Proyecto de Investigación

Doctorado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

Contenido

1. Introducción

Los fenómenos no lineales son importantes en la ciencia y la ingeniería. El análisis de los modelos matemáticos de éstos no es sencillo y requiere la aplicación de métodos de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, así como simulaciones que solamente son posibles mediante la aplicación del cálculo intensivo. Típicamente, los problemas que el análisis de estos modelos plantea exigen trabajar al límite de la tecnología de cómputo actual, y originan difíciles retos de desarrollo de métodos numéricos eficientes y técnicas de ingeniería de software que agilicen las simulaciones.

El funcionamiento de un sistema complejo es posible gracias a la sincronización de sus diferentes componentes o subsistemas. Es así que el estudio de sistemas interactuantes constituye un tema central en cualquier disciplina científica. Sin embargo, el análisis matemático de estos sistemas es un problema difícil, de hecho, el estado actual del conocimiento - científico y matemático - dista aún mucho de poder comprender todos los posibles comportamientos de los sistemas complejos. El problema radica por un lado, en la gran cantidad de componentes, variables y parámetros que pueden estar interactuando, lo que obliga a analizar simplificaciones del problema, y por otro lado, a que las interacciones generalmente son no lineales.

La modelación matemática de sistemas dinámicos típicamente está basada en el uso de sistemas de ecuaciones diferenciales y/o en diferencias. Uno de los fenómenos de interés es el estudio de la dinámica regular (e.g: periódica) y las posibles transiciones de ésta a regímenes caóticos. Entre los problemas fundamentales de la teoría de oscilaciones se encuentra la investigación de los comportamientos o respuestas que un oscilador no lineal puede tener en respuesta a un estímulo periódico. Este tipo de problemática interesa en circuitos eléctricos no lineales, en modelos de células nerviosas y en muchos otros escenarios de interés científico y tecnológico. Un paso muy importante en el estudio de estas cuestiones es analizar el forzamiento de osciladores no lineales, asunto sobre el que se ha vertido una gran cantidad de trabajo, pero del que aún estamos lejos de comprender completamente la fenomenología que se presenta en estos problemas.

Este trabajo está motivado por investigaciones de *neuronas* y *redes neuronales* previamente realizadas. Por éstas entendemos procesadores y redes de procesadores que están construidos a semejanza de las neuronas y los circuitos neuronales que constituyen el sistema nervioso de los seres vivos. Una red neuronal (biológica o artificial) es un sistema dinámico [17]. Su función, propiedades, atributos y particularmente sus capacidades computacionales, están determinadas por lo que técnicamente llamamos su *dinámica*.

Una característica fundamental de la dinámica de este tipo de sistemas es su carácter altamente *no lineal*. Esto enriquece sus capacidades, pero al mismo tiempo complica el análisis de sus modelos matemáticos sobrepasando rápidamente los alcances de la metodología y/o tecnología disponible. En investigaciones previas [1, 2, 3] se ha analizado la dinámica de modelos *"realistas"* de neuronas, es decir, muy apegados a la realidad biofísica de las células nerviosas. Estos muestran interesantes capacidades de procesamiento pero son demasiado sofisticados matemáticamente para poder analizar redes de muchos procesadores: constan de sistemas de tres y hasta cinco ecuaciones diferenciales, para cada neurona. Existen otros modelos de neuronas como el del *integrador con fugas*, utilizado por M. Arbib [4, 5, 6], que están dados en función de una sola ecuación diferencial por cada neurona.

El ejemplo más sencillo de estos osciladores es una analogía mecánica de las neuronas biológicas, o sea, un dispositivo en el que se pueden estudiar comportamientos tales como la respuesta *todo o nada*, *umbral de disparos* y *período refractario*. Este es llamado la *neurona mecánica*. Su funcionamiento es el siguiente: en un extremo de una balanza se coloca un peso fijo; del otro lado se coloca un recipiente en el cual se está vertiendo agua a un ritmo constante. Cuando el peso del agua es mayor que el peso fijo en el extremo contrario, el brazo de la balanza que contiene el recipiente con el agua desciende hasta el piso; el agua se vacía en un instante, luego, el brazo con el peso vuelve a bajar y todo el proceso se inicia de nuevo (ver Figura 1).

