

INTRODUCCIÓN

En muchas de las áreas de investigación del conocimiento humano nos encontramos con fenómenos que dependen de cierta condición o condiciones y que, al cambiar algunas de ellas se tiene una forma distinta. Además, cabe resaltar la importancia del estudio de fenómenos en los que se presentan situaciones repetitivas o cíclicas.

El comportamiento de los fenómenos anteriormente descritos puede ser modelado matemáticamente mediante el análisis de los sistemas dinámicos, es por eso la importancia de estudiar la teoría de sistemas dinámicos.

En el presente trabajo se discuten los sistemas dinámicos discretos, en especial los semisistemas dinámicos discretos. La teoría de estos sistemas es muy extensa, nos limitaremos a los sistemas dinámicos en la circunferencia.

En el primer capítulo se discuten los conceptos básicos de la teoría de Sistemas Dinámicos Discretos que sirven como introducción a la parte medular del trabajo y donde se tocan temas como la dinámica periódica, estabilidad, la iteración de funciones en un intervalo, las bifurcaciones y la conjugación topológica.

En el capítulo dos definimos a las funciones de la circunferencia, las cuales determinan sistemas dinámicos. Dado que su dominio y codominio son el círculo, su gráfica es un subconjunto del producto cartesiano de dos círculos, al cual le llamamos toro, podemos definir funciones reales de valores reales que determinan ese mismo sistema, estas funciones se llaman levantamientos y son una herramienta para estudiar los sistemas dinámicos en la circunferencia, discutiremos algunas de sus propiedades importantes.

En el capítulo tres damos un concepto de gran importancia, el cual es el número de rotación, analizando sus propiedades básicas. Este número define la rotación promedio de un endomorfismo de la circunferencia y además está bien definido en homeomorfismos donde será una herramienta primordial para entender el comportamiento del sistema.

Por último en el capítulo cuatro ejemplificamos los resultados dados anteriormente en una familia clásica llamada la familia de Arnold, además de enunciar otros resultados

interesantes característicos de esta familia e involucrando un concepto nuevo llamado *envolvencia*, el cual nos será de gran ayuda.

La herramienta computacional utilizada consistió en el software CIRCULO, en la implementación de un programa que genera las Lenguas de Arnold en la Silicon Graphics y de otros programas en la PC para calcular las bifurcaciones de puntos fijos.

Agradesco la valiosa colaboración y el apoyo incondicional del Dr. Humberto Carrillo Calvet, jefe del laboratorio de dinámica no-lineal de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. , así mismo del M.en C. Fernando Ongay Larios de la Facultad de Ciencias de la U.A.E.M., de quienes laboran en el laboratorio antes mencionado y a todas las personas que tuvieron que ver en el desarrollo del presente trabajo.

Irma Elizabeth Díaz Bobadilla.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS.....	5
1 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS.....	5
2 DINÁMICA PERIÓDICA Y ESTABILIDAD.....	7
3 ITERACIONES DE FUNCIONES EN INTERVALOS.....	11
4 BIFURCACIONES EN UNA DIMENSIÓN.....	13
5 CONJUGACIÓN TOPOLÓGICA.....	19
CAPÍTULO 2 ENDOMORFISMOS DE LA CIRCUNFERENCIA.....	22
1 ENDOMORFISMOS DE LA CIRCUNFERENCIA.....	22
2 LEVANTAMIENTOS.....	25
3 ENVOLVENCIA.....	34
4 HOMEOMORFISMOS DE LA CIRCUNFERENCIA.....	38
4.1 HOMEOMORFISMOS QUE PRESERVAN ORIENTACIÓN...40	
5 SISTEMAS CAÓTICOS.....	44
CAPÍTULO 3 NÚMEROS Y CONJUNTOS DE ROTACIÓN.....	48
1 ÓRBITAS PERIÓDICAS.....	49
2 NÚMEROS Y CONJUNTOS DE ROTACIÓN.....	50
3 NÚMERO DE ROTACIÓN DE LAS ROTACIONES.....	67
4 TEOREMAS SOBRE CONJUGACIÓN PARA DIFEOMORFISMOS CON NÚMERO DE ROTACIÓN IRRACIONAL.....	69

CAPÍTULO 4 ESTUDIO DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES.....	78
1 PUNTOS FIJOS.....	80
1.1 BIFURCACIÓN DE PUNTOS FIJOS.....	80
1.2 ESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS.....	89
2 PUNTOS PERIÓDICOS EN LA REGIÓN DE HOMEOMORFISMOS.....	92
3 BIESTABILIDAD.....	104
3.1 BIESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS.....	104
3.2 COEXISTENCIA DE ÓRBITAS DE DISTINTOS PERÍODOS.....	108
4 BIFURCACIÓN DE DOBLAMIENTO DE PERÍODO.....	110
EPÍLOGO: DISCUSIÓN Y COMENTARIOS FINALES.....	115
APÉNDICE.....	116
BIBLIOGRAFÍA.....	120

Capítulo 1

SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

El objetivo principal de este capítulo es introducir algunas definiciones y resultados de la Teoría de Sistemas Dinámicos Discretos.

1.1 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS.

Los Sistemas Dinámicos ocurren en todas las ramas de las ciencias, desde las ecuaciones diferenciales de la mecánica clásica hasta las ecuaciones diferenciales en la Economía Matemática y la Biología. En los últimos décadas hemos visto una explosión de interés en el estudio de Sistemas Dinámicos. Podemos decir que un sistema dinámico es un fenómeno que cambia con el tiempo y lo podemos modelar de alguna forma matemática.

Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua de una Variedad Diferencial X , las iteradas de f son las funciones f^n definidas inductivamente por $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$. Si f es un homeomorfismo entonces también podemos definir la función $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1. Sea X una Variedad Diferencial. Un Sistema Dinámico Discreto en X de clase C^k es la terna (X, \mathbb{Z}, Φ) , donde Φ es un función de clase C^k , $k > 0$ tal que

$$\Phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X,$$

donde $\Phi(m, x) = \Phi_m(x)$, y la función $\Phi_t : X \rightarrow X$ satisface:

- (i) $\Phi_0 : X \rightarrow X$, es la identidad
- (ii) La composición $\Phi_{m_1} \circ \Phi_{m_2} = \Phi_{m_1+m_2}$, para cada $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

x representa el estado del sistema y toma valores en X al cual se le llama Espacio Fase del sistema dinámico. Algunas veces el espacio fase es un espacio Euclideo o un subconjunto de él pero también puede no tener una estructura Euclidea como un círculo, una esfera, un toro ó alguna otra Variedad Diferencial.

Así mismo definimos un Semisistema Dinámico Discreto (SSD), sólo que en lugar de considerar los enteros \mathbb{Z} serán los naturales \mathbb{N} .

Dado un Sistema Dinámico determina una función $f : X \rightarrow X$ difeomorfismo de clase C^k dado que

$$f^1(x) = \Phi_1(x), \quad x \in X \quad (\text{mapeo a tiempo uno}).$$

A f se le llama la función generadora del Sistema Dinámico. Recíprocamente, todo $f : X \rightarrow X$ difeomorfismo de clase C^k , determina un Sistema Dinámico de clase C^k en X .

$$\Phi_n(x) = f^n(x), \quad \forall x \in X \text{ y } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

veamos si cumple las condiciones:

$$i) \quad \Phi_n \circ \Phi_m(x) = f^n \circ f^m(x) = f^{n+m}(x) = \Phi_{n+m}(x).$$

Como f es difeomorfismo existe f^{-1} , entonces $f^{-m}(x) = (f^{-1})^m(x)$

ii)

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= \Phi_{1-1}(x) = \Phi_1 \circ \Phi_{-1}(x) = \\ &= f \circ f^{-1}(x) = f^{1-1}(x) = f^0(x) = x = Id_M \end{aligned}$$

Por lo tanto, Φ es un Sistema Dinámico.

Observaciones.

i) Si f no es inyectiva, f^{-1} no está definida entonces se tiene un semisistema dinámico.

ii) f endomorfismo de clase C^k $k > 0$, definirá un semisistema dinámico y al revés.

Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Si f es inyectiva sobre la $\text{Im}(f)$ entonces hay unicidad pero no tenemos un Sistema Dinámico

Si $\text{Im}(f) \subset X$ f no es sobre ya que $f^{-1} : \text{Im}(f) \subset X \rightarrow X$ no puede iterarse cuando se sale de la $\text{Im}(f)$. Para que tengamos un Sistema Dinámico requerimos que f sea una biyección de X en X .

Existe otra clase de Sistemas Dinámicos llamados Continuos, donde la terna es (X, \mathbb{R}, Φ) , los cuales se relacionan con ecuaciones diferenciales. En lo sucesivo cuando nos refiramos a un Sistema Dinámico, entenderemos que este es Discreto.

1.2 DINÁMICA PERIÓDICA Y ESTABILIDAD.

Para analizar a los sistemas dinámicos tenemos que entender el comportamiento asintótico ó eventual de un proceso iterativo. Lo anterior se logra comprendiendo algunas definiciones de gran relevancia. Sea f una función de clase C^1 .

Definición 2.1. La semiórbita positiva de x es la sucesión $O^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$. y la semiórbita negativa de x es la sucesión $O^-(x) = \{f^{-n}(x)\}_{n \geq 0}$.

Nos referiremos a $O^+(x)$ como la órbita de x , $O(x)$, cuando consideremos la semiórbita negativa haremos la aclaración.

Proposición 2.2. Dado un Sistema Dinámico si $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$ entonces $O(x) = O(y)$.

Demostración.

Como $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$ entonces existe n_1, n_2 tal que

$$\{\Phi_n(x) : n \geq n_1\} = \{\Phi_n(y) : n \geq n_2\}$$

por lo cual, a partir de n $\Phi_n(x) = y_i = \Phi_n(y)$.

Sea $x_i \in O(x)$ tal que $\Phi_{n_i}(x) = x_i$, $n_i > n$, entonces $n_i = n + m$

$$\Phi_{n_i}(x) = \Phi_{m+n}(x) = \Phi_m \circ \Phi_n(x) = \Phi_m \circ \Phi_n(y) = \Phi_{n+m}(y)$$

entonces $x_i \in O(y)$, por lo cual $O(x) \subset O(y)$; análogamente $O(x) \subset O(x)$. Por lo tanto $O(x) = O(y)$. ■

Observación 2.3. Dado un Semisistema Dinámico

i) Solo tiene $O^+(x)$ $x \in M$.

ii) Si $O^+(x) \cap O^+(y) \neq \emptyset$ entonces $O^+(x) = O^+(y)$

Definición 2.4. Un punto x es un punto periódico de f , si $f^q(x) = x$ para algún $q \geq 1$. q es llamado el período de x .

El menor positivo q para el cual $f^q(x) = x$, es llamado el período de x .

Los puntos periódicos de período $q = 1$, son los puntos fijos de f . El conjunto de todos los puntos fijos de f lo denotamos por $Fix(f)$ y el conjunto de puntos periódicos de período q como $Per_q(f)$.

Definición 2.5. Una órbita de un punto periódico de período q , esta constituida por puntos x , que satisfacen $f^q(x) = x$, la cual es llamada órbita de período q , q -periódica ó un q -ciclo.

Ahora veremos las definiciones de estabilidad, en el sentido de Lyapunov, para las dinámicas más fundamentales que encontramos en los Sistemas Dinámicos.

Definición 2.6. Sea x^* un punto periódico de f . Decimos que x^* es estable si para toda vecindad U de x^* , $\exists U' \subseteq U$ de x^* tal que si $x \in U'$ entonces $f^n(x) \in U$, para toda $n > 0$.

Un punto periódico que no es estable, se dice que es inestable.

Definición 2.7. Sea x^* un punto periódico de período q . Si x^* es estable y para toda x en alguna vecindad U de x^*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{qn}(x) = x^*,$$

entonces x^* es asintóticamente estable.

Definición 2.8. Los puntos periódicos estables pero no asintóticamente estables son llamados neutralmente ó marginalmente estables.

Definición 2.9. Sea x^* un punto asintóticamente estable. La Cuenca de Atracción de x^* es el conjunto

$$\left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^* \right\}.$$

Definición 2.10. Sea x^* un punto periódico de período q . El punto es hiperbólico si $|(f^q)'(x^*)| \neq 1$. El número $(f^q)'(x^*)$ es llamado el multiplicador del punto periódico.

Proposición 2.11. Si x^* es un punto periódico hiperbólico de período q y $|(f^q)'(x^*)| < 1$, entonces la órbita $O(x^*)$ es asintóticamente estable. En este caso, $O(x^*)$ se llama atractor periódico exponencial.

Demostración.

Como f^q es de clase C^1 , existe $\epsilon > 0$ tal que $|(f^q)'(x)| < A < 1$ para $x \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. Por el Teorema del Valor Medio

$$|f^q(x) - x^*| = |f^q(x) - f^q(x^*)| \leq A |x - x^*| < |x - x^*| \leq \epsilon.$$

por lo tanto $f^q(x)$ esta contenida en $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. Vía el mismo argumento

$$|f^{qn}(x) - x^*| \leq A^{qn} |x - x^*|,$$

con $n > 0$, entonces si $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{qn}(x) - x^*| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A^{qn} |x - x^*|,$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{qn}(x) = x^*$$

es decir, $O(x^*)$ es asintóticamente estable. ■

Definición 2.12. Sea x^* un punto periódico de período q . Si $f'(x^*) = 0$ entonces x^* se le llama *superestable*.

Proposición 2.13. Si x^* es un punto periódico hiperbólico de período q y $|(f^q)'(x^*)| > 1$, entonces existe una vecindad U de x^* tal que si $x \in U$, $x \neq x^*$ entonces existe k tal que $f^n(x) \notin U$ para todo $n \geq k$. En este caso, x^* se llama *repulsor periódico exponencial*.

Definición 2.14. Sea x^* un punto periódico de período q . El punto es *semiatractor* si $|(f^q)'(x^*)| = 1$.

Definición 2.15. El conjunto omega-límite de x , $\omega(x)$, del sistema dinámico generado por f , es el conjunto de puntos de acumulación de $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 2.16. Sea $y \in X$. Diremos que $x \in \omega(y)$, si existe una sucesión $\{n_i\}$ de naturales tal que

- i) $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(y) = x$.
- ii) $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$.

De manera análoga se define el conjunto α -límite.

Definición 2.17. Si la función f tiene inverso, entonces podemos definir el conjunto alfa-límite de x , $\alpha(x)$, del sistema dinámico generado por f , es el conjunto de puntos de acumulación de $\{f^n(x) : -n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 2.18. Sea $y \in X$. Diremos que $x \in \alpha(y)$, si existe una sucesión $\{n_i\}$ de naturales tal que

- i) $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{-n_i}(y) = x.$
- ii) $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty.$

1.3 ITERACIÓN DE FUNCIONES DEL INTERVALO.

Consideremos funciones $f : I \rightarrow I$ donde I es un intervalo de números reales e incluso la recta real. La dinámica puede ser visualizada en la recta por la gráfica en Figura 3.1 (A). Otra forma útil de examinar la dinámica es dibujando la gráfica de la función f en el cuadrado $I \times I$ y la recta $y = x$ que es la diagonal del cuadrado como se muestra en Figura 3.1 (B).

