$_\sharp$

Nota: Si (X,α) es un objeto de una *ccce* con intersecciones, entonces para cada subconjunto $A \subseteq X$ existe el más chico de los subobjetos (T,β) de (X,α) tal que $A \subseteq Y$: a saber, es la intersección de todos los subobjetos de (X,α) que contienen a A.

Definición. Sean, $\mathcal{S}$ una *ccce* con intersecciones, (X,α) un $\mathcal{S}$-objeto arbitrario y $A \subseteq X$. Si $(Y_i, \beta_i)_I$ es la familia de subobjetos de (X,α) que contienen a A y β es una $\mathcal{S}$-estructura que hace de $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ un subobjeto de (X,α), entonces se dice que (Y,β) **está generado por** A. Si $Y = X$, hablaremos de A como del **conjunto de generadores de** (X,α). Diremos que (X,α) **tiene** n **generadores** cuando exista un conjunto A de generadores de (X,α) cuyo número cardinal sea n.

Más adelante probaremos que el subobjeto generado por A es único, salvo isomorfismos.

Ejemplos: 1. En $\mathfrak{Top}$, para cualquier espacio topológico (X,τ) el subespacio generado por A es $(A, \tau \mid A)$.

2. En forma más general, el subobjeto de (X,α) generado por $A \subseteq X$ en una *ccce* hereditaria es (A, α'), donde α' es la estructura que hace de A un subobjeto de (X,α).

Ejercicio: 9. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* tal que para todo $\mathcal{S}$-objeto (X,α) y cualquier $A \subseteq X$, la familia de subobjetos $(Y_i, \beta_i)_I$ de (X,α) que contienen a A tiene la propiedad de que $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ posee una estructura que la vuelve subobjeto de (X,α). Probar que $\mathcal{S}$ tiene intersecciones.

Septiembre 14 de 1990.

Más ejemplos de conjuntos generadores.

1. El intervalo $[0,1]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$ es un $\mathfrak{Top}_2$-objeto con $\aleph_0$ generadores.

En efecto, si $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $Y \subseteq [0,1]$ es un subobjeto que contiene a A, entonces Y es cerrado en $[0,1]$ y por lo tanto $\overline{A} \subseteq Y$; pero $\overline{A} = [0,1]$ porque $\mathbb{Q}$ es denso en $[0,1]$. Por lo tanto, el único subobjeto que contiene a A es el propio intervalo. Como además, A es un conjunto infinito numerable, entonces el número cardinal de A es $\aleph_0$ y esto explica lo afirmado.

2. De un modo más general podemos asegurar que en $\mathfrak{Top}_2$ el subobjeto que $A \subseteq X$ genera en (X,α) es $\overline{A}$.

En efecto, ya vimos que los subobjetos de cualquier $(X,\alpha) \in \mathfrak{Top}_2$ son precisamente los subconjuntos cerrados de (X,α); por consiguiente, hablar del subobjeto generado por un subconjunto A cualquiera es hablar del más chico de los cerrados de (X,α) que contienen a A, o sea, es referirse a $\overline{A}$.

A conscuencia de esto tenemos que los subconjuntos densos de (X,α) son precisamente los conjuntos generadores de este tipo de espacios ya que ellos, y solamente ellos, tienen la propiedad de que sus cerraduras coinciden con todo el espacio.

3. Denotaremos con $\mathfrak{Vec}$ a la colección de **espacios vectoriales reales de dimensión finita y transformaciones lineales**. $\mathfrak{Vec}$ satisface la definición de una *ccce* como se comprueba fácilmente. Por los cursos de álgebra lineal sabemos que la intersección arbitraria de subespacios de un espacio vectorial cualquiera es también un subespacio de éste, o sea que $\mathfrak{Vec}$ tiene intersecciones. Si $(X,\alpha) \in \mathfrak{Vec}$ y $A \subseteq X$, entonces el subobjeto generado por A (la *cápsula lineal* que A genera) viene dado por el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A. Un conjunto de n vectores linealmente independientes genera a (X,α) ssi la dimensión de (X,α) es n.