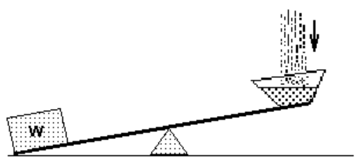

Figura 1

Si se traza el volumen del agua contenido en el recipiente en función del tiempo, obtenemos la gráfica de la Figura 2.

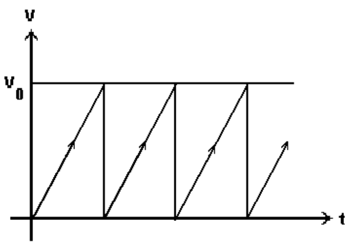

Figura 2

La neurona mecánica puede ser “forzada” de una manera muy simple y conveniente: basta poner un elevador debajo del sube y baja, cuya altura esté expresada en función del tiempo por una función periódica $h(t)$, como indica la Figura 3, para hacer que ahora las descargas del recipiente ocurran a diferentes niveles que posiblemente variarán periódicamente.

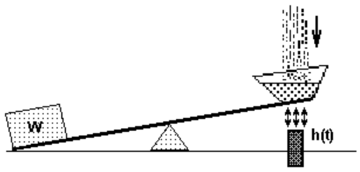

Figura 3

Suponiendo que el agua cae a una razón constante, la gráfica del volumen de agua en el recipiente contra el tiempo podría ser como la que muestra la Figura 4.

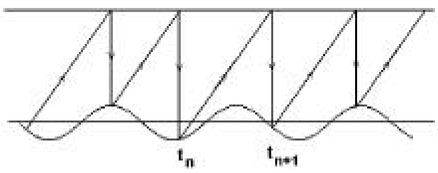

Figura 4

Es posible obtener una expresión general para conocer la secuencia de tiempos en los que se vacía el recipiente, a partir de cualquier tiempo inicial [11]. De acuerdo a la analogía de la neurona mecánica, las variaciones del potencial de la membrana de la célula queda simulado por las variaciones de la cantidad de agua en el recipiente del sube y baja; los potenciales de acción quedan representados por las descargas del recipiente. El proceso de producción de estos impulsos nerviosos está muy bien comprendido por los fisiólogos en términos de los fenómenos biofísicos subyacentes.

La analogía de la neurona mecánica forzada puede ser de gran importancia científica. Gracias a los resultados que se han obtenido estudiando este modelo se ha podido comprender la gran variedad de tipos de respuesta que las células pueden tener ante la aplicación de un estímulo periódico, así como las condiciones que dan lugar a cada una de ellas. Teniendo en cuenta que el modelo de la neurona mecánica es el más sencillo que ha podido ser concebido, la investigación actual persigue el diseño y análisis de modelos más ricos y apegados a la realidad biofísica de la neurona pero que todavía sean tratables matemáticamente. En este sentido los *modelos diferenciales* constituyen un paso adelante en el estudio de estos fenómenos por medio de modelos más complejos y realistas. De acuerdo a estos modelos, el potencial de la neurona crece de acuerdo a una ecuación diferencial (no necesariamente lineal) y no linealmente siguiendo un procedimiento geométrico como ocurre en la neurona mecánica.

El estudio de redes de neuronas modeladas por medio de ecuaciones diferenciales implica un análisis matemático muy complejo que es evitado por un amplio sector de investigadores, quienes prefieren trabajar con redes de neuronas que obedecen una dinámica tan simple (e.g: las neuronas de McCulloch y Pitts) que su modelación no requiere del uso de ecuaciones diferenciales.

El *modelo de integración y disparo* [7, 8, 9] es otro tipo de modelo de neurona, que tiene una dinámica más rica que las neuronas clásicas de McCulloch y Pitts [10], pero puede todavía ser modelada con una sola ecuación diferencial. Este tipo de modelos aparece de manera natural al estudiar circuitos eléctricos no lineales y algunos casos particulares han sido usados también para modelar la dinámica de la respuesta de neuronas a un forzamiento periódico. La modelación de estos sistemas forzados presentados por Keener, Hoppensteadt y Rinzel (KHR) en [7] da lugar a la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = -s\,v + S + H\sin(t) \tag{1}$$

sujeta a la condición de salto

$$v(t^{+}) = 0 \; si \; v(t) = 1 \tag{2}$$

Específicamente se desea tener un espectro de las posibles respuestas sincronizadas al estímulo periódico $S + Hsin(t)$ del oscilador autónomo gobernado por la ecuación $\frac{dv}{dt} = -sv$.

