Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1. Sea f integrable en $[a, b]$ y sea

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si f es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces G es derivable en x_0 y $G'(x_0) = f(x_0)$.

Nota. Si x_0 es un extremo del intervalo $[a, b]$, entonces se entiende que $G'(x_0)$ es la derivada por la izquierda o por la derecha, según sea el caso.

Demostración del teorema 1. Sea $x_0 \in [a, b]$ y $h \neq 0$ tal que $x_0+h \in [a, b]$. Usando que

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\, dt\right)
\end{aligned}$$

Queremos probar que dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica que $\left|\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\, dt\right)\right| < \varepsilon$. Como f es continua en x_0 existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $|t - x_0| < \delta$. Entonces, si $|h| < \delta$ se tiene que

$$\left|\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\, dt\right)\right| < \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\right| = \varepsilon$$

Observación. De la definición de $G(x)$ se sigue que

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Si P es cualquier otra función que cumpla que $P' = f$ en $[a, b]$, entonces existe una constante C tal que $P = G + C$. En consecuencia,

$$\int_a^b f = P(b) - P(a)$$

Así tenemos el siguiente corolario del teorema fundamental del cálculo, referido por algúnos autores como el segundo teorema fundamental del cálculo.

Corolario. Sea f continua en $[a, b]$ y $P(x)$ cualquier primitiva de f en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f = P(b) - P(a).$$

Otro corolario que se deriva trivialmente del teorema fundamental del cálculo es el siguiente:

Corolario. Bajo las hipótesis de teorema fundamental del cálculo se tiene que la función G es continua en $[a, b]$.

Un resultado similar puede obtenerse bajo hipótesis más débiles:

Teorema 2. Sea f integrable en $[a, b]$ y

$$G(x) = \int_a^x f$$

Entonces G es continua en $[a, b]$.

Observación. DE acuerdo a este teorema, la función $G(x)$ es continua, aunque f no lo sea. Así pues, vemos que el proceso de integración elimina algúnas de las irregularidades que tiene f (figura ??)

Demostración del teorema 2. Se debe demostrar que G es continua en cada punto $x_0 \in [a, b]$. Para verificar esto bastará probar que existe M tal que

$$|G(x_0 + h) - G(x_0)| \leq M\,|h|$$

Por hipótesis f es integrable y por lo tanto debe ser una función acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que

$$-M \leq f(x) \leq M \text{ para toda } x \in [a, b].$$

Tenemos pues que

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

Como h puede ser positiva o negativa vamos a considerar dos casos:

1. $h > 0$. Por un teorema anterior se tiene que

$$-Mh \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \leq Mh$$

   por lo tanto

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \right| \leq Mh = M\,|h|$$

2. $h < 0$. En este caso consideramos el intervalo $[x_0 + h, x_0]$. Observese que la longitud de este intervalo es $-h$ y que

$$-M(-h) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \leq M(-h)$$

por el teorema anterior. Si multiplicamos por -1, los signos de esta desigualdad se invierten y obtenemos que

$$Mh \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \leq -Mh$$

de donde

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \right| \leq -Mh \leq |Mh| = M\,|h|$$

que es lo que queriamos probar.