4. La *ccce* que a continuación presentamos suele denotarse por medio de $\mathfrak{Mon}$.

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Mon}[X]$ consta de parejas $(\cdot, e)$ en las que

$$\cdot : X \times X \to X$$

es una operación binaria que es asociativa y e es un elemento de X llamado **neutro** y que cumple lo siguiente:

$$e \cdot x = x = x \cdot e, \ \forall x \in X$$

(ii) Por consiguiente los $\mathfrak{Mon}$-objetos son parejas del tipo $(X,(\cdot,e))$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $(\cdot,e) \in \mathfrak{Mon}[X]$; reciben el nombre de **monoides**.

(iii) Si $A = (X,(\cdot,e))$ y $B = (Y,(\circ,\mathsf{e}))$ son monoides cualesquiera, entonces

$$\hom_{\mathfrak{Mon}}(A,B) = \left\{ f \in Y^X : f(x_1 \cdot x_2) = fx_1 \circ fx_2, \ \forall x_1, x_2 \in X \text{ y } fe = \mathsf{e} \right\}$$

Los $\mathfrak{Mon}$-morfismos se llaman **homomorfismos de monoides**.

En $\mathfrak{Mon}$ se verifican los axiomas de composición e identidad que definen a una *ccce* como se comprueba fácilmente.

En $\mathfrak{Mon}$ los subobjetos se caracterizan por ser cerrados bajo la operación del monoide en cuestión y contener al elemento neutro.

En efecto, supongamos que $(X,(\cdot,e))$ es un monoide y que $Y \subseteq X$ es cerado bajo $\cdot$ y contiene a e. Entonces, $(Y,(\cdot,e))$ es un monoide y tenemos:

$(\cdot)$ $\iota : (Y, (\cdot, e)) \hookrightarrow (X, (\cdot, e))$ es un homomorfismo de monoides ya que, como para cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$ tenemos $y_1 \cdot y_2 \in Y$, entonces

$$\iota (y_1 \cdot y_2) = y_1 \cdot y_2 = \iota y_1 \cdot \iota y_2$$

$(\cdot\cdot)$ Si $(Z, (\circ, \mathsf{e})) \in \mathfrak{Mon}$ y $g : Z \to Y$ es tal que $\iota g : (Z, (\circ, \mathsf{e})) \to (X, (\cdot, e))$ es un homomorfismo, entonces

$$g (z_1 \circ z_2) = \iota (g (z_1 \circ z_2)) = \iota g (z_1 \circ z_2) = \iota g z_1 \cdot \iota g z_2 = g z_1 \cdot g z_2, \ \forall z_1, z_2 \in Z$$

lo cual significa que también $g : (Z, (\circ, \mathsf{e})) \to (Y, (\cdot, e))$ es un homomorfismo.

Recíprocamente, si $(Y, (\circ, \mathsf{e}))$ es un submonoide de $(X, (\cdot, e))$, entonces

$$\iota : (Y, (\circ, \mathsf{e})) \hookrightarrow (X, (\cdot, e))$$

es un homomorfismo, de manera que para cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$ tenemos

$$y_1 \circ y_2 = \iota (y_1 \circ y_2) = \iota y_1 \cdot \iota y_2 = y_1 \cdot y_2 \ ;$$

pero por ser un monoide, $y_1 \circ y_2 \in Y$. Por lo tanto, Y está cerrada bajo $\cdot$. Además,

$$\mathsf{e} = \iota \mathsf{e} = e$$

porque un homomorfismo de monoides aplica el elemento neutro del dominio en el elemento neutro del codominio, como fácilmente se comprueba. Por lo tanto, $e \in Y$.

