Integración por sustitución

Sea f una función continua en el intervalo I y sea P una primitiva de f, sea u diferenciable con derivada continua en el intervalo $f(I)$. Entonces

$$\int_a^b [f \circ u]u' = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_a^b P'(u(t)u'(t)dt$$

$$\int_a^b (f \circ u)u' = \int_a^b (P' \circ u)u' = \int_a^b (P \circ u)' = P \circ u|_a^b$$

$$= P(u(b) - P(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} P' = \int_{u(a)}^{u(b)} f.$$

Así queda probado el siguiente

Teorema. Sea f continua en el intervalo I y sea u tal que su derivada es continua en $u(I) \subset I$, entonces

$$\int_a^b (f \circ u)u' = \int_{u(a)}^{u(b)} f$$

Ejemplo 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 \cos = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (I^2 \circ sen)sen' = \int_{sen(0)}^{sen(\frac{\pi}{2})} I^2 = \left.\frac{I^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2. Encontrar una primitiva de $\tan(x)$.
Sea $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x \tan(t)dt &= -\int \frac{-sen(t)}{\cos(t)}dt = -\int_0^x [I^{-1} \circ \cos(t)](-sen(t))dt \\ &= -\int_{\cos(0)}^{\cos(x)} \frac{1}{t}dt = -\ln(\cos(x)) + \ln(1) = -\ln(\cos(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x\ln(x)} &= \int_a^b I^{-1}(\ln(x))(\ln(x))'dx = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{1}{x}dx \\ &= \ln(x)|_{\ln(a)}^{\ln(b)} = \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(a)) \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)} = \ln(\ln(x)) + C$$

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{1+t^2}dt &= \frac{1}{2}\int^x I^{-1}(1+t^2)(2t)dt = \frac{1}{2}\int^x I^{-1}(1+t^2)(1+t^2)'dt \\ &= \frac{1}{2}\int^{1+x^2} I^{-1} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Ejemplo 5.

$$\int \sec^2\tan^5 = \int (I^5\circ\tan)(\tan)' = \int^{\tan} I^5 = \left.\frac{I^6}{6}\right|^{\tan} = \frac{\tan^6}{6}$$

Existen ejemplos de integrales en los que $u'(x)$ no aparece en el integrando, algunos de estos casos se pueden resolver usando el teorema de sustitución, mediante una simple modificación al integrando. A continuación unos ejemplos:

Ejemplo 6.

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{1+I^2}(2x)\right](2x)'dx = \frac{1}{2}\int^{2x}\frac{1}{1+I^2} = \frac{1}{2}\arctan(2x)$$

Ejemplo 7.

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx$$

Haciendo la sustitución $u(x)=e^x$, $du = e^x dx$, $dx = \frac{du}{e^x}m$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx &= \int^{e^x}\frac{1+u}{(1-u)u}du = \int^{e^x}\frac{2}{1-u}du + \int^{e^x}\frac{du}{u} \\ &= -2\int^{e^x} I^{-1}(1-u)(1-u)'du + \ln(e^x) = -2\int^{1-e^x} I^{-1} + x \\ &= x - 2\ln(1-e^x)\end{aligned}$$

Notamos que la segunda igualdad es debida a lo siguiente:

$$\frac{2}{1-u}+\frac{1}{u} = \frac{2u+1-u}{(1-u)u} = \frac{1+u}{(1-u)u}$$

es decir que se usa la técnica de fracciones parciales.

Otra manera de resolver esta integral es la siguiente:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \int\left[\frac{1+I}{1-I}\right](e^x)\frac{(e^x)'}{e^x}dx = \int\left[\frac{1+I}{(1-I)I}\right](e^x)e^x dx = \int^{e^x}\frac{1+I}{(1-I)I}$$

y procediendo de igual manera que antes, haciendo uso de fracciones parciales.

Ejemplo 8.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

haciendo la sustitución $u = \sqrt{e^x+1}$, $du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}dx = \frac{e^x}{2u}dx$ y como $u^2 = e^x + 1$ entonces $e^x = u^2 - 1$. Por lo tanto $du = \frac{u^2-1}{2u}dx$ y $dx = \frac{2u}{u^2-1}du$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx &= \int^{\sqrt{e^x+1}} \frac{(u^2-1)^2}{u}\frac{2u}{u^2-1}du = 2\int^{\sqrt{e^x+1}}(u^2-1)du \\
&= 2\left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Big|^{\sqrt{e^x+1}} = 2\frac{(e^x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{e^x+1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

sustituyendo $u = arcsenx$, $x = senu$, $dx = \cos u du$, entonces $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u$.

Por lo que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int^{arcsenx} \cos^2 u du = \frac{1}{2}\int^{arcsenx}(1+\cos 2u)du \\
&= \frac{1}{2}arcsenx + \frac{sen2u}{4}\Big|^{arcsenx} = \frac{1}{2}arcsenx + \frac{1}{4}sen(2arcsenx)
\end{aligned}$$

Ejercicios. Calcula las siguientes integrales usando el teorema de sustitución.

1. $\int^x \frac{t+4}{t^2+1}dt$
2. $\int_0^1 e^x sene^x dx$
3. $\int_0^1 e^{e^x} e^x dx$
4. $\int_1^3 \dfrac{dx}{xLnx}$
5. $\int_1^2 \frac{Ln(Lnx)}{xLnx}dx$
6. $\int_2^4 \dfrac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$
7. $\int^t \frac{\sqrt{tgx+1}}{cos^2 x}dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctgxdx}{1+x^2}dx$

9. $\int tg^4 x dx$

10. $\int_0^\pi \frac{arccos(x)-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

11. $\int_0^\pi x sen(x^2) dx$