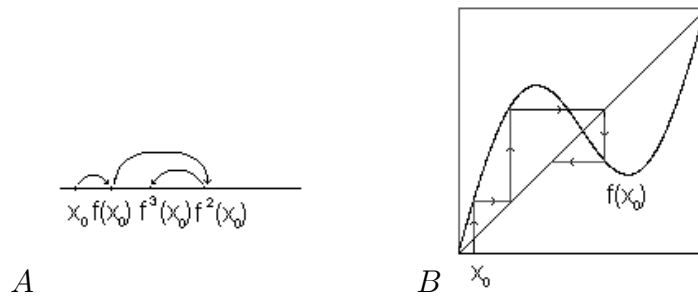


Fig. 3.1. *Iteración de una función.*

A) *En la Recta Real; B) En el cuadrado $I \times I$*

Los puntos $x \in I$ los podemos identificar con lo puntos (x, x) en la diagonal del cuadrado, tomamos un punto (x_0, x_0) en la diagonal, trazamos la recta vertical, a partir de este punto, hasta intersectar la gráfica de f y de ahí la recta horizontal hasta intersectar nuevamente la diagonal; el punto de intersección es $(f(x_0), f(x_0))$. Podemos seguir iterando de esta manera y obtener una sucesión de puntos en la diagonal, que se proyecta sobre una órbita en I .

Los puntos fijos de la función f son evidentemente las intersecciones de la gráfica f con la diagonal. Así mismo, los puntos periódicos de período q , son los puntos de intersección de la gráfica f^q con la diagonal. El principal resultado sobre la existencia de órbitas periódicas es el siguiente:

Teorema 3.1. (Sarkovskii, [3]) Sea (I, f) un Sistema Dinámico en I y definase el siguiente orden de enteros positivos:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Si f tiene una órbita de período n y $n \prec m$, entonces f tiene también una órbita de período m .

Una consecuencia de este Teorema probada por Li y Yorke, es que si f tiene una órbita de período 3, entonces tiene órbitas de todos los períodos.

Un problema importante es determinar sus cuencas de atracción y cuantas órbitas periódicas atractoras existen.

El principal resultado en esta dirección tiene que ver con la derivada de Schwarz. Sea f de clase C^3 , definimos la derivada de Schwarz o Schwarziana de f en x como

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Teorema 3.2. [3] Supongase que $Sf < 0$ ($Sf = -\infty$ es permitido) y que f tiene n puntos críticos (i.e. $f'(x) = 0$) entonces f tiene a lo más $n + 2$ órbitas periódicas atractoras.

1.4 BIFURCACIONES EN UNA DIMENSIÓN

En Sistemas Dinámicos el objeto de la teoría de bifurcación es estudiar los cambios que sufre una función cuando los parámetros cambian. Estos cambios usualmente envuelven estructuras de puntos periódicos, pero pueden haber otro tipo de cambios.

Consideremos familias de funciones de valores reales, que dependen suavemente de un parámetro.

Las bifurcaciones más estudiadas son las del sistema generado por la función logística, definida como sigue:

$$\begin{aligned} f_\lambda : [0, 1] &\rightarrow [0, 1], \\ x &\mapsto \lambda x(1 - x), \quad \text{con } \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

El caso más simple de bifurcación de una familia de funciones $f_\lambda : X \rightarrow X$ con X un espacio compacto¹ de dimensión uno y $\lambda \in U$ un abierto es un punto fijo, en este caso nos interesa hacer la gráfica de λ *contra* x , de la relación implícita

$$f_\lambda(x) = x.$$

En el caso general, cuando estudiamos las bifurcaciones de órbitas periódicas de período q , es necesario hacer la gráfica λ *contra* x , de la relación

$$f_\lambda^q(x) = x.$$

En todos los casos las gráficas son un subconjunto de $U \times X$.

Entonces si conocemos la gráfica de

$$f_\lambda^n(x) = x,$$

¹Ver Apéndice

para todo n y la estabilidad de estas órbitas, conocemos el diagrama de bifurcación de la familia de funciones f_λ , el cual se traduce en información básica para entender los cambios de la dinámica (cambios cualitativos) al cambiar continuamente el parámetro λ , ó la familia de parámetros en cada caso.

Calcular analíticamente el diagrama de bifurcación es bastante difícil ya que si consideramos el caso más simple por ejemplo la función logística que es un polinomio de grado dos, equivale a resolver una ecuación polinomial de grado $2n - 1$. Sin embargo, numéricamente se tienen más posibilidades para estudiar estos sistemas. A continuación daremos los teoremas que nos dan condiciones para bifurcaciones simples (a lo mas periódicas de periodo dos), sin contener información sobre la estabilidad de las órbitas periódicas que bifurcan.

Consideremos f_λ una familia de funciones dependientes del parámetro λ .

Teorema 4.1 (Bifurcación Silla-nodo) Si f_λ , es de clase C^∞ , y si para algún punto (x_0, λ_0) se satisfacen las condiciones:

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$;
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$;
3. $f''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$;
4. $\frac{\partial f_{\lambda_0}(x_0)}{\partial \lambda} \neq 0$.

Entonces existe un intervalo I alrededor de x_0 y una función suave $p(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface $p(x_0) = \lambda_0$, y, $f_{p(x)}(x) = x$, además $p'(x_0) = 0$ y $p''(x_0) \neq 0$.

Demostración:

Los puntos fijos de $f_\lambda(x)$ estan dados por

$$f_\lambda(x) - x \equiv G(x, \lambda) = 0.$$

Buscamos condiciones bajo las cuales $G(x, \lambda)$ define una curva en el plano $x - \lambda$ que cumpla (1) y (2). Por el Teorema de la Función Implícita²

$$\frac{\partial G(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_{\lambda_0}(x_0)}{\partial \lambda} \neq 0,$$

lo cual implica que una curva simple de puntos fijos pasa por (x, λ) , más aun para un x suficientemente pequeño esta curva puede ser representada como una gráfica sobre las x 's variables, es decir, existe una única función C^r $p(x)$, con x suficientemente pequeño tal que

$$G(x, p(x)) \equiv f_{\lambda}(x, p(x)) - x = 0.$$

Ahora simplemente requerimos que

$$\begin{aligned} \frac{dp(x_0)}{dx} &= 0 \\ \frac{d^2p(x_0)}{dx^2} &\neq 0 \end{aligned}$$

derivando implícitamente

$$G(x, p(x)) \equiv f(x, p(x)) - x = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right) \left(\frac{dp(x_0)}{dx} \right) + \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) &= \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right) \left(\frac{dp(x_0)}{dx} \right) + \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) - 1 = 0 \\ \left(\frac{dp(x_0)}{dx} \right) &= \frac{-\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right)} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} - 1 \right)}{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right)} = 0 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right) \left(\frac{dp(x_0)}{dx} \right) + \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) &= \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right) \left(\frac{dp(x_0)}{dx} \right) + \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) - 1 = 0 \\ \left(\frac{d^2p(x_0)}{dx^2} \right) &= \frac{-\frac{\partial^2 G(x_0, p(x_0))}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right)} = \frac{-\frac{\partial^2 f(x_0, p(x_0))}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right)} \neq 0 \end{aligned}$$

Definimos $G(x, \lambda) = f_{\lambda}(x) - x$, por hipótesis $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$; entonces $G(x_0, \lambda_0) = 0$.

²Consúltese Apéndice I

Aplicando el Teorema de la Función Implícita³ a $G(x, \lambda)$,

$$\frac{\partial G(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_{\lambda_0}(x_0)}{\partial \lambda} \neq 0,$$

entonces existe una función diferenciable $p(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G(x, p(x)) \equiv f(x, p(x)) - x = 0.$$

Derivando implícitamente obtenemos que $p'(x)$, esta dada por

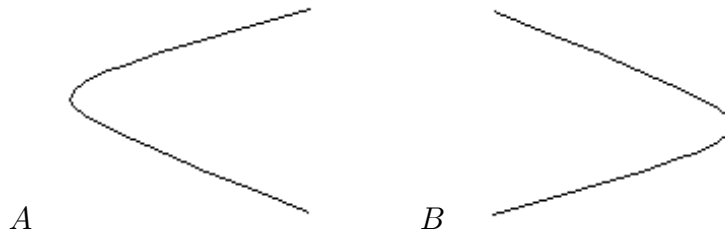
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right) p'(x_0) &= \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right) p'(x_0) = 0 \\ p'(x_0) &= \frac{-\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right)} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} - 1 \right)}{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right)} = 0 \end{aligned}$$

entonces la gráfica de $G(x_0, \lambda_0) = 0$, en el plano (x, λ) tienen una tangente vertical en el punto (x_0, λ_0) .

Si ahora calculamos $p''(x)$, se tiene

$$p''(x_0) = \frac{-\frac{\partial^2 G(x_0, p(x_0))}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right)} = \frac{-\frac{\partial^2 f(x_0, p(x_0))}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right)} \neq 0$$

Observación: El signo de $p''(x_0)$ nos dice de que lado de λ_0 se localiza la curva de puntos fijos, es decir, determinan la dirección de la bifurcación.



³Consúltese Apéndice

Figura. 4.1 *Gráfica de la Bifurcación Silla – Nudo.*

A) $p''(x_0) > 0$; B) $p''(x_0) < 0$

Teorema 4.2.(Bifurcación Doblamiento de Período).Supongamos que

1. $f_\lambda(x_0) = x_0$, para todo λ en un intervalo I alrededor de λ_0
2. $f'_\lambda(x_0) = -1$
3. $\frac{\partial(f_\lambda^2(x_0))}{\partial\lambda} \neq 0$

Entonces existe un intervalo I que contiene a x_0 y una función diferenciable $\lambda = p(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_{p(x)}(x) \neq x$, pero $f_{p(x)}^2(x) = x$.

Demostración.

Definimos $G(x, \lambda) \equiv f_\lambda^2(x) - x$. Por hipótesis los puntos fijos son

$$G(x, \lambda) \equiv f_\lambda^2(x) - x = 0,$$

Aplicando el Teorema de la Función Implícita⁴ a $G(x, \lambda)$,

$$\frac{\partial G(x_0, \lambda_0)}{\partial\lambda} = \frac{\partial (f_{\lambda_0}^2(x_0))}{\partial\lambda} \neq 0,$$

entonces existe una función diferenciable $p(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G(x, p(x)) \equiv f^2(x, p(x)) - x = 0.$$

Derivando implícitamente obtenemos que $p'(x)$, esta dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right) p'(x_0) &= \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda} \right) p'(x_0) = 0 \\ p'(x_0) &= \frac{-\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right)} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial x} - 1 \right)}{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial p(x)} \right)} = 0 \end{aligned}$$

⁴Consúltese Apéndice

entonces la gráfica de $G(x_0, \lambda_0) = 0$, en el plano (x, λ) tienen una tangente vertical en el punto (x_0, λ_0) .

Si ahora calculamos $p''(x)$, se tiene

$$p''(x_0) = \frac{-\frac{\partial^2 G(x_0, p(x_0))}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial G(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda}\right)} = \frac{-\frac{\partial^2 f(x_0, p(x_0))}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial f(x_0, p(x_0))}{\partial \lambda}\right)} \neq 0$$

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{G(x, \lambda)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ G'(x, \lambda), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

entonces H es diferenciable y se satisface

$$H'(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}G''(0, \lambda_0),$$

$$H''(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}G'''(0, \lambda_0),$$

además por hipótesis

$$H(0, \lambda_0) = G'(x, \lambda) = 0$$

$$H'(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} (G'(x, \lambda)) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((f_\lambda^2)'(0) - 1 \right) = \frac{\partial f_{\lambda_0}^2(x_0)}{\partial \lambda} \neq 0,$$

Si ahora aplicamos el teorema de la función implícita a la función H , existe una función diferenciable $p(x)$ tal que $H(x, p(x)) = 0$, en particular

$$\frac{G(x, p(x))}{x} = 0, x \neq 0.$$

entonces x es un punto periódico de período dos de f_λ . Observemos que

$$p'(x_0) = \frac{\frac{\partial H(0, \lambda_0)}{\partial x}}{\frac{\partial H(0, \lambda_0)}{\partial \lambda}} = 0$$

ya que

$$(f_\lambda^2)''(0) = ((f_\lambda)'(0))^2 (f_\lambda)''(0) + (f_\lambda)''(0) (f_\lambda)'(0) = 0. \blacksquare$$

Observación:

La concavidad de la curva definida por la función $p(x)$ se puede conocer si calculamos

$$p''(x_0) = \frac{-H''(0, \lambda_0) \left(\frac{\partial H(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right)}{\left(\frac{\partial H(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right)^2}$$

$$p''(x_0) = \frac{\frac{2}{3} f_\lambda'''(0) + (f_\lambda''(0))^2}{\frac{\partial (f_\lambda^2)(0)}{\partial \lambda}}$$

La gráfica de la bifurcación de doblamiento de período depende del signo de $f_\lambda'''(0) + (f_\lambda''(0))^2$.

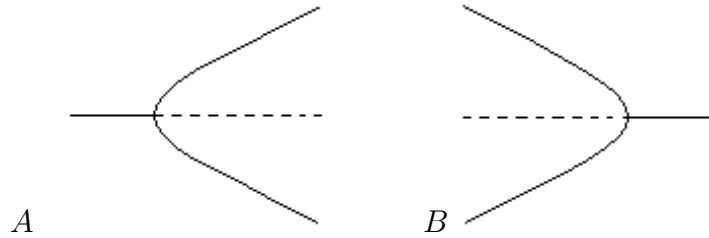


Figura. 4.2. Gráfica de la Bifurcación de Doblamiento de Período con :

$$A) \left(\frac{-\frac{\partial^3 f_\lambda^2(x)}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 f_\lambda^2(x)}{\partial x \partial \lambda}} \right) > 0; \quad B) \left(\frac{-\frac{\partial^3 f_\lambda^2(x)}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 f_\lambda^2(x)}{\partial x \partial \lambda}} \right) < 0.$$

Al sufrir f una bifurcación de Doblamiento de período, f^2 sufre una bifurcación de Tenedor.

1.5 CONJUGACIÓN TOPOLÓGICA

Definición 5.1. Sean $f, g : X \rightarrow X$. Decimos que f es topológicamente conjugada a g si existe un homeomorfismo h tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Proposición 5.2. Dos funciones que son topológicamente conjugadas dan lugar a sistemas dinámicos tal que

1. Tienen igual número de puntos periódicos.
2. Sus correspondientes ω – *límites* son homeomorfos.

Demostración.

Sean f y g topológicamente conjugadas, entonces

$$g \circ h = h \circ f,$$

donde h es un homeomorfismo.

Así que si x es un punto periódico de período n , entonces

$$f^n(x) = x,$$

es decir

$$f^n(x) = h^{-1}(g^n(h(x))),$$

o sea que

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x),$$

de donde se concluye que si x es un punto periódico de f , lo es también de g vía el homeomorfismo.