$\mathfrak{Mon}$ tiene intersecciones. En efecto, dado cualquier monoide $(X, (\cdot, e))$ y cualquier familia de submonoides $(Y_i, (\cdot, e))_I$ de $(X, (\cdot, e))$ tenemos que $e \in Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ porque $e \in Y_i$, $\forall i \in I$; y si $y_1, y_2 \in Y$, entonces $y_1 \cdot y_2 \in Y_i$, $\forall i \in I$, lo cual implica que Y es cerrada bajo $\cdot$.

Consideremos ahora en $\mathfrak{Mon}$ el monoide aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, (+, 0))$ y veamos que tiene dos generadores: 1 y -1. En efecto, si un submonoide $Y \subseteq \mathbb{Z}$ contiene a estos dos números, entonces, por estar cerrado bajo la suma, también contendrá a

$$2 = 1 + 1, \ 3 = 2 + 1, \ 4 = 3 + 1, ...$$

$$-2 = (-1) + (-1), \ -3 = (-2) + (-1), \ -4 = (-3) + (-1), ...$$

y en consecuencia, $Y = \mathbb{Z}$.$\sharp$

En los cursos de topología, el concepto dual a la idea de subespacio dió lugar al estudio del espacio cociente. La vez próxima se hablará de la generalización de este concepto.

6.5 Cocientes en *ccce*

Septiembre 17 de 1990.

Sea X cualquier conjunto y $\sim$ una ralación de equivalencia en X. Como es usual, denotaremos por $[x]$ a la clase de equivalencia de x según $\sim$ y por $X / \sim$ a la familia de clases de equivalencia que esta relación determina. La *aplicación cociente* o *canónica* de $\sim$ es

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\varphi}{\to} & X / \sim \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

La *fibra de* φ *en* $[x]$ es $\varphi^{-1}[x] = [x]$.

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria. Si (X, α) es cualquier $\mathcal{S}$-objeto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces un $\mathcal{S}$-objeto $(X / \sim, \bar{\alpha})$ **es un objeto cociente de** (X, α) **respecto a** $\sim$ si se satisfacen:

$(\cdot)$ $\varphi : (X, \alpha) \to (X / \sim, \bar{\alpha})$ es un $\mathcal{S}$-morfismo.

$(\cdot\cdot)$ Si (Z, γ) es un $\mathcal{S}$-objeto y $h : X / \sim \to Z$ es una función tal que

$$h\varphi : (X, \alpha) \to (Z, \gamma)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo, entonces

$$h : (X / \sim, \bar{\alpha}) \to (Z, \gamma)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo.

Ejemplos: 1. Un espacio cociente de cualquier espacio topológico (X, τ) es un $\mathfrak{Top}$-objeto cociente de (X, τ) respecto de la relación de equivalencia inducida por el cociente en cuestión.

2. Si (X, α) es cualquier gráfica y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, hacemos

$$\bar{\alpha} = \{([u_1], [u_2]) : \exists x_i \in [u_i] \;.\!\ni\!.\; (x_1, x_2) \in \alpha\}$$

Esto define una relación binaria en $X / \sim$ y tenemos:

$(\cdot)$ La proyección canónica $\varphi : (X, \alpha) \to (X / \sim, \bar{\alpha})$ es una función compatible ya que

$$(x_1, x_2) \in \alpha \Rightarrow (\varphi x_1, \varphi x_2) = ([x_1], [x_2]) \in \bar{\alpha}$$

$(\cdot\cdot)$ Sea (Z, γ) cualquier gráfica y sea $h : X / \sim \to Z$ una función tal que

$$h\varphi : (X, \alpha) \to (Z, \gamma)$$

es compatible. Si $([u_1], [u_2]) \in \bar{\alpha}$, entonces existen $x_i \in [u_i]$ tales que $(x_1, x_2) \in \alpha$; por lo tanto,

$$(h[u_1], h[u_2]) = (h\varphi x_1, h\varphi x_2) \in \gamma$$

Por lo tanto, también h es una función compatible.

