

Logaritmo Natural

Si $n \neq 1$ ya sabemos que $\int^x t^n dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, con C una constante.

Definición. La regla de correspondencia

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x I^{-1}$$

define una función con dominio $D_{\ln} = (0, \infty)$. A esta función se le denomina *logaritmo natural* o simplemente *logaritmo*.

Observación 4. $\ln(1) = 0$ y como $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} > 0$, para todo $x \in (0, \infty)$ entonces:

$$\begin{aligned} \ln(x) &< 0 \text{ para } x \in (0, 1) \text{ y} \\ \ln(x) &> 0 \text{ para } x \in (1, \infty) \end{aligned}$$

Observación 5. El primer teorema fundamental del Cálculo implica que

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \text{ para todo } x \in D_{\ln}$$

como $\ln(x)$ es derivable, también es continua y como su derivada es positiva, entonces también será una función creciente.

Observación 6. Por el teorema fundamental del Cálculo, el logaritmo natural es una función continua y las integrales impropias $\int_1^0 \frac{1}{t} dt$ y $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ asumen los valores límite $-\infty$ y ∞ respectivamente, deducimos (por el teorema del valor intermedio) que la imagen del logaritmo es toda la recta real: $\text{Im}(\ln(x)) = \mathbb{R}$.

Observación 7. Sea $a > 0$. Las funciones $\ln(x)$ y $\ln(ax)$ tienen la misma derivada, $\frac{1}{x}$, para toda $x \in (0, \infty)$.

En consecuencia $\ln(ax) = \ln(x) + C$.

Evaluando en $x = 1$ se tiene que $c = \ln a$. Así resulta una importante propiedad de la función logaritmo natural:

$$\forall a, b \in (0, \infty), \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

"El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores"

Observación 8. Como

$$\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1},$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$, entonces las funciones $r \ln(x)$ y $\ln(x^r)$ tienen la misma derivada, $\frac{r}{x}$. Así se obtiene otra propiedad básica de la función logaritmo

$$\forall r \in \mathbb{Q} \text{ y } x > 0, \quad \ln(x^r) = r \ln(x).$$

Ejercicio. Usa las observaciones 7 y 8 para probar que

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Observación 9. $P(x) = x \ln(x) - x$ es una primitiva del logaritmo.

Ejercicio. Demuestra la observación 6.

Sugerencia 1. Si $a > 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(a) = \infty$ ya que $\ln(a) > 0$. Por lo tanto, dado cualquier $b > 0$ existe n tal que $\ln(a^n) > b$.

Como $\ln(x)$ es continua, por el teorema del valor intermedio $\ln(x)$ asume todos los valores entre $\ln(1) = 0$ y $\ln(a^n)$. Entonces se puede argumentar que:

$$1) (0, \infty) \subset \text{Im}(\ln(x))$$

$$2) \int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{t} dt = \infty.$$

Sugerencia 2. Si $a > 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$. Por otro lado $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a^{-n}) = -n \ln(a) = -\infty$.

Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0, \exists n$ tal que $\ln(a^{-n}) < \varepsilon$. Otra vez usando la continuidad de $\ln(x)$ y el teorema del valor intermedio se tiene que $\ln(x)$ toma todos los valores entre $\ln(1) = 0$ y $\ln(\frac{1}{a^n})$.

Se puede argumentar entonces que;

$$3) (-\infty, 0) \subset \text{Im}(\ln(x))$$

$$4) \int_1^0 \frac{1}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^\varepsilon \frac{1}{t} dt = -\infty$$

Observación 10. La función $f(x) = \ln|x|$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, es derivable y $\frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$.

Dem. Si $x > 0$ entonces $\frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$.

Si $x < 0$ entonces $\frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{d \ln(-x)}{dx} = \frac{(-1)}{-x} = \frac{1}{x}$.

¿Se puede decir que $\int^x \frac{1}{t} dt = \ln|x|$?

¿Qué quiere decir esto?

¿Cómo se aplica?

Ejemplo 1.

$$a) \int_{-1}^1 \frac{1}{t} dt = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

¿Es correcto este cálculo? Justifica los pasos.

b) No se puede calcular $\int_{-1}^2 I^{-1}$. ¿Por qué?

Ejemplo 2.

a) Grafica $f(x) = \ln|x|$. ¿Qué quiere decir gráficamente que $\frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$?

$$b) \int^x \tan(t) dt = \int^x \frac{\sin t}{\cos t} dt = - \int^x \frac{\frac{d \cos t}{dt}}{\cos t} dt = - \ln|\cos x| + c$$

¿Cumple para cualquier x ?

$$c) \int^x \frac{t^3 + 2t^2 + 1}{t-1} dt = \int^x (t^2 + 3t + 3 + \frac{4}{t-1}) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4 \ln|x-1| + c$$

¿Cumple para cualquier x ?

Observación 11. La función $\ln|f(x)|$ está definida en

$$D_{\ln \circ |f|} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}.$$

Para todo $x \in D_{\ln \circ |f|}$ se cumple que

$$\frac{d \ln|f(x)|}{dx} = \frac{d}{dx} [\ln|I| \circ f](x) = \left[\left(\frac{d \ln|I|}{dx} \right) \circ f \right](x) \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Como

$$\frac{d \ln |I|}{dx} = \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln |I| = \frac{1}{I} & \text{en } \mathbb{R}^+ \\ \frac{d}{dx} \ln(-I) = \frac{1}{-I} \frac{d(-I)}{dx} = \frac{1}{I} & \text{en } \mathbb{R}^- \end{cases}$$

por la observación 10, entonces

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}.$$

Definición del número e

$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y biyectiva. Entonces existe un número, llamado e , que cumple que $\ln(e) = 1$.