Por otra parte, si el conjunto $\omega(f)$ es el conjunto ω – *límite* de f el correspondiente a g es

$$\{g^n(x) : x \in \mathbf{N}\}$$

es decir,

$$\{(h^{-1}f^n h)(x) : n \in \mathbf{N}\} \blacksquare$$

Definición 5.3. Un subconjunto Y de X es **Denso** si para todo $x \in X$ y para toda vecindad U de x existe $y \in Y \cap U$.

Definición. 5.4. Un conjunto de Cantor es un conjunto que es cerrado, todos sus puntos son de acumulación y es denso en ninguna parte.

Capítulo 2

ENDOMORFISMOS DE LA CIRCUNFERENCIA.

En este capítulo discutiremos las ideas y resultados básicos que involucra el estudio de la dinámica de las funciones de la circunferencia.

Las funciones de la circunferencia determinan sistemas dinámicos útiles para modelar diversos procesos naturales donde se manifiesta una actividad cíclica. Después del trabajo pionero de Poincaré y Denjoy se han acumulado múltiples investigaciones de matemáticos y científicos contemporáneos que han estudiado la dinámica de las iteraciones de estas funciones desde un punto de vista puro y aplicado. El estudio de estos sistemas dinámicos requiere combinar métodos matemáticos (analíticos y geométricos) con simulaciones computacionales.

2.1 ENDOMORFISMOS DE LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia S es la clase de equivalencia topológica del conjunto

$$\{e^{2\pi it}/t \in [0, 1)\}.$$

Otra representación de S nos la da el espacio topológico \mathbb{R}/\mathbb{Z} que resulta de identificar los extremos del intervalo $[0, 1]$.

Una función

$$f : S \rightarrow S,$$

es llamada una función de la Circunferencia. Llamaremos a una función continua de la circunferencia un Endomorfismo de la Circunferencia.

Las gráficas de las funciones de la Circunferencia son curvas en $T^2 = S \times S$.

Para visualizar estas gráficas conviene pensar a T^2 como el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ donde los lados opuestos están identificados.

Ejemplo 1:

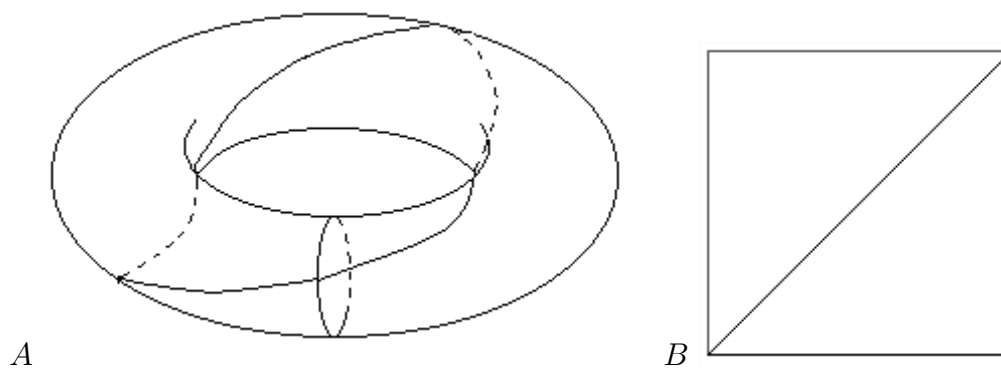


Figura. 1.1. A) *Identidad en el Toro;*

B) *Identidad en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$*

Consideramos las gráficas de estas funciones en el cuadrado en lugar de hacerlo en la superficie de una dona; siendo así más fáciles de dibujar. Cuando nos refiramos a gráficas

en el Toro estaremos pensando en gráficas en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Definición 1.1 La Proyección Canónica es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\rightarrow S \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

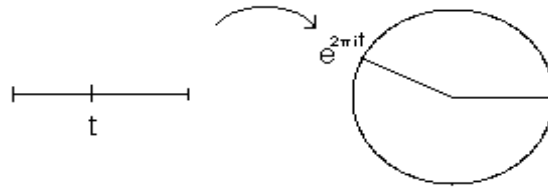


Fig. 1.2 Proyección Canónica

Observación 1.2 La proyección canónica cumple:

- i) $\pi(t)$ es continua.
- ii) Para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $\pi(t) = \pi(s)$ si y solo si $t = s \pmod{1}$, es decir, $\pi(t) = \pi(s)$ si y solo si $t = s + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

- i) Observemos que si identificamos \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , π se puede redefinir por simplicidad

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$$d\pi_t = (-\sin t, \cos t)$$

existe para toda $t \in \mathbb{R}$, por lo que π es diferenciable en \mathbb{R} y por lo tanto es continua en \mathbb{R}

ii)

$$\begin{aligned}\pi(t) &= \pi(s) \\ e^{2\pi it} &= e^{2\pi is} \\ e^{2\pi it} e^{2\pi i(-s)} &= 1 \\ e^{2\pi i(t-s)} &= 1 \\ t &= s + k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ t &= s \pmod{1}. \blacksquare\end{aligned}$$

2.2 LEVANTAMIENTOS

Las funciones de la circunferencia las podemos representar por medio de funciones reales de valores reales.

Teorema 2.1 Sea f un endomorfismo de la circunferencia. Entonces existe una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un entero $k = k(f)$ tal que:

i) para cada $t \in \mathbb{R}$, $F(t+1) = F(t) + k$,

ii) conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ & S \xrightarrow{f} S & \end{array}$$

es decir, $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Definición 2.2 Cualquier función continua F que satisfaga (i) y (ii) de la proposición anterior se llamará un levantamiento de f . Al entero $k(f)$ se le llamará el grado de la función continua f .

La discusión que sigue nos demuestra que el grado está bien definido.

Demostración del Teorema 2.1:

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(t_0) = e^{2\pi i t_0} = 1$. Para $t \in [t_0, t_0 + 1)$, definamos:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \arg(f(e^{2\pi i t})),$$

tomando una rama continua de \arg , de este modo F es continua en $t \in [t_0, t_0 + 1)$. y

$$\begin{aligned} \pi \circ F &= \pi\left(\frac{1}{2\pi} \arg(f(e^{2\pi i t}))\right) = e^{2\pi i \left(\frac{1}{2\pi} \arg(f(e^{2\pi i t}))\right)} \\ &= e^{i \arg(f(e^{2\pi i t}))} = f(e^{2\pi i t}) = f \circ \pi \end{aligned}$$

en dicho intervalo. Por otro lado

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \arg(f(e^{2\pi i(t_0+t)})) = \frac{1}{2\pi} \arg(f(e^{2\pi i t_0})) = F(t_0) + k,$$

donde k es el entero por el que difieren las dos ramas de \arg en $f(e^{2\pi i t_0})$. Definimos entonces $F(t_0 + 1) = F(t_0) + k$ y, para $t \in [t_0 + 1, t_0 + 2)$, $F(t)$ por la misma relación que antes, pero con la nueva rama del argumento. Es claro que este proceso lo podemos repetir indefinidamente y obtener así $F(t)$ para $t \geq t_0$ tal que cumpla la conmutatividad del diagrama. Para $t < t_0$ se hace algo semejante, con lo cual tenemos una función continua definida en toda la recta real que satisface todos los requerimientos. ■

Ejemplos:

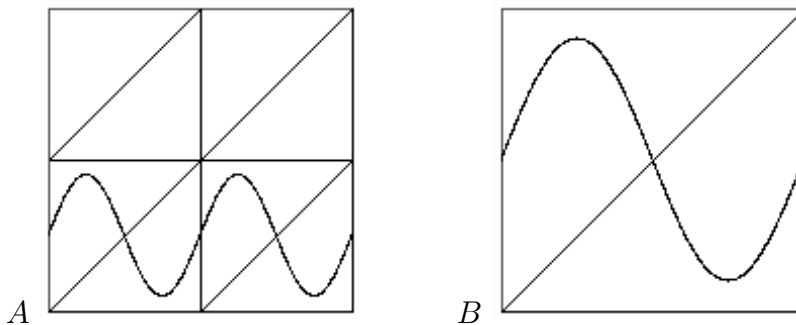


Figura. 2.1. A) *Gráfica del Levantamiento*; B) *Gráfica en el Toro*

$$f(x) = 0.5 + (0.4)\text{sen}2\pi x, \quad k(f) = 0.$$

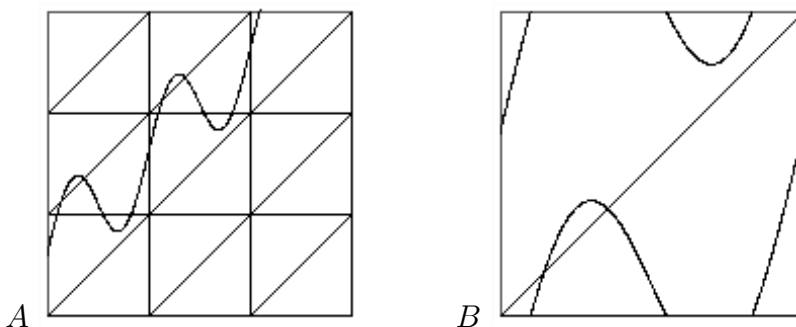


Figura. 2.2. A) *Gráfica del Levantamiento*; B) *Gráfica en el Toro*

$$f(x) = x + 0.6 + (0.95)\text{sen}2\pi x, \quad k(f) = 1.$$

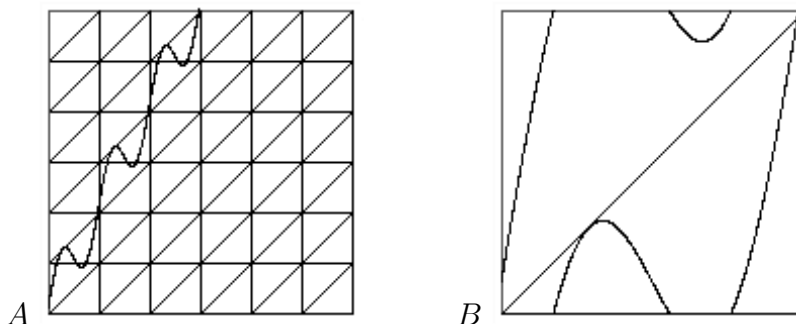


Figura. 2.3. A) *Gráfica del Levantamiento*; B) *Gráfica en el Toro*

$$f(x) = 2x + 0.1 + (0.6)\text{sen}2\pi x, \quad k(f) = 2.$$

Observación 2.3 Si f es un endomorfismo de la circunferencia de grado k entonces para todo levantamiento F de f se tiene

$$F(t + m) = F(t) + mk, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:

Sea f una función continua de grado k , aplicamos inducción sobre m . Si $m = 1$, por el Teorema 2.1 i),

$$F(t + 1) = F(t) + k,$$

Supongamos que se cumple para $m - 1$

$$F(t + (m - 1)) = F(t) + (m - 1)k$$

Probemos que se vale para m , es decir,

$$F(t + m) = F(t) + mk$$

$$\begin{aligned} F(t + m) &= F(t + m - 1 + 1) \\ &= F(t + (m - 1)) + k \\ &= F(t) + (m - 1)k + k \\ &= F(t) + mk. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La gráfica de un levantamiento se puede obtener en toda la recta, conociéndola en un intervalo de longitud uno, digamos en $[0, 1]$, de la proposición anterior sabemos que el punto final en 1 está k unidades arriba que el punto en 0, comenzando en el punto $(1, F(1))$ repetimos la misma gráfica, ahora sobre el intervalo $[1, 2]$, repitiendo este proceso, a izquierda y derecha del trozo de la gráfica conocido, se obtiene la gráfica del levantamiento; llamemos al trozo de la gráfica de un levantamiento que asume valores en $[0, 1]$, un trozo fundamental.

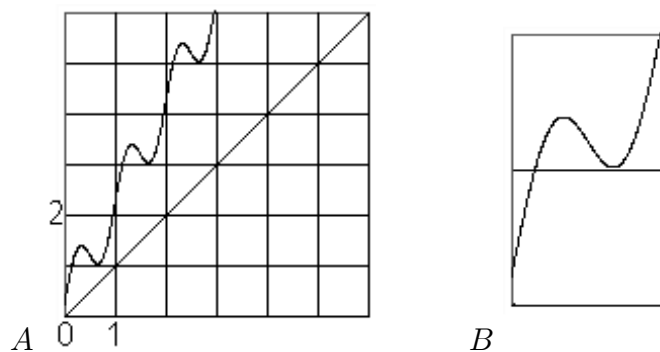


Figura. 2.4. A) *Gráfica del Levantamiento*; B) *Trozo Fundamental*.

Los levantamientos de un endomorfismo de la circunferencia son únicos salvo por la

suma de una constante entera.

Observación 2.4 Sea f un endomorfismo de la circunferencia y F un levantamiento continuo de f . Entonces F^* es otro levantamiento continuo de f si y sólo si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F^*(t) = F(t) + m$, para todo $t \in \mathbb{R}$

Demostración

\Leftarrow) Supongamos que F^* es tal que existe $m \in \mathbb{Z}$

$$F^*(t) = F(t) + m, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

aplicando π en ambos miembros

$$\begin{aligned} \pi(F^*(t)) &= \pi(F(t) + m) = \pi(F(t)) \\ &= f(\pi(t)). \end{aligned}$$

Entonces F^* es también levantamiento de f .

\Rightarrow) Sean $F(t)$ y $F^*(t)$ levantamientos de f , entonces

$$\pi(F^*(t)) = f(\pi(t)) = \pi(F(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

entonces,

$$F^*(t) - F(t) \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $F^*(t)$, $F(t)$ son continuas y $F^*(t) - F(t)$ es discreto, entonces es constante. Por lo tanto,

$$F^*(t) - F(t) = m$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$. ■

Aunque los levantamientos de un endomorfismo de la circunferencia no son únicos,

fijando el valor del levantamiento en algún punto, digamos $F(0) = F_0$, queda determinado un único levantamiento $F(t)$.

Alternativamente, podemos determinar un único levantamiento F de f , si suponemos la condición de que $F(0) \in [0, 1)$.

Es posible también ir en la otra dirección, es decir, de levantamientos a funciones de la circunferencia; la gráfica de una función en la circunferencia puede obtenerse también de la gráfica de sus levantamientos si consideramos un trozo fundamental de la gráfica de cualquier levantamiento entonces cruzará verticalmente un número entero de cuadrados de lado uno; esto nos determina un rectángulo de base uno y altura igual a un entero, digamos k . Cortemos ahora este rectángulo en k cuadrados unitarios y superponiéndolos obtenemos la gráfica de f .

Ejemplo:

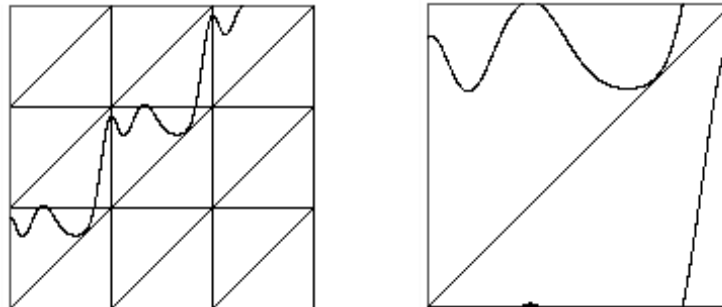


Figura. 2.5. A) *Gráfica del Levantamiento*; B) *Gráfica en el Toro*

$$f(x) = x + 0.3 + (0.3)\text{sen}2\pi(x + 0.3 + (0.3)\text{sen}2\pi x), \quad k(f) = 1.$$

Teorema 2.5 Supongamos que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, k un entero y

$$F(t + 1) = F(t) + k$$

para $t \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único endomorfismo de la circunferencia f tal que F es un levantamiento de f . Obviamente este endomorfismo f es de grado k .