Esto prueba que $(X / \sim, \bar{\alpha})$ es un objeto cociente de (X, α) respecto a $\sim$.

3. Para el ejemplo que sigue presentaremos una *ccce* nueva que denotaremos $\mathfrak{Sgr}$.

(i) Para todo $X \in \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Sgr}[X]$ es la clase de operaciones binarias en X que son asociativas, i.e.

$$\mathfrak{Sgr}[X] = \{\cdot : X \times X \to X \mid x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ \forall x, y, z \in X\}$$

(ii) Por lo tanto, los $\mathfrak{Sgr}$-objetos, que se llaman **semigrupos**, son parejas del tipo $(X, \cdot)$ en las que $X \in \mathfrak{Set}$ y $\cdot \in \mathfrak{Sgr}[X]$.

(iii) Si $A = (X, \cdot)$ y $B = (Y, \circ)$ son semigrupos , entonces

$$\hom_{\mathfrak{Sgr}}(A, B) = \left\{f \in Y^X : f(x_1 \cdot x_2) = fx_1 \circ fx_2,\ \forall x_1, x_2 \in X\right\}$$

Los $\mathfrak{Sgr}$-morfismos son los **homomorfismos de semigrupos**. Los axiomas de composición e identidad se verifican fácilmente.

En el semigrupo aditivo de números enteros $(\mathbb{Z}, +)$ definimos una relación de equivalencia como sigue:

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \text{ es par}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

Entonces $\mathbb{Z} \,/\, \sim$ consta de dos clases:

$$[0]\,,\text{ la clase de los pares} \quad \text{y} \quad [1]\,,\text{ la clase de los nones}$$

Si definimos $\oplus$ en $\mathbb{Z} \,/\, \sim$ como

$$[0] \oplus [0] = [1] \oplus [1] = [0] \quad \text{y} \quad [1] \oplus [0] = [0] \oplus [1] = [1]$$

entonces, para cualesquier $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$[z_1] \oplus [z_2] = [z_1 + z_2]$$

o sea que

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z} \,/\, \sim, \oplus)$$

es un homomorfismo de semigrupos.

Si además $(Z, \cdot) \in \mathfrak{Sgr}$ y $h : \mathbb{Z} \,/\, \sim \to Z$ es una función tal que $h\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (Z, \cdot)$ es un homomorfismo, entonces

$$h\left([z_1] \oplus [z_2]\right) = h\left(\varphi z_1 \oplus \varphi z_2\right) = h\varphi\left(z_1 + z_2\right) = h\varphi z_1 \cdot h\varphi z_2 = h\left[z_1\right] \cdot h\left[z_2\right]$$

o sea que también $h : (\mathbb{Z} \,/\, \sim, \oplus) \to (Z, \cdot)$ es un homomorfismo de semigrupos.

Por lo tanto, $(\mathbb{Z} \,/\, \sim, \oplus)$ es un objeto cociente de $(\mathbb{Z}, +)$ en $\mathfrak{Sgr}$.

Otra relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ es

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 > 1 \\ \text{ó} \\ z_1, z_2 \leq 1 \end{cases} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

Para esta relación, $\mathbb{Z} \,/\, \sim$ también consta de dos clases

$$[1] = \{..., -2, -1, 0, 1\} \quad \text{y} \quad [2] = \{2, 3, 4, 5, ...\}$$

Si queremos definir una operación $*$ en $\mathbb{Z} \,/\, \sim$ según la cual $(\mathbb{Z}/\sim, *)$ resulte un objeto cociente de $(\mathbb{Z}, +)$, entonces la condición $(\cdot)$ de la definición de cociente nos obliga a definir $[1] * [1] = [2]$ ya que debemos tener

$$[2] = \varphi 2 = \varphi\left(1 + 1\right) = \varphi 1 * \varphi 1$$

pero entonces, dado que $[0] = [1]$, tendremos

$$[1] = \varphi 0 = \varphi\left(0 + 0\right) = \varphi 0 * \varphi 0 = [2] \quad \underset{\circ}{\nabla}$$

Por lo tanto, tal operación no se puede definir.

