Ecuaciones Diferenciales I
Tarea 4

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales

$$
\begin{array}{ll}
i)\ y'' + 2y' - 3y = 0 & ii)\ 4y'' - 9y' = 0 \\
iii)\ 6y'' - y' - y = 0 & iv)\ 2y'' - 3y' + y = 0
\end{array}
$$

2. Resuelve las ecuaciones diferenciales

$$
\begin{array}{ll}
i)\ y'' + y' - 2y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 & ii)\ y'' + 4y' + 3y,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1 \\
iii)\ 6y'' - 5y' + y,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0 & iv)\ 4y'' - y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1
\end{array}
$$

Traza la gráfica de la solución al problema de valor inicial y describe su comportamiento al crecer x en cada caso

3. a) Encuentra α de forma que la solución al problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$ tienda a cero cuando $x \to \infty$

b) Encuentra β de forma que la solución al problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$ tiendaa a cero cuando $x \to \infty$

4. Dadas las familias de funciones

$$
\begin{array}{ll}
i)\ y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} & ii)\ y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \\
iii)\ y = c_1 x + c_2 x^2 & iv)\ y = (c_1 + c_2 x)\, e^x
\end{array}
$$

halla en cada caso la ecuación diferencial de la que estas son solución

5. Halla el wronskiano de las funciones

$$
\begin{array}{ll}
i)\ e^{2x},\ e^{\frac{-3x}{2}} & ii)\ \cos x,\ \sin x \\
iii)\ x,\ xe^x & iv)\ cos^2 x,\ 1 + \cos(2x)
\end{array}
$$

y en cada caso determina el mayor intervalo donde se tiene la certeza de que el problema de valor inicial tiene una solución única dos veces diferenciable

6. En cada caso determina si las dos funciones dadas son linealmente independientes

$$
\begin{array}{ll}
i)\ f(x) = x^2 + 5,\ g(x) = x^2 - 5 & ii)\ f(x) = \cos(3x),\ g(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x \\
iii)\ f(x) = e^{3x},\ g(x) = e^{3(x-1)} & iv)\ f(x) = x,\ g(x) = x^{-1}
\end{array}
$$

7. En cada uno de los problemas aplica la fórmula de Euler para escribir la expresión en la forma $a + ib$

$$
i)\ e^{1+2i} \qquad ii)\ e^{2-3i} \qquad iii)\ 2^{1-i} \qquad iv)\ \pi^{-1+2i}
$$

8. Resuelve los problemas de valor inicial dado. Traza la gráfica de la solución y describe su comportamiento para x creciente

$$
\begin{array}{ll}
i)\ 9y'' - 12y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1 & ii)\ y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \\
iii)\ 9y'' + 6y' + 82y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2 & iv)\ y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1
\end{array}
$$

9. Resuelve los problemas de valor inicial dado. Traza la gráfica de la solución y describe su comportamiento para x creciente

$i)$ $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $\quad$ $ii)$ $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

$iii)$ $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ $\quad$ $iv)$ $y'' + y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4$

10) Para la ecuación diferencial

$$xy'' - (x + N)\, y' + Ny = 0$$

con N un entero no negativo:

a) Verifica que $y_1(x) = e^x$ es una solución.

b) Muestra que tiene una segunda solución de la forma $y_2(x) = ce^x \int^x t^N e^{-t} dt$. Calcula $y_2(x)$ para $N = 1, 2$. Comprueba que con $c = -\frac{1}{N!}$, $y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^N}{N!}$.