Demostración:

Definimos

$$f(x) = \pi(F(t)).$$

donde t es cualquier punto en $\pi^{-1}(x)$.

Veamos que la función está bien definida, es decir, que no depende de la elección de t . Si $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\pi(t_0) = x,$$

entonces

$$\pi(t_0) = \pi(t)$$

por lo que

$$t_0 - t \in \mathbb{Z}$$

de aquí que

$$f(x) = \pi(F(t_0)) = \pi(F(t) + k(t_0 - t)) = \pi(F(t)). \blacksquare$$

Observación 2.6(*i*) Las iteradas f^n de un endomorfismo de grado k tienen grado k^n .

(*ii*) F^n es un levantamiento de f^n si F es levantamiento del endomorfismo de la circunferencia, f .

Demostración.

Efectuemos inducción sobre n en los incisos (*i*), (*ii*).

(*i*) Sea F es un levantamiento de f de grado k . Por el Teorema 2.1 *i*),

$$F(t+1) = F(t) + k,$$

Suponemos para n

$$F^n(t+1) = F^n(t) + k^n.$$

Por demostrar que se vale para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 F^{n+1}(t+1) &= F(F^n(t+1)) \\
 &= F(F^n(t) + k^n) \\
 &= F(F^n(t)) + k^n k \\
 &= F^{n+1}(t) + k^{n+1},
 \end{aligned}$$

por la observación 2.3. Por lo tanto f^n es de grado k^n . ■

(ii) Como F es un levantamiento de f

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

Supongamos que vale para n , es decir

$$\pi \circ F^n = f^n \circ \pi,$$

Demostremos para $n + 1$,

$$\begin{aligned}
 \pi \circ F^{n+1} &= \pi \circ F^n \circ F = f^n \circ \pi \circ F \\
 &= f^n \circ f \circ \pi = f^{n+1} \circ \pi
 \end{aligned}$$

además como f es continua y claramente $F^n(t+1) = F^n(t) + k(f)$, F^n es un levantamiento de f^n . ■

Ejemplo:

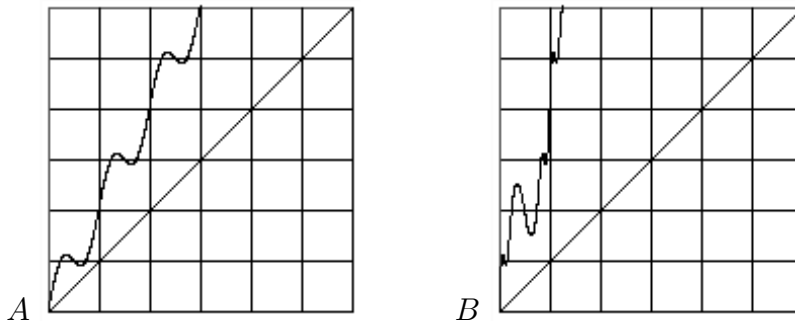


Figura. 2.6. Gráfica del Levantamiento de $f(x) = 2x + (0.5) \text{ sen } 2\pi x$:

$$A) k(f) = 2; B) k(f^2) = 4$$

Definición. 2.7 Sea f un endomorfismo de la circunferencia y F levantamiento continuo de f . Diremos que

- (i) f es monótono decreciente si F lo es.
- (ii) f es monótono creciente si F lo es.

Para posterior referencia hacemos las siguientes observaciones.

Observación 2.8 Sean f, g endomorfismos de la circunferencia de grado k y F, G levantamientos de f, g respectivamente, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, $F^n(t) - G^n(t)$ es una función de grado cero, es decir es una función periódica

Demostración.

Sea $n = 1$. Como f y g tienen grado k , tenemos que

$$\begin{aligned} F(t+1) &= F(t) + k, \\ G(t+1) &= G(t) + k \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} F(t+1) - G(t+1) &= F(t) + k - G(t) - k \\ &= F(t) - G(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(t) - G(t)$ es de grado cero.

Como F^n, G^n son levantamientos de f^n, g^n endomorfismos de la circunferencia de grado k , se cumple el paso anterior y por lo cual $F^n(t) - G^n(t)$ es de grado cero. ■

En particular, si $G(t) = t$ se tiene $F^n(t) - t$ es de grado cero.

Observación 2.9 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente,

de grado uno y sea F un levantamiento de f . Entonces para $n = 1, 2, \dots$ si

$$M_n = \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{Máx}} (F^n(t) - t) \quad \text{y} \quad m_n = \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{Mín}} (F^n(t) - t),$$

se tiene $M_n - m_n \leq 1$.

Demostración:

Como $F(t) - t$ es continua, existen $T, t \in \mathbb{R}$ con $0 \leq (T - t) < 1$ tal que,

$$F(T) - T = M \quad \text{y} \quad F(t) - t = m,$$

además como $F(t)$ es monótona creciente, de grado uno, se tiene que

$$F(T) \leq F(t + 1) = F(t) + 1,$$

$$F(T) - F(t) \leq 1,$$

entonces,

$$\begin{aligned} M - m &= (F(T) - T) - (F(t) - t) \\ &= (F(T) - F(t)) - (T - t) \\ &\leq 1 - (T - t) \\ &\leq 1. \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 ENVOLVENCIA.

Proposición 2.10 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno. Si x es un punto periódico de período q de f y F es un levantamiento de f entonces dado t tal que $\pi(t) = x$ existe un entero $m(t, F)$ tal que

$$F^q(t) = t + m(t, F).$$

Demostración.

Sea t tal que $\pi(t) = x$, como x es un punto de período q de f , entonces

$$f^q(x) = x$$

$$f^q(\pi(t)) = \pi(t),$$

siendo F un levantamiento de f ,

$$f^q(\pi(t)) = \pi(F^q(t)) = \pi(t).$$

De aquí concluimos que existe $m(t, F)$ tal que

$$F^q(t) = t + m(t, F). \blacksquare$$

Proposición 2.11 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno. Si x es un punto periódico de período q de f , F_1, F_2 levantamientos continuos de f , $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\pi(t_1), \pi(t_2) \in O(x)$ y $F_1^q(t_1) = t_1 + m_1$, $F_2^q(t_2) = t_2 + m_2$ entonces

$$m_1 = m_2 \pmod{q}.$$

Demostración.

Sean r, s y l enteros y $x_r, x_s \in S$, tales que

$$\pi(t_1) = x_r = f^r(x),$$

$$\pi(t_2) = x_s = f^s(x),$$

como F_1, F_2 son levantamientos de f , entonces,

$$F_1(t) = F_2(t) + l, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Con $k = r - s \geq 0$

$$x_r = f^r(x) = f^{r-s+s}(x) = f^{r-s}(x_s) = f^k(x_s)$$

$$\pi(t_1) = x_r = f^k(x_s) = f^k(\pi(t_2)) = \pi(F^k(t_2))$$

por lo cual,

$$t_1 = F^k(t_2) + m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

entonces,

$$\begin{aligned} m_1 &= F_1^q(t_1) - t_1 = F_2^q(t_1) + ql - t_1 \\ &= F_2^q(F_2^k(t_2) + m) + ql - t_1 \\ &= F_2^{q+k}(t_2) + m + ql - t_1 \\ &= F_2^k(F_2^q(t_2)) + m + ql - t_1 \\ &= F_2^k(t_2 + m_2) + m + ql - t_1 \\ &= F_2^k(t_2) + m + m_2 + ql - t_1 \\ &= t_1 + m_2 + ql - t_1 \\ &= m_2 + ql \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 2.12 Un endomorfismo de la circunferencia f , de grado uno, tiene una órbita $O(x_i)$ de período q si y sólo si existe una única F , levantamiento continuo, tal que $F^q(t) = t + p$ con $0 \leq p < q$, para toda t tal que $\pi(t) = x_i$ para algún índice i .

Demostración.

\Leftarrow) Si existe un levantamiento F continuo y t_i tal que $F^q(t_i) = t_i + p$ con $0 \leq p < q$,

$$f^q(\pi(t_i)) = \pi(F^q(t_i)) = \pi(t_i + p) = \pi(t_i)$$

como $\pi(t_i) = x_i$, entonces

$$f^q(x_i) = x_i.$$

\Rightarrow) Dado t_i tal que $\pi(t_i) = x_i$, se tiene que,

$$f^q(\pi(t_i)) = \pi(t_i),$$

entonces para todo F levantamiento de f ,

$$\pi(F^q(t_i)) = \pi(t_i),$$

$$F^q(t_i) = t_i + m,$$

por el algoritmo de la división,

$$F^q(t_i) = t_i + m = t_i + p + cq, \text{ con } 0 \leq p < q.$$

Sea $F^* = F - c$, entonces

$$(F^*)^q(t_i) = F^q(t_i) - cq = t_i + p + cq - cq = t_i + p,$$

y el levantamiento F^* cumple la condición buscada.

Veamos que es única, consideremos otro levantamiento F , que cumpla

$$(F)^q(t_i) = t_i + p,$$

como $F^* = F + l$, con $l \in \mathbb{Z}$ distinto de cero,

$$(F^*)^q(t_i) = F^q(t_i) + lq = t_i + p + lq,$$

pero $(F^*)^q(t_i) = t_i + p$, entonces

$$t_i + p + lq = t_i + p$$

$lq = 0$, pero $q > 0$, entonces $l = 0$ lo cual es una contradicción. ■

Definición 2.13 Sea $O(x_i)$ una órbita de período q del endomorfismo de grado uno f , F representación continua de f y $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ tales que $F^q(t) = t + m$. La envolvente E de una órbita $O(x_i)$ se define como

$$E = m \pmod{q}.$$

Llamaremos Característica de una órbita a la pareja (p, q) donde p es la envolvente de la órbita y q el período de ella.

2.4 HOMEOMORFISMOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Los homeomorfismos de la circunferencia, es decir, las funciones continuas de la circunferencia cuya inversa también es continua, han sido estudiadas extensamente. Presentamos algunos resultados importantes respecto a estas funciones.

Observación 3.1. Si f es un homeomorfismo de la circunferencia y F es un levantamiento continuo de f , entonces F es un homeomorfismo y además F^{-1} es un levantamiento de f^{-1} .

Demostración:

Sean f un homeomorfismo y F, F^* levantamientos continuos de f y f^{-1} respectiva-

mente, entonces

$$\begin{aligned}\pi \circ Id &= Id \circ \pi \\ &= (f \circ f^{-1}) \circ \pi \\ &= f \circ (f^{-1} \circ \pi) \\ &= f \circ (\pi \circ F^*) \\ &= (f \circ \pi) \circ F^* \\ &= (\pi \circ F) \circ F^* \\ &= \pi \circ (F \circ F^*)\end{aligned}$$

y como π es suprayectiva, se tiene que

$$Id = F \circ F^*,$$

análogamente

$$Id = F^* \circ F$$

por lo que

$$F^* = F^{-1}$$

entonces, F es homeomorfismo. ■

Observación 3.2. Sean f, g funciones continuas de la circunferencia y F, G sus levantamientos respectivos. Si f y g son topológicamente conjugadas entonces F y G son topológicamente conjugadas.

Demostración.

Si f y g son topológicamente conjugadas entonces existe h homeomorfismo tal que

$$h \circ f = g \circ h$$

por el Teorema 2.1 *ii*), tenemos

$$\begin{aligned}
 (h \circ f) \circ \pi &= (g \circ h) \circ \pi \\
 h \circ (f \circ \pi) &= g \circ (h \circ \pi) \\
 h \circ (\pi \circ F) &= g \circ (\pi \circ H) \\
 (h \circ \pi) \circ F &= (g \circ \pi) \circ H \\
 (\pi \circ H) \circ F &= (\pi \circ G) \circ H \\
 \pi \circ (H \circ F) &= \pi \circ (G \circ H)
 \end{aligned}$$

como π es suprayectiva,

$$H \circ F = G \circ H$$

y como H es homeomorfismo por la observación anterior, se tiene que F y G son topológicamente conjugadas. ■

2.4.1 HOMEOMORFISMOS QUE PRESERVAN ORIENTACIÓN.

El "orden" natural de la circunferencia es tal que $x < y$, si partiendo de un punto de referencia arbitrario, en sentido contrario de las manecillas del reloj, nos encontramos con x primero y después con el punto y .

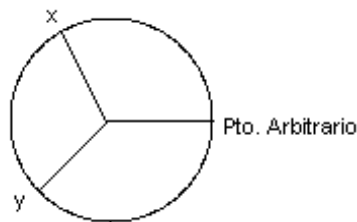


Fig. 3.1. Orden natural de la circunferencia.

Definición 3.3 Un homeomorfismo de la circunferencia f preserva la orientación en S^1 , si siempre que $x, y \in S^1$, $x < y$ implique que $f(x) < f(y)$, con el "orden" natural de la circunferencia.

Que un homeomorfismo preserve la orientación es equivalente a que, si tomamos un segmento dirigido en la circunferencia y lo iteramos, su imagen en cada iteración, sea un segmento dirigido con la misma dirección que el segmento original que se tomó.

Abreviaremos "Homeomorfismo que preserva la Orientación" por HPO.

Proposición 3.4 Sea f un HPO. Entonces todo levantamiento continuo F de f es estrictamente creciente y

$$F(t + 1) = F(t) + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

es decir, el grado de f es uno.

Demostración.

Sean $t_0, t_1 \in [0, 1)$, tales que $t_0 < t_1$, entonces

$$\pi(t_0) < \pi(t_1).$$

Supongamos que F no es creciente, es decir, existen $t_0, t_1 \in [0, 1)$ tales que $F(t_0) \geq F(t_1)$, aplicando π en ambos miembros

$$\pi(F(t_0)) \geq \pi(F(t_1)),$$

y por el Teorema 2.1 *ii*),

$$f(\pi(t_0)) \geq f(\pi(t_1))$$

lo cual contradice el hecho de que f preserva la orientación. Por lo tanto, F es estrictamente creciente.

Sea k el grado de f , es claro que $k > 0$ pues F es estrictamente creciente. Supongamos

que $k \geq 2$, entonces

$$F(t+1) = F(t) + k,$$

por lo cual existen $t_0, t_1 \in [0, 1)$ distintos tales que

$$F(t_1) - F(t_0) = 1,$$

es decir π mapea a t_0 y a t_1 en puntos distintos de S^1 , pero $F(t_0)$ y $F(t_1)$ son el mismo punto en S^1 , lo cual es una contradicción; ya que f es un homeomorfismo. Así que $k \leq 1$, por lo que concluimos que $k = 1$, es decir

$$F(t+1) = F(t) + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \blacksquare$$

Observación 3.5 Por la proposición anterior, si f es un HPO entonces para todo levantamiento F de f se tiene

$$F(t+m) = F(t) + m, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.6 Si f es un homeomorfismo que invierte orientación, se puede probar de manera análoga que todo levantamiento F de f es una función estrictamente decreciente y $F(t+1) = F(t) - 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall k \in \mathbb{Z}.$

Observación 3.7 f es una función continua de la circunferencia, inyectiva, de grado uno si y solo si f es un HPO.