Definición. Una *ccce* $\mathcal{S}$ **es cohereditaria** si para todo $\mathcal{S}$-objeto (X, α) y cualquier relación de equivalencia $\sim$ en X existe un objeto cociente $(X \,/\, \sim, \bar{\alpha})$ de (X, α) respecto a $\sim$.

De los ejemplos anteriores se sigue que $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{Gra}$ son cohereditarias y que $\mathfrak{Sgr}$ no lo es.

Septiembre 19 de 1990.

Para aquellas *ccce* que, como $\mathfrak{Sgr}$, no son cohereditarias es importante saber qué relaciones de equivalencia inducen objetos cocientes en ellas. Empecemos distinguiendo con un nombre relaciones asi.

Definición. Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* arbitraria. Si (X,α) es un $\mathcal{S}$-objeto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X tal que existe una estructura cociente $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}[X\ /\sim]$ respecto a $\sim$, entonces $\sim$ se llama una **congruencia en** (X,α)**.**

Ejemplos: 1. Una relación de equivalencia $\sim$ en un semigrupo $(X,\cdot)$ es una congruencia ssi para cualesquiera $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$ se tiene que

$$x_1 \sim x_1' \text{ y } x_2 \sim x_2' \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$$

En efecto, siendo válida la implicación anterior podemos definir una operación $*$ en $X\ /\sim$ como

$$[x_1] * [x_2] = [x_1 \cdot x_2]\,,\ \forall x_1, x_2 \in X$$

Haciéndolo así obtenemos que:

$(\cdot)$ $\varphi : (X,\cdot) \to (X\ /\sim, *)$ es un homomorfismo de semigrupos, pues

$$\varphi(x_1 \cdot x_2) = [x_1 \cdot x_2] = [x_1] * [x_2] = \varphi x_1 * \varphi x_2,\ \forall x_1, x_2 \in X$$

$(\cdot\cdot)$ Si $(Y,\circ) \in \mathfrak{Sgr}$ y $h : X\ /\sim \to Y$ es tal que $h\varphi : (X,\cdot) \to (Y,\circ)$ es un homomorfismo, entonces, cualesquiera que sean $[x_1], [x_2] \in X\ /\sim$ tenemos

$$h([x_1] * [x_2]) = h(\varphi x_1 * \varphi x_2) = h\varphi(x_1 \cdot x_2) = h\varphi x_1 \circ h\varphi x_2 = h[x_1] \circ h[x_2]$$

lo cual significa que también $h : (X/\sim, *) \to (Y,\circ)$ es un homomorfismo.

Recíprocamente, si $(X\ /\sim, *)$ es un objeto cociente de $(X,\cdot)$ respecto a $\sim$ entonces φ es un homomorfismo y en consecuencia

$$[x_1 \cdot x_2] = \varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi x_1 * \varphi x_2 = [x_1] * [x_2]\,,\ \forall x_1, x_2 \in X$$

Si además $x_1 \sim x_1'$ y $x_2 \sim x_2'$, entonces $[x_1] = [x_1']$, $[x_2] = [x_2']$ y por lo tanto

$$[x_1 \cdot x_2] = [x_1] * [x_2] = [x_1'] * [x_2'] = [x_1' \cdot x_2']$$

o sea que también $x_1 \cdot x_2 \sim x_1' \cdot x_2'$.

2. La implicación de arriba también es característica de las congruencias en $\mathfrak{Mon}$; la demostración es análoga.