Ejercicio. Argumenta la existencia de e .

Se puede demostrar (no es fácil) que este número $e \in \mathbb{R}$ no es un racional y que pertenece a una clase de números irracionales más compleja que las raíces ($\sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc.), pues no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. A este tipo de número irracional se le llama número trascendente.

Ejercicio. Prueba que $\int_1^2 I^{-1} < 1 = \int_1^e I^{-1} < \int_1^3 I^{-1}$ y concluye que $2 < e < 3$.

Ejercicio. Resuelve la ecuación

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 1 \quad \text{en términos de } e$$

Ejemplo 3.

a) $\int \ln I = I \ln I - I + c$

b) $\int_{-1}^{-e} I^{-1} = \ln |x|_{-1}^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$

Ejemplo 4. Encuentra la familia de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

y exhibe una solución particular que cumpla la condición inicial $x(-e) = 2$.

Solución general: $x(t) = \ln |t| + c$, $c \in \mathbb{R}$

Solución particular: $x_p(t) = \ln |t| + 1$

¿Cuántas soluciones hay que cumplan la misma condición inicial y estén definidas en $\mathbb{R} - \{0\}$?

Funciones Inversas

Proposición 1. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Si f es creciente (decreciente) entonces es inyectiva e invertible (sobre su imagen). Su inversa f^{-1} es también creciente (decreciente). Si f es continua entonces f^{-1} también es continua.

2) Si f es derivable y $Df(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$, entonces f^{-1} es derivable en $f(a, b)$ y

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{[Df \circ f^{-1}]} \text{ en } f(a, b)$$

Referencia: Sección 14.2 de Haaser.

Ejemplo 5. La función $\ln : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ es suprayectiva, creciente y continua. Entonces la función $\ln^{-1} : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ está bien definida. ¿Cuál es su regla de correspondencia? ¿Es continua? ¿Es diferenciable?

La Función Exponencial

Definición. La función inversa del logaritmo es llamada *función exponencial*, se denota como $\exp(x)$ y su imagen es el intervalo $(0, \infty)$.

Observación 12.

- 1) $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 2) como $\ln(e) = 1$, entonces $\exp(1) = e$.
- 3) $\exp(\ln(x)) = x$ para todo $x \in (0, \infty)$ y
 $\ln(\exp(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 4) Por la proposición 1 enunciada anteriormente, la función $\exp(x)$ es creciente, continua y derivable.
- 5) Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ implica que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

Esto se puede entender también como consecuencia de que la $\exp(x)$ es creciente y su imagen es $(0, \infty)$.

Observación 13. Como $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y$, entonces $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Similarmente, $\ln([\exp(x)]^r) = r(\ln(\exp(x))) = rx$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, implica que $\exp(rx) = [\exp(x)]^r$.

Observación 14. Habiendo definido al número e como el número real que cumple que $\ln(e) = 1$, tenemos que ,

$$\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Así, hemos deducido para todo número racional, x , la regla de correspondencia de la inversa de la función logaritmo: $\exp(x) = e^x$. Observe que esta regla está bien definida para todo $x \in \mathbb{Q}$, pero no tiene sentido cuando x es un número irracional. Como la función $\exp(x)$ está definida para todo número real y coincide con la función e^x en los números racionales, puede extenderse ahora en el sentido de la expresión a e^x , entendiendo que $e^x = \exp(x)$, para todo número x irracional. Esta manera de extender la función exponencial e^x es natural, y resulta continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

A partir de este momento nos referiremos a la función inversa de $\ln(x)$, indistintamente, como $\exp(x)$ o como e^x .

La función $\ln(x)$ cumple las hipótesis de la proposición 1 en $(0, \infty)$, en consecuencia:

$$D \exp(x) = \frac{1}{[D \ln \circ \exp(x)]} \text{ en } \ln(0, \infty) = \mathbb{R}$$

Entonces,

$$D \exp(x) = \frac{1}{[I^{-1} \circ \exp(x)]} = \exp(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por esto la función exponencial queda distinguida por la propiedad de ser invariante bajo el proceso de derivación.

La Función Potencia

Hasta este momento una expresión de la forma x^r puede aplicarse cuando r es un número racional. Si $r = p/q$, entonces

$$x^r = x^{p/q} = (x^{1/q})^p$$

y esta expresión está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$, si q es un número impar; en caso de que q sea un número par, la expresión está definida solamente cuando x es un número no negativo. Sin embargo, habiendo definido la función logaritmo y su inversa tenemos que

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \ln(x)},$$

como consecuencia de la observación 13. Dado que la expresión $e^{r \ln(x)}$ tiene sentido para todo x positivo y cualquier número real r , podemos usarla para extender la definición de x^r a este dominio más amplio.

Definición. Para todo número real r , la función potencia $I^r : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$I^r(x) = e^{r \ln(x)} = x^r.$$

Observación 15. Anteriormente habíamos visto que para todo $r \in \mathbb{Q}$, $DI^r = rI^{r-1}$. Ahora podemos generalizar este hecho de la siguiente manera:

$$DI^r = D(e^{r \ln x}) = e^{r \ln x} D(r \ln x) = I^r r I^{-1} = r I^{r-1}$$

y esta fórmula es válida ahora para todo $r \in \mathbb{R}$.

Observación 16. La propiedad de logaritmo dada en la observación 8 puede generalizarse ahora de la siguiente manera

$$\ln(x^r) = \ln(e^{r \ln(x)}) = r \ln(x), \text{ para } r \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty).$$

Ejemplo.

- a) $\pi^{\sqrt{3}}$ queda definido como $e^{\sqrt{3} \ln(\pi)}$;
- b) $DI^\pi = \pi I^{\pi-1}$.
- c) ¿Está bien definido $(-1)^\pi$?