Demostración.

\Rightarrow) Basta con demostrar que $g = f^{-1}$ es continua.

Como f es de grado uno, es sobre. Además tenemos que

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

y dado que $[0, 1]$ es un compacto, como f es continua en $[0, 1]$ entonces $f([0, 1])$ es compacto, además f es inyectiva por lo que f^{-1} está bien definida.

Sea H cualquier subconjunto cerrado de $[0, 1]$ entonces H es compacto, de aquí que $f(H)$ es compacto por lo tanto cerrado.

$$H_1 = f(H) = g^{-1}(H)$$

dado que H_1 es un subconjunto de $f([0, 1]) = \text{Dom}(g)$, es decir $H_1 \cap \text{Dom}(g) = g^{-1}(H)$, entonces por el Teorema de Continuidad Global f^{-1} es continua

\Leftrightarrow) Basta con demostrar que f es de grado uno, pero f es un HPO entonces tiene grado uno. ■

Rotaciones

Para cada $\theta \in [0, 1)$ consideramos la función $R_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por el levantamiento $R_\theta(t) = t + \theta$. R_θ es el levantamiento de una función de la circunferencia.

Si $\theta \in \mathbb{Q}$ se dice que R_θ es una rotación racional y si $\theta \notin \mathbb{Q}$ se dice que R_θ es una rotación irracional.

Las rotaciones son los ejemplos más sencillos de HPO.

Ejemplo:

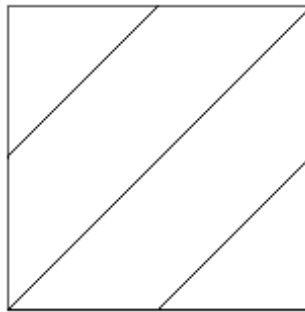


Fig. 3.2. Rotación $R(0.5) = x + 0.5$.

2.5 SISTEMAS CAÓTICOS

Una función de la circunferencia que no es homeomorfismo puede tener una dinámica bastante compleja, llegando al extremo de ser caótica. En esta sección explicaremos lo que se entiende por caos en Sistemas Dinámicos en la circunferencia.

Definición 4.1. Sea f una función de la circunferencia. El sistema dinámico determinado por f es caótico si:

- i)* Tiene puntos periódicos de todos los períodos.
- ii)* Es sensible respecto a condiciones iniciales. Es decir, existen algunos $n \in \mathbf{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que para toda $x \in S$ y todo abierto N tal que $x \in N$, existe $y \in N$, $y \neq x$ con la propiedad que

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon.$$

Proposición 4.2. Si f es una función de la circunferencia caótica y g es topológicamente conjugada a f , entonces g es caótica.

Demostración.

Como se probó anteriormente, si f y g son conjugadas, entonces cada punto periódico de f corresponde con un punto periódico de g . Resta por demostrar que la sensibilidad respecto a condiciones iniciales se preserva por conjugación.

Si f es sensible respecto a condiciones iniciales, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todos $x, y \in S$, $x \neq y$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon.$$

Supongamos que g no es sensible respecto a condiciones iniciales, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe $y_0 \neq x_0$ tal que para toda $n \in \mathbf{N}$

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq \varepsilon.$$

Supongamos que la conjugación de f y g es h . Como h está definida en un compacto y es continua, entonces h es uniformemente continua, es decir, podemos elegir $\bar{\varepsilon}$ de tal manera que si $|x - y| < \varepsilon$, se tenga

$$|h(x) - h(y)| < \bar{\varepsilon}.$$

Si en particular se definen

$$\bar{x} = f^n(x_0),$$

$$\bar{y} = f^n(y_0),$$

con n tal que

$$|g^n h(x) - g^n h(y)| > \bar{\varepsilon},$$

se tiene que como

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq \varepsilon,$$

entonces

$$|h(f^n(x_0)) - h(f^n(y_0))| \leq \bar{\varepsilon},$$

pero como f y g son conjugadas, se obtiene que

$$h(f^n(x_0)) = g^n h(x_0),$$

$$h(f^n(y_0)) = g^n h(y_0),$$

y entonces

$$|g^n h(x_0) - g^n h(y_0)| \leq \bar{\varepsilon},$$

lo cual es una contradicción. ■

Proposición 4.3. Si f es un homeomorfismo de la circunferencia, entonces no es

caótico.

Demostración.

Como veremos en el siguiente capítulo, si $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, la dinámica es periódica y si $f \in C^2$ y $\rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ entonces es topológicamente conjugado a una rotación. ■

Una herramienta importante para detectar dinámicas estables o dinámicas caóticas es el número de Lyapounov.

Más precisamente el número de Lyapounov, mide una de las características que definen el caos: sensibilidad respecto a condiciones iniciales; en este caso, el número de Lyapounov es positivo; por otra parte, si es negativo el sistema tiene por lo menos una órbita atractora.

Así podemos obtener que

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|$$

es decir

$$\begin{aligned}\lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left(\frac{df^N(x)}{dx} \right), \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left(\prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right), \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln(f'(x_i))\end{aligned}$$

de esta forma se tiene lo siguiente.

Definición 4.4. El número de Lyapounov asociado a un sistema dinámico generado por una función de la circunferencia f es

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^i(x)}{dx} \right|.$$

Proposición 4.5. Se sabe que sobre un atractor \mathbf{A} , de f se tiene:

- i) $\lambda(f)$ no depende de la condición inicial x .
- ii) $\lambda(f) > 0$ para las órbitas de f que son sensibles respecto a condiciones iniciales.
- iii) $\lambda(f) < 0$ f tiene órbitas atractoras.

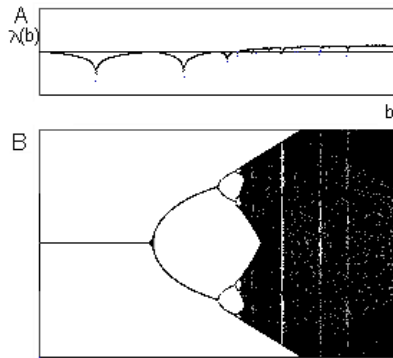


Fig. 3.3 $f(x) = x + b \operatorname{sen} 2\pi x$, con $b \in [0, 1]$.

A) Gráfica del Número de Lyapunov.

B) Diagrama de bifurcación con órbitas atractoras.

Capítulo 3

NÚMEROS Y CONJUNTOS DE ROTACIÓN

En el presente capítulo revisaremos algunos resultados sobre el número y conjunto de rotación. Un concepto de gran importancia es el número de rotación, el cual nos sirve de criterio para la existencia de órbitas periódicas de funciones de la circunferencia. En el presente capítulo revisamos algunos resultados y propiedades del número de rotación.

3.1 ÓRBITAS PERIÓDICAS

Consideremos órbitas periódicas de endomorfismos de la circunferencia.

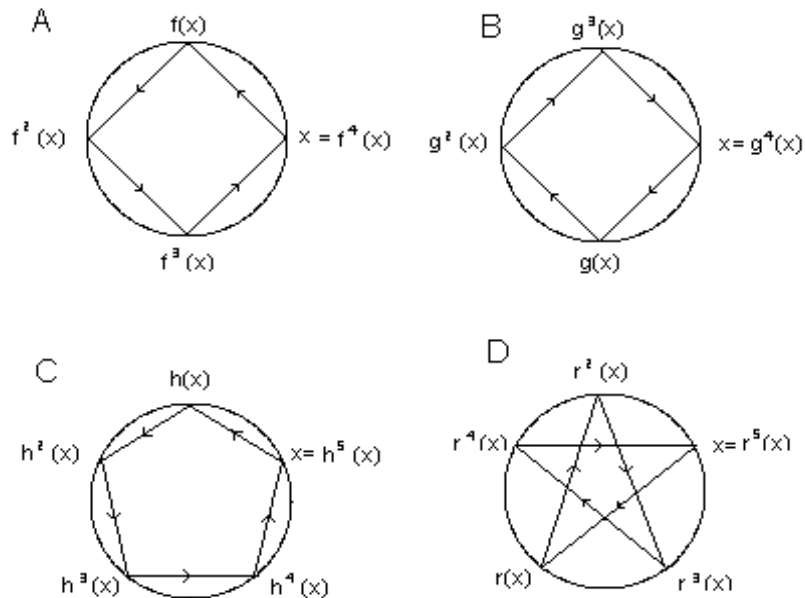


Fig. 1.1 Órbitas periódicas de características :

A) (4, 1); B) (4, 3); C) (5, 1); D) (5, 2).

Observemos la característica de las órbitas periódicas anteriores:

1. El período de la órbita, es decir el entero q tal que $f^q(x) = x$.

En los ejemplos el período de la órbita de f es 4, de la órbita de g es 4, de la órbita de h es 5, de la órbita de r es 5.

2. La envoltencia ó índice de la órbita, es decir el número de vueltas que da la órbita a la circunferencia antes de regresar al punto de partida.

En los ejemplos el índice de la órbita de f es 1, de la órbita de g es 3, de la órbita de h es 1, de la órbita de r es 2.

3.2 NUMEROS Y CONJUNTOS DE ROTACIÓN

Si cualquier función f es una rotación R_θ , los puntos iterados avanzan un mismo ángulo θ en cada iteración. En general, cuando f no es una rotación las iteradas no hacen un avance uniforme en cada iteración. Sin embargo, si existe una órbita periódica de f , tenemos que:

Observación 2.1 Sea f un endomorfismo de la circunferencia entonces el avance promedio de f en cada iteración sobre una órbita cualquiera es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n},$$

donde F es cualquier levantamiento de f y $t \bmod(1)$ es un punto de la órbita en cuestión.

Demostración.

Sea f un endomorfismo de la circunferencia y F un levantamiento de f . α_k es el ángulo que generan $f^{k-1}(x)$, $f^k(x)$ con respecto al centro de la circunferencia,

$$\alpha_k = (F^k(t) - F^{k-1}(t))2\pi,$$

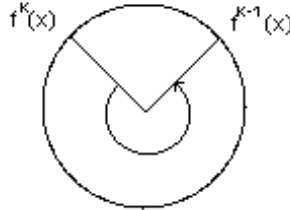


Fig. 2.1 Ángulo que generan $f^{k-1}(x)$ y $f^k(x)$.

por lo que el avance promedio de los primeros n ángulos α'_k s es

$$\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n (F^k(t) - F^{k-1}(t))2\pi}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \frac{\sum_{k=1}^n (F^k(t) - F^{k-1}(t))}{n} \\
&= 2\pi \frac{(F^n(t) - t)}{n}
\end{aligned}$$

entonces el avance promedio de todos los ángulos es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}. \blacksquare$$

Proposición 2.2 Sea f un endomorfismo de la circunferencia y F un levantamiento de f . Si $t \bmod (1)$ es un punto sobre una órbita que converge a una órbita periódica de período q y de índice p entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \frac{p}{q}.$$

Demostración.

Como f tiene una órbita de período q y de índice p , entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$F^q(t) = t + p \text{ para algunos } p, q \in \mathbb{Z}$$

por inducción,

$$F^{nq}(t) = t + np$$

de aquí que,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(t)}{nq} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t + np}{nq} \right) \\
&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{nq} \right) + \frac{p}{q} \\
&= \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

por lo tanto el avance promedio sobre una órbita de período q y de índice p es

$$\frac{p}{q}. \blacksquare$$

El límite de $\frac{F^n(t)}{n}$ no existe en general, aunque f sea continua.

Ejemplos:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \infty$. Sea

$$F(t) = 2t,$$

entonces,

$$F^2(t) = F(F(t)) = 2(2t),$$

$$F^3(t) = F(F^2(t)) = 2(2(2t)),$$

\vdots

$$F^n(t) = F(F^{n-1}(t)) = (2)^nt,$$

de aquí que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^nt}{n} = \infty.$$

Notese que F es un levantamiento de una función f de grado 2.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}$ depende de la condición inicial. Consideremos la función

$$F(t) = t + (0.5)\text{sen}2\pi t$$

hagamos $t = 0$:

$$F(0) = (0.5)\text{sen}2\pi(0) = 0,$$

entonces,

$$F^n(0) = F^{n-1}(F(0)) = F^{n-1}(0),$$

$$= F^{n-2}(F(0)) = F^{n-2}(0),$$

\vdots

$$= F(F(0)) = 0,$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n} = 0;$$

ahora sea $t = 0.25$,

$$F(0.25) = 0.25 + (0.5)\text{sen}2\pi(0.25) = 0.75,$$

$$F^2(0.25) = F(0.75) = 0.75 + (0.5)\text{sen}2\pi(0.75) = 0.25,$$

entonces

$$\begin{aligned} F^n(0.25) &= F^{n-2}(F^2(0.25)) = F^{n-2}(0.25) \\ &= F^{n-4}(F(0.25)) = F^{n-4}(0.25) \\ &\vdots \\ &= F^2(F^2(0.25)) = F^2(0.25) = 0.25, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Proposición 2.3 Si f es un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno, entonces existe $K > 0$ tal que

$$\left| \frac{F^n(t)}{n} \right| < K, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

para todo levantamiento F de f .

Demostración.