Proposición. Sean, $\mathcal{S}$ una *ccce* y $(X,\alpha) \in \mathcal{S}$, cualesquiera. Si $\sim$ es una congruencia en (X,α), entonces $(X\ /\sim, \overline{\alpha})$ es un objeto cociente de (X,α) respecto a $\sim$ ssi $\bar{\alpha}$ es la más fina de todas las estructuras $\alpha_i \in \mathcal{S}[X\ /\sim]$ tales que $\varphi : (X,\alpha) \to (X\ /\sim, \alpha_i)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos $(X\ /\sim, \overline{\alpha})$ es un objeto cociente de (X,α) respecto a $\sim$; sea $\alpha_i \in \mathcal{S}[X\ /\sim]$ tal que $\varphi : (X,\alpha) \to (X\ /\sim, \alpha_i)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (X,\alpha) \arrow[dl, "1_{X\ /\sim}\circ\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
(X\ /\sim, \alpha_i) & & (X\ /\sim, \bar{\alpha}) \arrow[ll, "1_{X\ /\sim}"]
\end{tikzcd}$$

y aplicando la condición $(\cdot\cdot)$ de la definición de objeto cociente podemos asegurar que

$$1_{X\ /\sim} : (X\ /\ \sim, \bar{\alpha}) \to (X\ /\ \sim, \alpha_i)$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo, lo cual implica que $\bar{\alpha}$ es más fina que α_i.

$(\Leftarrow)$ Supóngase que $\overline{\alpha}$ es la más fina de las $\mathcal{S}$-estructuras que hacen de φ un $\mathcal{S}$-morfismo. Entonces, en particular tenemos que:

$(\cdot)$ $\varphi : (X, \alpha) \to (X\ /\ \sim, \overline{\alpha})$ es un $\mathcal{S}$-morfismo.

Como además $\sim$ es una congruencia existe un objeto cociente $(X\ /\ \sim, \alpha_0)$ de (X, α) con relación a $\sim$. Por consiguiente:

$(\cdot\cdot)$ Si $(Y, \beta) \in \mathcal{S}$ y $h : X\ /\ \sim \to Y$ es tal que $h\varphi : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo, también $h : (X\ /\ \sim, \alpha_0) \to (Y, \beta)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo. Pero entonces

$$h : (X\ /\ \sim, \bar{\alpha}) \xrightarrow{1_{X\ /\sim}} (X\ /\ \sim, \alpha_0) \xrightarrow{h} (Y, \beta)$$

también es un $\mathcal{S}$-morfismo. Esto prueba que también $(X\ /\ \sim, \bar{\alpha})$ es un cociente de (X, α) con relación a $\sim$.$_\sharp$

Observación. Los objetos $(X\ /\ \sim, \alpha_0)$ y $(X\ /\ \sim, \bar{\alpha})$ de la segunda parte de la demostración anterior son isomorfos.

En efecto, si bajo las hipótesis de esa segunda parte aplicamos $(\cdot\cdot)$ de la definición de cociente al diagrama

$$\begin{tikzcd} & (X, \alpha) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "1_{X\ /\sim}\circ\varphi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ (X\ /\ \sim, \alpha_0) \arrow[rr, "1_{X\ /\sim}"'] & {} & (X\ /\ \sim, \bar{\alpha}) \end{tikzcd}$$

tenemos que *también*

$$1_{X\ /\sim} : (X\ /\ \sim, \alpha_0) \to (X\ /\ \sim, \bar{\alpha})$$

es un $\mathcal{S}$-morfismo.

Corolario. En toda *ccce* transportable una congruencia $\sim$ determina unívocamente al objeto cociente $(X\ /\ \sim, \bar{\alpha})$ de (X, α).