Los modelos geométricos como el de la neurona mecánica y el modelo diferencial con la condición de salto son útiles para estudiar las distribuciones temporales de los disparos cuando el marcapaso temporal es forzado y no dan cuenta de la dinámica detallada de los cursos temporales del potencial de acción.

En general, a un oscilador de este tipo se le llama un *oscilador de diente de sierra*, lo cual significa que es un oscilador en el que alguna variable de estado tiene un curso temporal que semeja el perfil de una sierra (ver la Figura 5).

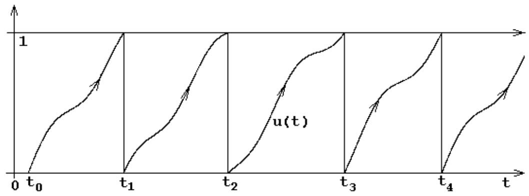

Figura 5

En ellos es característica la existencia de algún proceso de acumulación, que lo lleva hasta alcanzar un umbral e inmediatamente después libera toda la energía acumulada, pero en un lapso de tiempo mucho menor que el tiempo requerido en el proceso de acumulación, repitiéndose este proceso una y otra vez de la misma forma.

Otros autores han analizado modelos matemáticos de sistemas de integración y disparo que, en lugar de obedecer una ecuación diferencial, operan de acuerdo a una regla geométrica (ver [18] y las referencias contenidas en él).

2. Objetivo

El objetivo fundamental de esta investigación es el desarrollo de métodos y algoritmos eficientes, así como programas de supercómputo, para el análisis de la dinámica de sistemas de procesadores neuronales modelados por una clase de osciladores no lineales forzados: los osciladores geométricos y diferenciales de integración y disparo; aplicado sobre todo al estudio de sus propiedades de sincronización y de las condiciones que producen un comportamiento caótico. La investigación es parte de un proyecto más ambicioso que persigue la comprensión de las capacidades computacionales de redes, integradas por este tipo de procesadores de integración y disparo, en términos de las propiedades dinámicas que tiene cada procesador cuando funciona autónomamente y de la forma en que cada uno de ellos reacciona a estimulaciones externas. Este proyecto involucra modelación matemática, análisis teórico y cómputo intensivo.

3. Avances logrados.

Como hemos puesto de relieve en [11], los modelos de integración y disparo tienen una cualidad muy importante: sus propiedades de sincronización pueden reducirse al estudio de una simple dinámica cíclica. Hemos estudiado sistemas de neuronas de integración y disparo e investigado su dinámica explotando esta reducción (i.e: desde el punto de vista de los sistemas dinámicos en la circunferencia). Las funciones de la circunferencia determinan sistemas dinámicos útiles para modelar diversos procesos naturales donde se manifiesta una actividad cíclica. El análisis de la dinámica de estas funciones revela información importante sobre la forma en que estos sistemas responden a forzamientos externos. Sobre este tema varios miembros de nuestro laboratorio han escrito trabajos y tesis [12, 13, 14, 15, 16].

La metodología de Keener, Hoppensteadt y Rinzel sobre sistemas de procesadores neuronales de integración y disparo [7], aplican restringidamente a sistemas lineales que pueden ser resueltos analíticamente, como el modelo KHR que ellos estudiaron.

Otros modelos lineales de la forma

$$\frac{dv}{dt} = -sv + g(t, l),$$

con $g(t, l)$ analítica y periódica en t, son conocidos como modelos de acumulación lineal (MAL) y aunque son lineales no podemos garantizar soluciones analíticas que nos den sus soluciones. Un avance importante fue la generalización del método de estos autores a cualquier sistema de la clase MAL sin tener que contar con soluciones explícitas. Esta investigación está reportada en

H. Carrillo, F. Ongay y M. A. Mendoza. **Neuronas de Integración y Disparo con Acumulación Lineal.** *Reporte de Investigación 99-3, Laboratorio de Dinámica no Lineal,* Facultad de Ciencias, UNAM.