Sea F un levantamiento de f , como f tiene grado uno por la observación 2.8 del capítulo 2, $F^n(t) - t$ es de grado cero entonces es acotada, es decir,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t) - t| &< A_1, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |F^2(t) - t| &< A_2, \\ &\vdots \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |F^n(t) - t| &< A_n, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
F(t) &= t + \varphi(t), \\
F^n(t) &= F(F^{n-1}(t)) = F^{n-1}(t) + \varphi(F^{n-1}(t)) \\
&= F(F^{n-2}(t)) + \varphi(F^{n-1}(t)) \\
&= F^{n-2}(t) + \varphi(F^{n-2}(t)) + \varphi(F^{n-1}(t)) \\
&\vdots \\
&= t + \varphi(t) + \dots + \varphi(F^{n-1}(t)),
\end{aligned}$$

tenemos que,

$$\begin{aligned}
|F^n(t) - t| &= |\varphi(t) + \varphi(F(t)) + \dots + \varphi(F^{n-1}(t))| \\
&\leq n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = nA,
\end{aligned}$$

de aquí que,

$$\left| \frac{F^n(t) - t}{n} \right| \leq A$$

concluimos,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F^n(t)}{n} \right| &= \left| \frac{F^n(t) - t + t}{n} \right| \\
&\leq \left| \frac{F^n(t) - t}{n} \right| + \left| \frac{t}{n} \right| \\
&< A + \left| \frac{t}{n} \right|
\end{aligned}$$

es decir, es acotada. ■

Definición 2.4 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno y F un levantamiento de f entonces el número de rotación de F en el punto t es

$$\rho(F, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}$$

Observaciones 2.5 Sean f, g endomorfismos de la circunferencia, de grado uno y F, G levantamientos de f, g respectivamente.

i) $\rho(F, -) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es de grado cero y en general no constante.

ii) $\rho(R_\alpha \circ F, t) = \rho(F, t) + \alpha$, si $\alpha \in \mathbb{Z}$

iii) $\rho(R_\alpha, t) = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$

iv) Si $h \circ g = f \circ h$, con h homeomorfismo de la circunferencia, entonces $\rho(G, t) = \rho(F, H(t))$. En particular si $F = R_\alpha$, se tiene $\rho(G, t) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

i)

$$\begin{aligned} \rho(F, t+1) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t+1)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) + 1}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F^n(t)}{n} + \frac{1}{n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \\ &= \rho(F, t) \end{aligned}$$

ii) Como $(R_p \circ F)(t) = F(t) + p$, entonces

$$\begin{aligned} (R_p \circ F)^n(t) &= (F + p)^n(t) \\ &= (F + p)^{n-1} \circ (F + p)(t) \\ &= (F + p)^{n-1} \circ F(t) + p \\ &= (F + p)^{n-2} \circ (F + p) \circ F(t) + p \\ &= (F + p)^{n-2} \circ F^2(t) + 2p \\ &\quad \vdots \\ &= F^n(t) + np, \end{aligned}$$

así tenemos que,

$$\begin{aligned}
\rho(R_p \circ F, t) &= \limsup \frac{(R_p \circ F)^n(t)}{n} = \limsup \frac{F^n(t) + np}{n} \\
&= \limsup \left(\frac{F^n(t)}{n} + p \right) = \limsup \frac{F^n(t)}{n} + p \\
&= \rho(F, t) + p.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\rho(R_\alpha, t) &= \limsup \frac{R_\alpha^n(t)}{n} = \limsup \frac{t + n\alpha}{n} \\
&= \limsup \frac{t + n\alpha}{n} = \limsup \frac{t}{n} + \alpha \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

iv) Tenemos que,

$$h \circ g = f \circ h,$$

es decir que f, g son topológicamente conjugadas, por la observación 3.2 del capítulo 2, sus levantamientos también lo son, entonces

$$(H \circ G)(t) = (F \circ H)(t),$$

por inducción,

$$(H \circ G^n)(t) = (F^n \circ H)(t).$$

Como H tiene grado uno, sea $\varphi = H - t$ nótese que φ tiene grado cero. Sustituimos H ,

$$((t + \varphi) \circ G^n)(t) = (F^n \circ H)(t),$$

$$G^n(t) + (\varphi \circ G^n)(t) = (F^n \circ H)(t) - H(t) + H(t),$$

$$G^n(t) + (\varphi \circ G^n)(t) - H(t) = (F^n - Id) \circ H(t),$$

$$G^n(t) + (\varphi \circ G^n)(t) - t - \varphi(t) = (F^n - Id) \circ H(t),$$

$$\begin{aligned}
G^n(t) - t + (\varphi \circ G^n)(t) &= (F^n - Id) \circ H(t) + \varphi(t), \\
\frac{G^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi \circ G^n)(t)}{n} &= \frac{((F^n - Id) \circ H)(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n}, \\
\frac{G^n(t)}{n} - \frac{t}{n} + \frac{(\varphi \circ G^n)(t)}{n} &= \frac{((F^n - t) \circ H)(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n},
\end{aligned}$$

si calculamos el límite superior cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{G^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi \circ G^n)(t)}{n} \right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(F^n - t) \circ H(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n} \right), \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{G^n(t) - Id}{n} \right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F^n(H(t)) - H(t)}{n} \right)
\end{aligned}$$

entonces

$$\rho(G, t) = \rho(F, H(t)). \blacksquare$$

Definición 2.6 Si f es un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno y F un levantamiento de f entonces $C(F, t) \subset [0, 1)$ está dado por:

$$C(F) = \{\rho(F, t) : t \in \mathbb{R}\} \text{ mod } (1)$$

Proposición 2.7 Si f es un endomorfismo de la circunferencia de grado uno, entonces

$$C(F_1) = C(F_2) \equiv C(f)$$

para todo F_1, F_2 levantamientos continuos de f .

Demostración.

Sea $x \in C(F_1, t)$ entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
x &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_1^n(t)}{n} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_2^n(t) + nm}{n} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_2^n(t)}{n} + m
\end{aligned}$$

de lo anterior $x \in C(F_2, t)$. ■

Definición 2.8 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno y F un levantamiento de f . El conjunto de rotación de f es el conjunto $C(f)$.

Teorema 2.9 (Newhouse, Palis, Takens e Ito, [5,6]) $C(f)$ es un intervalo cerrado.

Cuando f es un endomorfismo de la circunferencia, monótono, de grado uno, $C(f)$ se reduce a un punto, conocido como el número de rotación de f .

Proposición 2.10 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno y F un levantamiento de f . Entonces existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

es independiente del levantamiento y de t .

Definición 2.11 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente de grado uno y F un levantamiento de f . Entonces

$$\begin{aligned} \rho(F) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \\ \rho(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \pmod{1}. \end{aligned}$$

$\rho(f)$ es llamado el número de rotación de f , $\rho(F)$ el número de rotación del levantamiento y en este caso:

$$C(f) = \{\rho(f)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración de la proposición 2.10.

Primero demostraremos que el límite existe. Por la observación 2.9 del capítulo 2,

tenemos que $M_k - m_k < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
 F^k(t_1) - t_1 - 1 &\leq M_k - 1 < m_k \\
 &\leq F^k(t_2) - t_2 \\
 &\leq M_k < m_k + 1 \\
 &< F^k(t_1) - t_1 + 1
 \end{aligned}$$

$$F^k(t_1) - t_1 - 1 < F^k(t_2) - t_2 < F^k(t_1) - t_1 + 1, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Sea $t_1 = 0$ y $t = F^{k(j-1)}(0)$, sustituimos en la desigualdad anterior,

$$F^k(0) - 1 \leq F^k(F^{k(j-1)}(0)) - F^{k(j-1)}(0) \leq F^k(0) + 1,$$

$$F^k(0) - 1 \leq F^{kj}(0) - F^{k(j-1)}(0) \leq F^k(0) + 1$$

$$\sum_{j=1}^n (F^k(0) - 1) \leq \sum_{j=1}^n (F^{kj}(0) - F^{k(j-1)}(0)) \leq \sum_{j=1}^n (F^k(0) + 1)$$

$$nF^k(0) - n \leq F^{nk}(0) \leq nF^k(0) + n$$

dividimos entre nk ,

$$\frac{F^k(0)}{k} - \frac{1}{k} \leq \frac{F^{nk}(0)}{nk} \leq \frac{F^k(0)}{k} + \frac{1}{k},$$

de lo anterior tenemos,

$$\left| \frac{F^{nk}(0)}{nk} - \frac{F^k(0)}{k} \right| \leq \frac{1}{k},$$

y similarmente

$$\left| \frac{F^{nk}(0)}{nk} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

De las desigualdades anteriores se tiene,

$$\left| \frac{F^k(0)}{k} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{n},$$

Por lo tanto la sucesión $\frac{F^n(0)}{n}$ es de Cauchy. Esto prueba que el límite existe para

$t = 0$.

Sea $t_1 = 0$ en (1) y dividimos entre k

$$\frac{F^k(0)}{k} - \frac{1}{k} < \frac{F^k(t_2)}{k} - \frac{t_2}{k} < \frac{F^k(0)}{k} + \frac{1}{k},$$

esto prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_2)}{n}$ existe.

Ahora demostraremos que es independiente de t .

Si F es un levantamiento de f entonces $\forall n \in \mathbb{Z}$, $F^n(t) - t$ es de grado 0. Sean t_1, t_2 condiciones iniciales tales que $t_1 \neq t_2$, entonces si

$$|t_1 - t_2| < 1,$$

tenemos,

$$|F^n(t_1) - F^n(t_2)| \leq |F^n(t_1) - t_1 - (F^n(t_2) - t_2)| + |t_1 - t_2| < 1 + |t_1 - t_2|,$$

entonces

$$\left| \frac{F^n(t_1) - F^n(t_2)}{n} \right| < \frac{1 + |t_1 - t_2|}{n} < \frac{2}{n},$$

en el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F^n(t_1) - F^n(t_2)}{n} \right| = 0.$$

Y por último de la proposición 4.7 del capítulo 2, se sigue la independencia del levantamiento. ■

El número de rotación es un indicador de la dinámica generada por las funciones de la circunferencia.

Teorema 2.13. Sea f un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente de grado uno. Entonces f tiene una órbita de período q y de índice p , tal que $(p, q) = 1$ si y sólo si $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Demostración:

\Rightarrow) Sea F un levantamiento de f . Como f tiene una órbita de período q y de índice p , existe t tal que

$$F^q(t) = t + p, \text{ para algun } t \in \mathbb{R} \text{ y } p \in \mathbb{Z}$$

entonces,

$$F^{nq}(t) = t + np,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(t)}{qn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t+np}{qn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{qn} + \frac{p}{q} \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

\Leftarrow) Supongamos que f no tiene órbitas de período q y de índice p , es decir, para todo levantamiento F de f , y para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$F^q(t) \neq t + p$$

Ésto significa que dados t y F , existe $\epsilon > 0$, tal que:

$$F^q(t) = t + p \pm \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces,

$$\begin{aligned} F^{nq}(t) &= F^q(F^{(n-1)q}(t)) \\ &= F^{(n-1)q}(t) + p \pm \epsilon \\ &= F^q(F^{(n-2)q}(t)) + p \pm \epsilon \\ &= F^{(n-2)q}(t) + 2(p \pm \epsilon) \\ &= \dots = t + n(p \pm \epsilon). \end{aligned}$$

$$F^{nq}(t) = t + n(p \pm \epsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(t)}{nq} = \frac{t + n(p \pm \epsilon)}{nq} = \frac{p \pm \epsilon}{q},$$

entonces,

$$\rho(f) < \frac{p - \epsilon}{q} \quad \text{ó} \quad \rho(f) > \frac{p + \epsilon}{q}$$

para cualquier $p, q \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\rho(f) \neq \frac{p}{q} \pmod{1}$. ■

Corolario 2.14 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno. f tiene un punto fijo si y sólo si $\rho(f) = 0$.

Para posterior referencia hacemos la siguiente observación.

Proposición 2.15 Sea f un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno y F un levantamiento de f . Entonces

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n(t) - t}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Demostración.

Sean $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ y $t_2 = F^{n(j-1)}(t_0)$ en (1),

$$F^n(t_1) - t_1 - 1 < F^n(F^{k(j-1)}(t_0)) - F^{n(j-1)}(t_0) < F^n(t_1) - t_1 + 1,$$

sumamos t_1 a todos los miembros,

$$F^n(t_1) - 1 < F^n(F^{n(j-1)}(t_0)) - F^{n(j-1)}(t_0) + t_1 < F^n(t_1) + 1,$$

$$\sum_{j=1}^m (F^n(t_1) - 1) < \sum_{j=1}^m (F^{nj}(t_0) - F^{n(j-1)}(t_0) + t_1) < \sum_{j=1}^m (F^n(t_1) + 1),$$

$$m(F^n(t_1) - 1) < F^{mn}(t_0) + mt_1 < m(F^n(t_1) + 1),$$

$$\frac{m(F^n(t_1) - 1)}{mn} < \frac{F^{mn}(t_0) + mt_1}{mn} < \frac{m(F^n(t_1) + 1)}{mn},$$

$$\frac{F^n(t_1) - 1}{n} < \frac{F^{mn}(t_0) + mt_1}{mn} < \frac{F^n(t_1) + 1}{n},$$

$$\left| \frac{F^{mn}(t_0) + mt_1}{mn} - \frac{F^n(t_1)}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \frac{F^{mn}(t_0)}{mn} + \frac{t_1}{n} - \frac{F^n(t_1)}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \frac{F^{mn}(t_0)}{mn} - \frac{F^n(t_1) - t_1}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{mn}(t_0)}{mn} \right) - \frac{F^n(t_1) - t_1}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n(t_1) - t_1}{n} \right| < \frac{1}{n}. \blacksquare$$

Proposición 2.16. Sean f, g endomorfismos de la circunferencia, monótono crecientes, de grado uno y sean F, G levantamientos de f y g respectivamente. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|F - G\|_o = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t) - G(t)| < \delta$$

entonces $|\rho(F) - \rho(G)| < \epsilon$.¹

Demostración.

$$\begin{aligned} |\rho(F) - \rho(G)| &= \left| \rho(F) - \frac{F^n(t)}{n} + \frac{F^n(t)}{n} - \frac{G^n(t)}{n} + \frac{G^n(t)}{n} - \rho(G) \right| \\ &\leq \left| \rho(F) - \frac{F^n(t)}{n} \right| + \left| \frac{F^n(t)}{n} - \frac{G^n(t)}{n} \right| + \left| \frac{G^n(t)}{n} - \rho(G) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |F^n(t) - G^n(t)| + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} |F^n(t) - G^n(t)| \end{aligned}$$

fijamos $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{2}{n} < \frac{\epsilon}{2}$, y elegimos $\delta > 0$, tal que,

$$|F^n(0) - G^n(0)| < \frac{n\epsilon}{2} \text{ si } \|F - G\|_o < \delta$$

entonces

$$|\rho(F) - \rho(G)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \frac{n\epsilon}{2} = \frac{2}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

por lo tanto

$$|\rho(F) - \rho(G)| < \epsilon \text{ si } \|F - G\|_o < \delta. \blacksquare$$

La proposición anterior nos dice que $\rho(F)$ es continua para la C^0 -topología.

Proposición 2.17 (Herman [4]) Sean f, g endomorfismos de la circunferencia. monótonos crecientes, de grado uno y sean F, G sus levantamientos respectivos. Entonces si conmutan, es decir $F \circ G = G \circ F$, se tiene

$$\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G).$$

Demostración.

Sea $\{t_m\}$ una sucesión cualquiera, por la proposición 2.15 tenemos que,

¹Ver Apéndice

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n(t_m) - t_m}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

por lo cual,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_m) - t_m}{n} = \rho(F),$$

entonces,

$$\rho(F \circ G) - \rho(F) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F \circ G)^n(t)}{n} \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \right),$$

como $F \circ G = G \circ F$, tenemos que,

$$(F \circ G)^n(t) = F^n \circ G^n(t) = G^n \circ F^n(t),$$

así que,

$$\begin{aligned} \rho(F \circ G) - \rho(F) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(G^n(F^n(t)))}{n} \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \right) \\ &= \rho(G), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G).$$

Corolario 2.18. Sea f un endomorfismo de la circunferencia. monótono creciente, de grado uno y F levantamiento de f . Entonces

$$\rho(F^n) = n\rho(F)$$

para $n > 0$.

Proposición 2.19. Sea f un hoemomorfismo de la circunferencia. y F levanta-
miento de f . Entonces

$$\rho(F^n) = n\rho(F)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

Sea $n = 1$ y $\{(F^{-1})^n(t)\}$ una sucesión , por la proposición 2.15 tenemos que,

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n((F^{-1})^n(t)) - (F^{-1})^n(t)}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

como $F^n((F^{-1})^n(t)) = t$,

$$\left| \rho(F) - \frac{t - (F^{-1})^n(t)}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

$$|\rho(F) - (-\rho(F^{-1}))| < \frac{1}{n}$$

entonces,

$$\rho(F) + \rho(F^{-1}) = 0$$

por lo tanto,

$$\rho(F) = -\rho(F^{-1})$$

entonces,

$$\rho(F^n) = n\rho(F)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

3.3 NÚMERO DE ROTACIÓN DE LAS ROTACIONES.

En esta sección veremos algunos resultados sobre el número de rotación de las rotaciones, en el caso que éste sea racional o irracional.