Demostración. Si también $(X\ /\ \sim, \alpha_0)$ es cociente de (X, α) respecto a $\sim$, ya vimos que

$$1_{X\ /\sim} : (X\ /\ \sim, \alpha_0) \cong (X\ /\ \sim, \bar{\alpha})$$

Por lo tanto, $\overline{\alpha} \leq \alpha_0$ y también $\alpha_0 \leq \overline{\alpha}$, es decir, ambas estructuras son equivalentes; por lo tanto son iguales, pues la *ccce* de que se trata es transportable. Esto prueba que el cociente está unívocamente determinado.$_\sharp$

Definiciones. (a) Sea $f : X \to Y$ cualquier función. **El núcleo de** f es la relación de equivalencia en X definida por

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow fx_1 = fx_2$$

(b) Se dice que una *ccce* $\mathcal{S}$ **tiene núcleos** si el núcleo de cualquiera de sus morfismos es una congruencia.

Ejemplo 1. Toda *ccce* cohereditaria tiene núcleos.

Ejercicio: 10. Si (X, α) tiene el objeto cociente (Y, β) y (Y, β) tiene el objeto cociente (Z, γ), probar que (Z, γ) es un objeto cociente de (X, α).

Septiembre 21 de 1990.

Ejemplo 2. $\mathfrak{Sgr}$ tiene núcleos.
En efecto, si

$$f \in \mathfrak{Sgr}\left((X,\cdot),(Y,\circ)\right)$$

y denotamos al núcleo de f mediante $\sim_f$, entonces dados cualesquiera x, x', $y, y' \in X$ tales que

$$x \sim_f x' \quad \text{y} \quad y \sim_f y'$$

tenemos

$$f(x\cdot y) = fx \circ fy = fx' \circ fy' = f(x' \cdot y')$$

o sea que también

$$x \cdot y \sim_f x' \cdot y'$$

lo cual, debido al ejemplo1 de la clase anterior, significa que $\sim_f$ es una congruencia.$_\sharp$

Observación. $\mathfrak{Sgr}$ es ejemplo de una *ccce* que no es cohereditaria pero que tiene núcleos. Con frecuencia se encuentra uno trabajando con *ccce* en las que si bien no toda relación de equivalencia induce objetos cociente, los núcleos de sus morfismos sí los inducen.

Teorema de Factorización **(vía morfismos cocientes e inyectivos)**.

Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* con núcleos. Entonces todo $\mathcal{S}$-morfismo $f:(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ se puede factorizar como $f = f'\varphi$, donde $\varphi:(X,\alpha)\to(X\,/\sim,\tilde{\alpha})$ es un morfismo cociente y $f':(X\,/\sim,\tilde{\alpha})\to(Y,\beta)$ un $\mathcal{S}$-morfismo inyectivo.

Demostración. Sea $\sim = \sim_f$ y sea $\tilde{\alpha}$ la $\mathcal{S}$-estructura para $X\,/\sim_f$ que hace de φ un $\mathcal{S}$-cociente. Definamos

$$\begin{array}{ccc} X\,/\sim_f & \overset{f'}{\to} & Y \\ [x] & \mapsto & fx \end{array}$$

Entonces f' es inyectiva porque

$$[x] \neq [x'] \Leftrightarrow fx \neq fx'$$

Además

$$\begin{array}{ccc} (X,\alpha) & \overset{f}{\to} & (Y,\beta) \\ \varphi \searrow & \circlearrowleft & \nearrow f' \\ & (X\,/\sim,\tilde{\alpha}) & \end{array}$$

y como $f'\varphi$ es un $\mathcal{S}$-morfismo, entonces también lo es f' (por las propiedades del cociente).$_\sharp$

Definición. Se dice que una *ccce* $\mathcal{S}$ **tiene imágenes** si para todo $\mathcal{S}$-morfismo $f:(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ el conjunto fX es subobjeto de (Y,β).

Ejemplos: 1. Toda *ccce* hereditaria tiene imágenes.

2. $\mathfrak{Mon}$ tiene imágenes.

Para probarlo recordemos que los subobjetos de un monoide se caracterizan por contener al elemento neutro y ser cerrados bajo la operación del monoide.