Aunque esta clase de modelos ya presenta una rica fenomenología, las suposición de linealidad es bastante restrictiva y se esperan otros comportamientos para el caso en que la ecuación diferencial (1) es sustituida por otra más general de la forma (no necesariamente lineal):

$$\frac{dv}{dt} = F(t, v, l)\,. \tag{3}$$

El primer paso de nuestra investigación ha sido generalizar el método de análisis y la teoría de estos autores, de manera que pueda ser aplicada sin restricción al caso de una $F(t, v, l)$ arbitraria. Para este tipo de sistemas hemos desarrollado en el Laboratorio de Dinámica no Lineal de la Facultad de Ciencias resultados que permiten llevar a cabo de manera sencilla el análisis de las propiedades de regularidad (inyectividad y continuidad) de la función de disparos de los modelos generales no lineales de integración y disparo.

Así, es posible determinar un mapa analíticamente trabajable de las bifurcaciones de primer nivel o fundamentales (regiones donde aplica la teoría de Poincaré [19] y la de Newhouse-Palis-Takens [20]). La teoría desarrollada alrededor de estas funciones distingue los siguientes casos:

1. Homeomorfismos y funciones monótonas crecientes.
2. Funciones continuas, pero no necesariamente monótonas.
3. Funciones monótonas crecientes, pero no necesariamente continuas.

Estos han sido analizados en:

H. Carrillo and F. Ongay. **On the Firing Maps of a General Class of Forced Integrate and Fire Systems.** Artículo aceptado para publicación en *Mathematical Biosciences.*

Estos resultados teóricos nos servirán ahora de base para orientar nuevos estudios computacionales y simulaciones de sistemas lineales y no lineales.

4. Metas

Se desarrollarán algoritmos y rutinas eficientes para analizar los distintos comportamientos caóticos o sincronizados que exhiben los osciladores cuando son sometidos a una estimulación periódica externa. Se aplicarán los métodos, algoritmos y rutinas que se desarrollen, al análisis computacional de sistemas tanto de acumulación lineal como de sistemas no lineales que todavía no han sido explorados.

Se buscarán indicadores cualitativos de la presencia de comportamientos sincronizados en regiones del espacio de parámetros. Para este propósito se generarán rutinas eficientes para calcular exponentes de Lyapunov, números e intervalos de rotación y sincronizaciones. Como el esfuerzo computacional requerido para determinar estas regiones es muy grande nuestra meta es aplicar técnicas de procesamiento paralelo para posibilitar los cálculos. El cálculo intensivo requerido se llevará a cabo en la supercomputadora *Cray Origin 2000* de la UNAM y la visualización en un módulo construido en la plataforma Windows utilizando herramientas visuales como C++ Builder en una PC, que proveerá un ambiente gráfico amigable para analizar este tipo de osciladores.

Pretendemos descubrir, computacionalmente, los tipos de bifurcaciones que pueden ocurrir en estos sistemas de integración y disparo, para poder hacer una clasificación formal de ellas e investigar posteriormente cuales son sus implicaciones desde el punto de vista del comportamiento de estos procesadores. Uno de los aspectos importantes de nuestra investigación es delucidar si la multiestabilidad pudiera darse en los sistemas con acumulación lineal y buscar nuevas dinámicas en los sistemas no lineales.

5. Metodología.

Nuestro método de análisis está basado en la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Sin embargo, la complejidad de los sistemas de estudio no permite un estudio puramente teórico y obliga a la experimentación numérica. El conocimiento que logramos por medios teóricos es usado para dirigir los estudios y simulaciones computacionales. Recíprocamente, el conocimiento experimental lo usamos a su vez para conjeturar resultados que pueden ser demostrados matemáticamente. Esto hace necesario el poder contar con potentes herramientas para realizar simulaciones.

El análisis de esta clase de modelos se llevará a cabo usando programas de software que han sido diseñados especialmente para este tipo de problemas, junto con una combinación de métodos geométricos y analíticos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

6. Bibliografía

[1] S. Baer, J. Rinzel y H. Carrillo. **Analysis of an Autonomous Phase Model for Neuronal Parabolic Bursting.** *Journal of Mathematical Biology,* 33: 309-333, 1995.