Proposición 3.1.(Jácoobi). Sea $R_a = x + a$ una rotación. Si $\rho(R_a) = a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ entonces todas las órbitas de $R_a(x)$ son densas en S^1 (las órbitas son cuasiperiódicas).

Demostración.

Primero demostremos que cualesquiera dos puntos de cualquier órbita de R_a son distintos.

Sea $x \in S^1$, supongamos que dos puntos cualesquiera de cualquier órbita fueran iguales entonces existirían $n, m \in \mathbb{Z}^+$, con $n \neq m$ tal que

$$\begin{aligned}R_a^n(x) &= R_a^m(x) \\R_a^n(e^{ix}) &= R_a^m(e^{ix}) \\e^{i(x+n2\pi a)} &= e^{i(x+m2\pi a)} \\e^{i2\pi a(n-m)} &= 1\end{aligned}$$

entonces $(n - m)a \in \mathbb{Z}$, lo cual contradice el hecho de que $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; por lo tanto

$$n = m.$$

Ahora demostremos que R_a no tiene puntos periódicos.

Sea $x \in S^1$ y supongamos que $x \in R_a$ es un punto periódico entonces existe $n \in \mathbb{Z}$

tal que

$$\begin{aligned} R_a^n(x) &= x \\ R_a^n(e^{ix}) &= e^{ix} \\ e^{i(x+n2\pi a)} &= e^{ix} \\ e^{i2\pi an} &= 0 \end{aligned}$$

entonces $a \in \mathbb{Z}$, lo cual contradice que $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual dice "Todo conjunto de puntos infinito y acotado tiene por lo menos un punto límite". Cualquier conjunto infinito de puntos debe tener un punto límite; como consecuencia del T.B.W. tenemos el criterio de la convergencia de Cauchy, R_a^n es de Cauchy; entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\begin{aligned} |R_a^n(x) - R_a^m(x)| &< \epsilon \\ |R_a^n(e^{ix}) - R_a^m(e^{ix})| &< \epsilon \end{aligned}$$

Sea $k = n - m$

$$\begin{aligned} |R_a^k(e^{ix}) - R_a^0(e^{ix})| &< \epsilon \\ |R_a^k(e^{ix}) - e^{ix}| &< \epsilon \end{aligned}$$

R_a es una simetría en S , además R_a preserva longitudes en S , es decir

$$|R_a^n(x) - R_a^m(x)| < |x - y|$$

entonces $[x, R_a^l(x)]$ es el arco que une a x con $R_a^l(x)$, por lo tanto

$$R_a^l [x, R_a^l(x)] = [R_a^l(x), R_a^{2l}(x)] < \epsilon$$

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} [R_a^{nl}(x), R_a^{(n+1)l}(x)] = S. \blacksquare$$

Proposición 3.2. Sea $R_a = x + a$ una rotación. Si $\rho(R_a) = a \in \mathbb{Q}$ entonces todas las órbitas de $R_a(x)$ tiene característica (p, q) .

Demostración.

Tenemos que $\rho(R_a) = a \in \mathbb{Q}$, entonces $a = \frac{p}{q}$ y

$$R_a(x) = x + \frac{p}{q},$$

si hacemos la q -ésima iterada, tenemos

$$R_a^q(x) = x + p,$$

es decir, que todas las órbitas de R_a tienen característica (p, q) . ■

3.4 TEOREMAS DE CONJUGACIÓN PARA DIFEOMORFISMOS CON NÚMERO DE ROTACIÓN IRRACIONAL.

El número de rotación es invariante bajo conjugación.

Proposición 4.1 Sean f, g endomorfismos de la circunferencia, monótonos, de grado uno y h un endomorfismo de grado uno. Si $h \circ f = g \circ h$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.

Demostración.

Si

$$h \circ f = g \circ h$$

y $n \in \mathbb{N}$ por inducción,

$$h \circ f^n = g^n \circ h,$$

entonces, sean F, G, H levantamiento de f, g, h respectivamente,

$$(H \circ F^n)(t) = (G^n \circ H)(t),$$

Como h tiene grado uno, sea $\varphi = H - t$. Sustituimos

$$((t + \varphi) \circ F^n)(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t) + H(t),$$

$$F^n(t) + (\varphi \circ F^n)(t) - H(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t),$$

$$F^n(t) + (\varphi \circ F^n)(t) - t - \varphi(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t),$$

$$F^n(t) - t + (\varphi \circ F^n)(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t) + \varphi(t),$$

$$\frac{F^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi \circ F^n)(t)}{n} = \frac{(G^n - t) \circ H(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n},$$

si $n \rightarrow \infty$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi \circ F^n)(t)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{G^n(H(t)) - H(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n} \right),$$

tomando la parte fraccionaria, como el número de rotación para estas funciones es independiente de la condición inicial, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F^n(t)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{G^n(t)}{n} \right)$$

$$\rho(f) = \rho(g). \blacksquare$$

El recíproco de la proposición anterior no es válido; dos funciones pueden tener el mismo número de rotación y no ser conjugadas.

Ejemplo:

Consideremos la rotación

$$R_{\frac{1}{2}}(x) = x + \frac{1}{2},$$

la cual tiene $\rho(R_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ y

$$f(x) = x + 0.5 + (0.12)\text{sen}2\pi x,$$

con $t = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 + 0.5 + (0.12)\text{sen}2\pi(0) = 0.5 \\f^2(0) &= f(0.5) = 0.5 + 0.5 + (0.12)\text{sen}2\pi(0.5) = 1.0\end{aligned}$$

como 0 y 1 son el mismo punto $f^2(0) = 0$.

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \frac{1}{2}$$

Entonces su número de rotación es igual pero no son conjugadas. Esto se debe a la proposición 5.2 del capítulo 1.

Para que valga el recíproco de la proposición 4.1 hay que imponer condiciones adicionales.

Teorema 4.2.(Denjoy [3]). Sea f un difeomorfismo de clase C^2 y $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces f es C^0 - conjugada a R_α , es decir, existe un homeomorfismo h tal que $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$.

Teorema 4.3. Si f un endomorfismo de la circunferencia con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se tiene que:

- i)* $\omega(x)$ no depende de x .
- ii)* $\omega(x)$ es el total S ó un conjunto de Cantor.

Demostración

- i)* Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m < n$

$$I = [f^m(x), f^n(x)],$$

entonces, cada intervalo de la sucesión

$$\{f^{-k(m-n)}(I) : k \in \mathbb{N}\},$$

intersecta a su predecesor, de este modo,

$$\cup \{f^{-k(m-n)}(I) : k \in \mathbf{N}\} = S,$$

ó la sucesión converge a un punto fijo de f^{m-n} . Si f^{m-n} tiene un punto fijo, f tiene puntos periódicos y $\rho(f) \in \mathbf{Q}$, lo cual es una contradicción.

Si ahora, tomamos $z \in \omega(x)$ entonces, existe una sucesión

$$\{f^{m_l}(I) : l \in \mathbf{N}\},$$

que tiene como punto límite a z .

Consideremos ahora el conjunto

$$I_l = [f^{m_l}(x), f^{n_l}(x)],$$

y la sucesión asociada

$$\{f^{-k(m_l-n_l)}(I_l) : l \in \mathbf{N}\},$$

esta sucesión cubre a S . Entonces dado cualquier $y \in S$, existe $k = k_l$ tal que

$$y \in f^{-k(m_l-n_l)}(I_l),$$

de aquí que , para cada l ,

$$f^{-k(m_l-n_l)}(y) \in I_l,$$

y como,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l}(x) = z,$$

es decir,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l}(I_l) = z,$$

se tiene que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{-k(m_l - n_l)}(y) = z$$

de esta forma $z \in \omega(y)$. Si hacemos lo análogo para y , obtenemos $\omega(x) = \omega(y)$.

ii) Si tomamos $x \in \omega(x)$, entonces existe una sucesión convergente

$$\{f^{m_l}(I) : l \in \mathbf{N}\},$$

tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l}(x) = x,$$

Como el número de rotación es irracional, entonces f no tiene puntos periódicos, de tal modo que los puntos de

$$\{f^{m_l}(I) : l \in \mathbf{N}\},$$

son todos distintos. entonces x es punto de acumulación y $\omega(x)$ es perfecto. Además la frontera de $\omega(x)$, $\partial(\omega(x))$ es también invariante bajo f . Entonces los puntos de $\partial(\omega(x))$, son límites de sucesiones en $\omega(x)$ y $(\omega(x))^c$. como $\omega(x)$ es un conjunto mínimo no puede contener subconjuntos propios invariantes, entonces si $\partial(\omega(x)) = \emptyset$ tenemos $\omega(x) = S$, y si $\partial(\omega(x)) = \omega(x)$ entonces $\text{int}(\omega(x)) = \emptyset$, de donde $\omega(x)$ es denso en ninguna parte. Por lo tanto es un Cantor. ■

Teorema 4.4 Sea F levantamiento de f , un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno y $\lambda \in \mathbf{R} \mapsto R_\lambda \circ F$ de clase C^ω . Definamos $\rho(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ F)$ entonces

i) $\rho(\lambda + 1) = \rho(\lambda) + 1$.

ii) $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es continua, monótona no decreciente y $\rho(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

iii) Si $\rho(\lambda_0) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ entonces ρ es estrictamente creciente en λ_0 .

iv) Si F es tal que para toda $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z} - \{0\}$ y para toda $\xi \in \mathbf{R}$, se tiene $(R_\xi \circ F)^q \neq R_p$. entonces $\rho^{-1}(\frac{p}{q})$ es un intervalo de interior no vacío.

v) $K = \mathbb{R} - \text{Int}(\rho^{-1}(\mathbb{Q}))$ es un Cantor, es decir un conjunto perfecto, totalmente discontinuo.

Demostración:

i) Tenemos por la observación 2.5 ii),

$$\begin{aligned} \rho(\lambda + 1) &= \rho(R_{\lambda+1} \circ F) \\ &= \rho(R_1 \circ R_\lambda \circ F) \\ &= 1 + \rho(R_\lambda \circ F) \\ &= 1 + \rho(\lambda) \end{aligned}$$

ii) Demostremos que es continua, si

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto (R_\lambda \circ F \in \tilde{D}^0(S))$$

entonces $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\rho(R_\lambda \circ F) = \rho(\lambda)$ es continua por la continuidad de ρ proposición 4.13. Además $\rho(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Demostremos que es monótona no decreciente, sean $\lambda_1 < \lambda_0$ y $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$(R_{\lambda_1} \circ F)(t) < (R_{\lambda_0} \circ F)(t)$$

por la proposición 3.5 del capítulo 2, F es estrictamente creciente, entonces

$$\begin{aligned} F \circ (R_{\lambda_1} \circ F)(t) &< F \circ (R_{\lambda_0} \circ F)(t) \\ R_{\lambda_1} \circ F \circ (R_{\lambda_1} \circ F)(t) &< R_{\lambda_0} \circ F \circ (R_{\lambda_0} \circ F)(t) \\ (R_{\lambda_1} \circ F)^2(t) &< (R_{\lambda_0} \circ F)^2(t) \end{aligned}$$

siguiendo este proceso tenemos

$$(R_{\lambda_1} \circ F)^n(t) < (R_{\lambda_0} \circ F)^n(t)$$

por lo tanto,

$$\frac{(R_{\lambda_1} \circ F)^n(t)}{n} < \frac{(R_{\lambda_0} \circ F)^n(t)}{n}$$

$$\rho(\lambda_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_{\lambda_1} \circ F)^n(t)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_{\lambda_0} \circ F)^n(t)}{n} = \rho(\lambda_2)$$

es decir, ρ es monótona no decreciente.

iii) Por ii) tenemos que ρ es monótona no decreciente. Consideremos λ_0 tal que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ con $\rho(\lambda_0) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2) \in \mathbb{Q}$.

Supongamos que

$$\rho(\lambda_1) \leq \rho(\lambda_0) \leq \rho(\lambda_2)$$

entonces si se diera la igualdad, $\rho(\lambda_1), \rho(\lambda_2) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción; entonces tendríamos que

$$\rho(\lambda_1) < \rho(\lambda_0) < \rho(\lambda_2)$$

es decir, ρ es estrictamente creciente en λ_0 . ■

iv) Supongamos que $\rho^{-1}(\frac{p}{q})$ es un intervalo de interior vacío, entonces existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\rho^{-1}(\frac{p}{q}) = \{s\}$ un solo punto, entonces

$$\rho(s) = \frac{p}{q}$$

lo cual implica por la proposición 4.12 del capítulo 2, que $R_\alpha \circ F$ tiene una órbita periódica de período q y de índice p , es decir

$$(R_s \circ F)^q = R_p$$

lo cual es una contradicción ya que f tiene la propiedad A_0 . Por lo tanto $\rho^{-1}(\frac{p}{q})$ es un intervalo de interior no vacío.

v) Tenemos que \mathbb{K} es cerrado. Demostraremos que el interior de \mathbb{K} es vacío. Dado $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ y V cualquier intervalo abierto que contiene al punto λ_0 , existe $\rho_1 < \rho_2$ tal que $\rho_1, \rho_2 \in \rho(V)$.

Sean $\frac{p}{q} \in (\rho_1, \rho_2)$ entonces $\rho^{-1}(\frac{p}{q}) \in V$ por que ρ es no decreciente y $\rho^{-1}(\frac{p}{q}) \notin \mathbb{K}$ ya que no puede contener un intervalo en el ρ que sea racional. Por lo tanto, el interior de \mathbb{K} es vacío

Demostremos que no existen puntos aislados en \mathbb{K} . En cada intervalo abierto que contiene a λ_0 existe $\rho^{-1}(\frac{p}{q}) \subset V$ intervalo donde ρ es racional y los puntos extremos de $\rho^{-1}(\frac{p}{q})$ son elementos de \mathbb{K} .

De lo anterior tenemos que \mathbb{K} es un conjunto perfecto y totalmente discontinuo. ■

Teorema 4.5. (Arnold [1]) Sea f un difeomorfismo analítico suficientemente próximo a R_α y $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces f es analíticamente conjugada a la rotación R_α .

M. R. Herman descubrió un interesante resultado que complementa los anteriores. Para enunciarlo hacemos una clasificación de los números irracionales.

Observación 4.6. Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, existe una sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $a_i \in \mathbb{Z}^+$ para toda i , tal que α se desarrolla en fracciones continuas de la forma

$$\alpha = a_0 + \left(\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \right)$$

Definición 4.7. Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\alpha = a_0 + \left(\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \right)$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Decimos que α satisface la condición A si se tiene:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{a_i \geq B} \log_{1 \leq i \leq N} (1 + a_i)}{\sum \log_{1 \leq i \leq N} (1 + a_i)} \right) = 0.$$

Sea $A = \{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \alpha \text{ satisface la condición } A\}$. $\mathbb{R} - A$ tiene medida de Lebesgue nula y si $\alpha \in A$ entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C_\epsilon}{q^{2+\epsilon}}$$

Teorema 4.8.(Herman [4]). Si $3 \leq r \leq \omega$ y f un difeomorfismo de clase C^r , con $\rho(F) = \alpha \in A$. Entonces f es $(\forall \beta > 0)$ $C^{r-1-\beta}$ -conjugada a R_α (con la convención $\infty - 2 = \infty$ y $\omega - 2 = \omega$).