Sea $f:(X,(e,\cdot))\to(Y,(\mathsf{e},\circ))$ un homomorfismo entre monoides; f, por definición, preserva al elemento neutro; en consecuencia

$$\mathsf{e} = fe \in fX$$

Finalmente, sean $y_1, y_2 \in fX$; entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $fx_1 = y_1$ y $fx_2 = y_2$. Luego,

$$y_1 \circ y_2 = fx_1 \circ fx_2 = f(x_1 \cdot x_2) \in fX \qquad \sharp$$

3. $\mathfrak{Topc}_2$ tiene imágenes.

Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ un $\mathfrak{Topc}_2$-morfismo; entonces f es continua y (X,τ) compacto. Se sabe que las imágenes continuas de compactos son compactas; como además la propiedad de ser $\mathbf{T_2}$ la heredan todos los subespacios de cualquier espacio $\mathbf{T_2}$, tenemos que $(fX,\sigma\mid fX)$ es compacto y $\mathbf{T_2}$, es decir, fX es subobjeto de (Y,σ).$_\sharp$

Teorema de Factorización **(vía morfismos suprayectivos e inclusivos)**.

Sea $\mathcal{S}$ una *ccce* con imágenes. Entonces todo $\mathcal{S}$-morfismo $f:(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ se puede factorizar como $f=\iota\bar{f}$, donde $\bar{f}:(X,\alpha)\to\left(A,\tilde{\beta}\right)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo suprayectivo y $\iota:\left(A,\tilde{\beta}\right)\hookrightarrow(Y,\beta)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo inclusivo de un subobjeto $\left(A,\tilde{\beta}\right)$ de (Y,β).

Demostración. Sea $A=fX$ y sea $\tilde{\beta}$ la $\mathcal{S}$-estructura para fX que hace de él un subobjeto de (Y,β). Definamos

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\bar{f}}{\to} & fX \\ x & \mapsto & fx \end{array}$$

Es claro que $\bar{f}$ es suprayectiva. Además

$$\begin{array}{ccc} (X,\alpha) & \overset{f}{\to} & (Y,\beta) \\ \bar{f}\searrow & \circlearrowleft & \nearrow\iota \\ & \left(fX,\tilde{\beta}\right) & \end{array}$$

y como $\iota\bar{f}$ es un $\mathcal{S}$-morfismo, entonces también lo es $\bar{f}$ (según la definición de subobjeto).$_\sharp$

Como consecuencia de los teoremas de factorización tenemos el siguiente

Corolario. En toda *ccce* con núcleos e imágenes todo morfismo f puede factorizarse como $f=\iota\breve{f}\varphi$, donde φ es el morfismo cociente correspondiente a $\sim_f$, $\breve{f}$ es un morfismo biyectivo y ι es el morfismo inclusivo correspondiente a la imagen de f.

Demostración. Es claro que definiendo

$$\begin{array}{ccc} X\ /\sim_f & \overset{\breve{f}}{\to} & fX \\ [x] & \mapsto & fx \end{array}$$

obtenemos una función biyectiva según la cual

$$\begin{array}{ccc} (X,\alpha) & \overset{f}{\to} & (Y,\beta) \\ \varphi\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow\iota \\ (X\ /\sim_f,\tilde{\alpha}) & \overset{\breve{f}}{\to} & \left(fX,\tilde{\beta}\right) \end{array}$$

Por las propiedades del cociente, y a consecuencia de ser $\left(\iota\breve{f}\right)\varphi$ un morfismo, tenemos que también lo es $\iota\breve{f}$; aplicando la definición de subobjeto, tenemos que también

$$(X\ /\sim_f,\tilde{\alpha})\overset{\breve{f}}{\to}\left(fX,\tilde{\beta}\right)$$

es un morfismo, y el corolario queda demostrado.$_\sharp$