[2] S. Baer, J. Rinzel y H. Carrillo. **A Three Variable Autonomous Phase Model for Neuronal Parabolic Bursting**. *Differential Equations and Applications to Biology and Industry* (pp.1-11), M. Martinelli (Editor), World Scientific, Singapore, 1996.

[3] H. Carrillo, J. Rinzel y S. Baer. **Nonlinear Oscillations in Neurons Models**. *Memorias de EUROMECH- 2nd European Nonlinear Oscillations Conference,* Vol. 1, pp. 105-108, Praga, 1996.

[4] M. Arbib. **Brain Theory and Neural Networks.** *The MIT Press*, Cambridge, M.A., 1995.

[5] M. Arbib y F. Cervantes Pérez. **Stability and Parameter Dependency Analysis of a Facilitation Tectal Column (FTC) Model**, *J. Math. Biol.,* 1990.

[6] M. Usher, H.G. Schuster and E. Niebur. **Dynamics of Populations of Integrate-and-Fire Neurons, Partial Synchronization and Memory.** *Neural Computation,* 5:313-326, 1993.

[7] J.P. Kenner, F.C. Hoppensteadt, J. Rinzel. **Integrate and Fire Models of Nerve Membrane Response to Oscillatory Input**. *SIAM J. APPL. Math. Vol. 41, No. 3,* diciembre 1981.

[8] F.C. Hoppensteadt. **An Introduction to the Mathematics of Neurons**. *Cambridge University Press,* 1986.

[9] F.C. Hoppensteadt, E. M. Izhikevich. **Weakly Connected Neural Networks**. *Springer,* 1997.

[10] W. McCulloch y W. Pitts, *Bull. Math, Biophys. 5, 115*, 1943.

[11] M.A. Mendoza Reyes. **Dinámica de las Neuronas de Integración y Disparo**. *Tesis Profesional. Facultad de Ciencias, UAEMEX,* 1997.

[12] I.E. Díaz Bobadilla. **Sistemas Dinámicos en la Circunferencia**. *Tesis Profesional. Facultad de Ciencias, UAEMEX,* 1996.

[13] J.R. Guzmán. **Sistemas Dinámicos en la Circunferencia: Aplicaciones a la Teoría de Números y Modelación de Neuronas**. *Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias, UNAM,* 1994.

[14A] H. Carrillo and F. Ongay. **On the Firing Maps of a General Class of Forced Integrate and Fire Systems.** Artículo aceptado para publicación en *Mathematical Biosciences*.

[14B] H. Carrillo, F. Ongay y M. A. Mendoza. **Neuronas de Integración y Disparo con Acumulación Lineal.** *Reporte de Investigación 99-3, Laboratorio de Dinámica no Lineal*, Facultad de Ciencias, UNAM.

[15] H. Carrillo, F. Ongay y J.R. Guzmán. **Dinámica de las Iteraciones de la Función de Arnold**. *Aportaciones Matemáticas,* Serie Comunicaciones, 14: 405-414, Sociedad Matemática Mexicana, 1994.

[16A] H. Carrillo y J.R. Guzmán. **A Dynamical Systems Proof of the Little Theorem of Fermat**. *Aportaciones Matemáticas*. Serie Comunicaciones 22 (1998). pp 63-65. Sociedad Matemática Mexicana.

[16B] H. Carrillo y J.R. Guzmán. **A Dynamical Systems Proof of Euler's Generalization of the Little Theorem of Fermat**. *Aportaciones Matemáticas.* Serie Comunicaciones 25. (1999) pp 199-202. Sociedad Matemática Mexicana.

[17] H. Carrillo. **Cerebro, Redes Neuronales y Sistemas Dinámicos**. *Información Científica y Tecnológica, CONACYT*. Abril de 1990. Vol. 12, Núm. 163.

[18] L. Glass. **Cardiac Arrythmias and Circle Maps: A Classical Problem**. *Chaos, Vol. 1, No. 1, 13-19,* 1991.

[19] Z. Nitecki, **Differentiable Dynamics, An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms**, MIT Press, 1971.

[20] S. NewHouse, J. Palis and F. Takens, **Bifurcations and Stability of Families of Diffeomorphisms**, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 57 (1983) 5-71.

Mat. Miguel Angel Mendoza Reyes