Capítulo 4

ESTUDIO DE LA FAMILIA DE FUNCIONES DE ARNOLD.

En este capítulo consideramos la familia clásica de funciones de la circunferencia dependiente de los parámetros a, b .

$$A: S \rightarrow S$$
$$x \mapsto x + a + b \operatorname{sen} 2\pi x,$$

denotaremos el levantamiento de A como \tilde{A} .

Ejemplificaremos resultados teóricos conocidos y realizaremos simulaciones computacionales.

Esta familia ha sido estudiada por varios autores y notablemente por V. I. Arnold, por eso es llamada la Familia de Funciones de Arnold.

Observemos como cambian las gráficas de $A(x)$ en el toro y las de sus respectivos

levantamientos, al cambiar los valores de los parámetros.

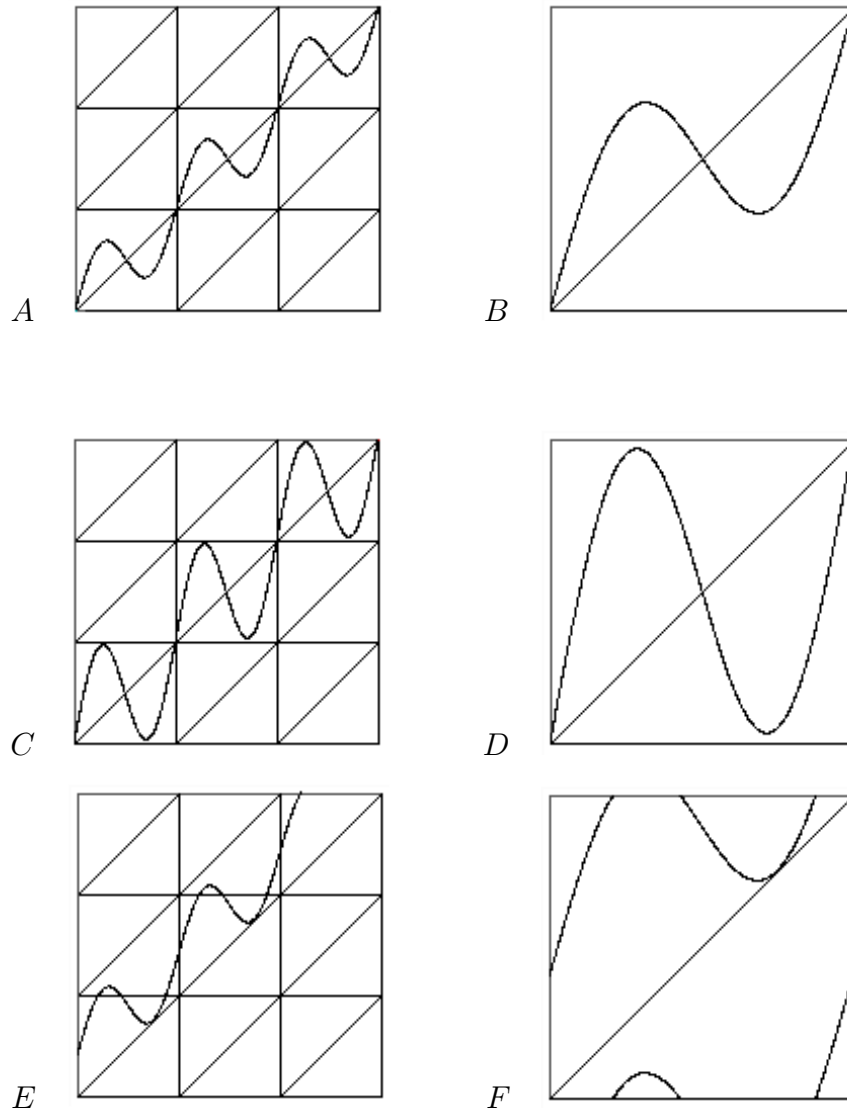


Figura. 1. *Gráficas de Levantamientos y Gráficas en el Toro*
 $A, B) a = 0, b = 0.4$; $C, D) a = 0, b = 0.7$; $E, F) a = 0.4, b = 0.4$.

En el panel anterior vemos que el efecto que causa al variar el parámetro b es aumentar la amplitud y al variar el parámetro a es trasladar verticalmente la gráfica de la función.

4.1 PUNTOS FIJOS.

Cuando la gráfica de $A(x)$ toca a la identidad o bien cuando la gráfica del levantamiento toca alguna de las rectas $b = a + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $A(x)$ tiene puntos fijos, por ejemplo.

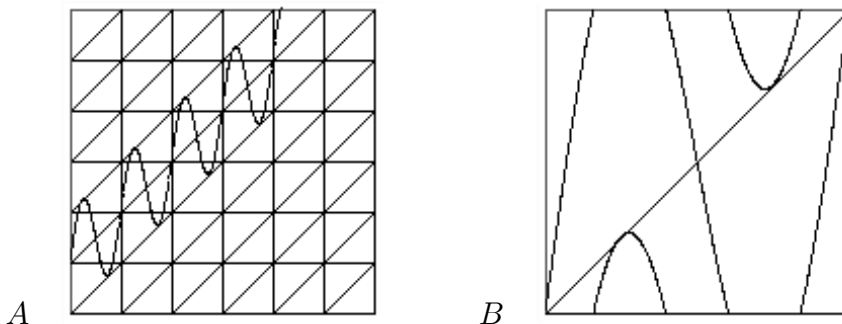


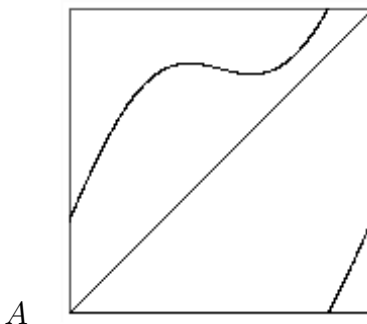
Figura. 1.1. A) *Gráfica del Levantamiento*; B) *Gráfica en el Toro*

$$a = 1.0, b = 1.0$$

Vemos que la gráfica en el toro plano toca a la identidad en cuatro puntos y la del levantamiento, toca en dos puntos a $b = a + 1$, en un punto a $b = a$ y en otro punto a $b = a - 1$ por lo cual $A(x)$ tiene cuatro puntos fijos.

4.1.1 BIFURCACIÓN DE PUNTOS FIJOS.

Si observamos las siguientes figuras,



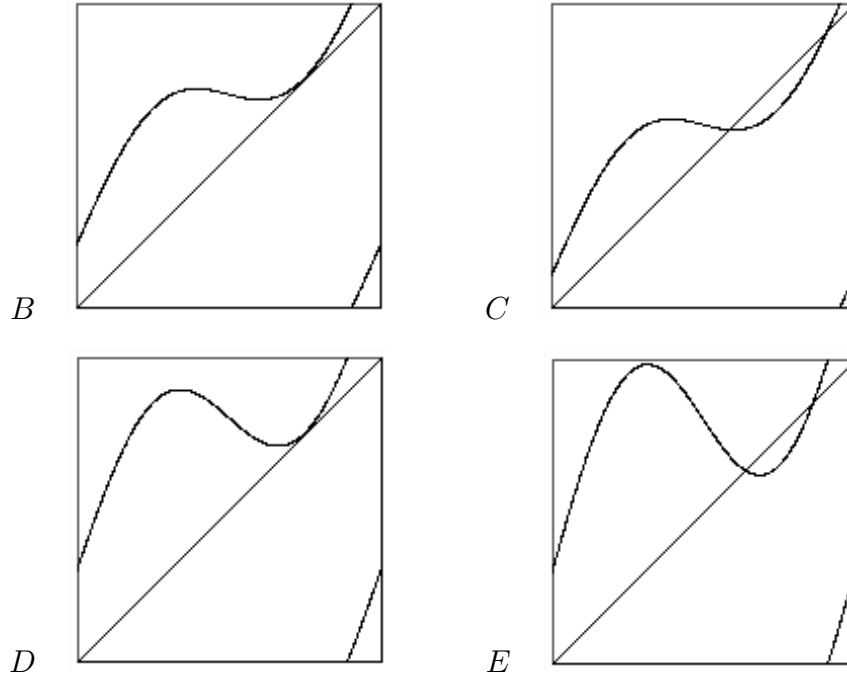


Figura. 1.1.1. Variación del parámetro a en las gráficas B , C y del parámetro b en las gráficas D , E . A) $a = 0.3$, $b = 0.2$; B) $a = 0.2$; C) $a = 0.1$; D) $b = 0.3$ E) $b = 0.4$

notamos que $A(x)$ puede sufrir bifurcaciones silla-nodo cuando incrementamos el parámetro b ó el parámetro a en la recta $b = a$.

Proposición 1.1.1. Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, sobre el conjunto

$$b = |k - a|$$

del espacio de parámetros la función de Arnold sufre una Bifurcación silla-nodo.

Demostración

Veamos en donde se cumplen las condiciones del Teorema 4.1 del capítulo 1, que nos garantiza la bifurcación silla-nodo.

Por demostrar que existe $x_0 \in [0, 1)$ tal que $\tilde{A}(x) = x + k$. Como $b = |k - a|$,

$$\begin{aligned}\frac{|k-a|}{b} &= 1, \\ \frac{k-a}{b} &= \pm 1,\end{aligned}$$

sea x_0 tal que $\text{sen } 2\pi x_0 = \pm 1$, entonces

$$\text{sen } 2\pi x_0 = \frac{k-a}{b}$$

$$a + b \text{sen } 2\pi x = k$$

$$x + a + b \text{sen } 2\pi x = x + k$$

es decir, x_0 es punto fijo de $\tilde{A}(x)$.

Probemos que $\frac{d\tilde{A}(x)}{dx} = 1$ y que $\frac{d^2\tilde{A}(x)}{dx^2} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{A}(x)}{dx} &= 1 + 2\pi b \cos 2\pi x \\ &= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - \text{sen}^2 2\pi x} \\ &= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2} \\ &= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - 1} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{A}(x)}{dx^2} &= -4\pi^2 b \text{sen } 2\pi x \\ &= -4\pi^2 b \left(\frac{k-a}{b}\right) \\ &= -4\pi^2 b (\pm 1) \\ &= \pm 4\pi^2 b \neq 0\end{aligned}$$

Por último verifiquemos que,

$$\frac{\partial \tilde{A}(x)}{\partial b} = \text{sen } 2\pi x_0 = \frac{k-a}{b} = \pm 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial \tilde{A}(x)}{\partial a} = 1 \neq 0. \blacksquare$$

Observemos lo que ocurre al seguir aumentando los valores del parámetro b .

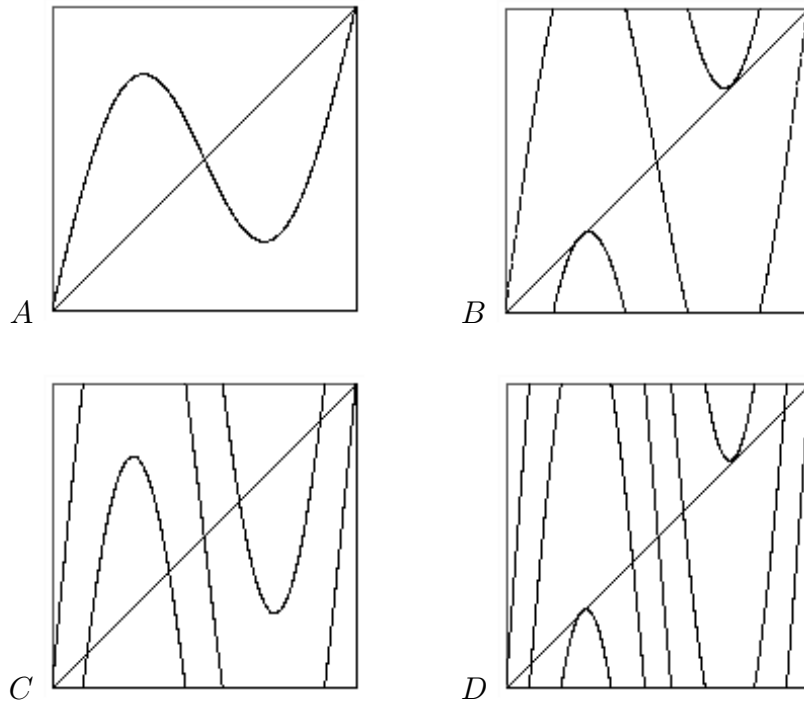
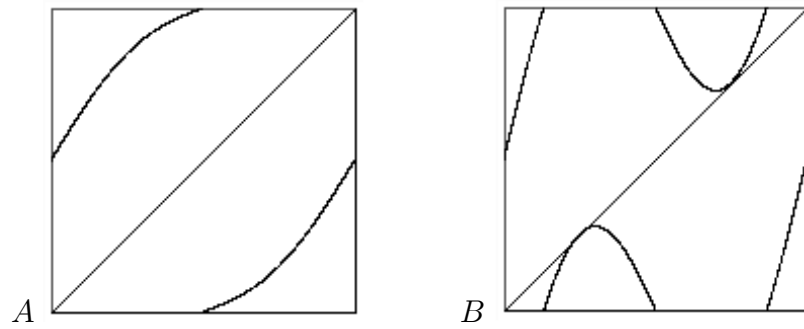


Figura. 1.1.2. $a = 0$ y $A) b = 0.5$; $B) b = 1.0$; $C) b = 1.5$; $D) b = 2.0$.



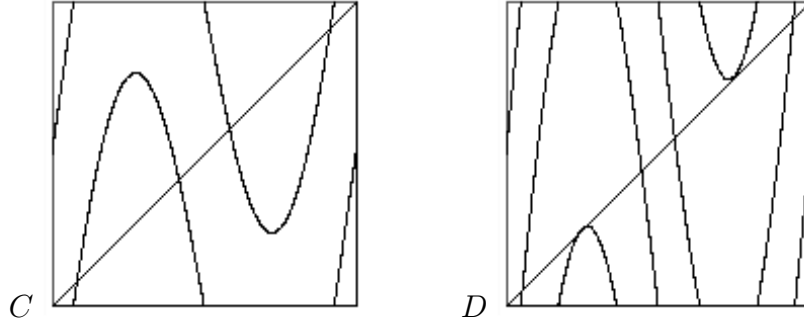


Figura. 1.1.3. $a = 0.5$ y A) $b = 0.1$; B) $b = 0.5$; C) $b = 1.0$; D) $b = 1.5$.

Como observamos al aumentar b se vuelve a dar la bifurcación tangente, si continuamos aumentando b ocurre una sucesión de bifurcaciones silla-nodo.

La siguiente proposición permite producir un diagrama para localizar todas los puntos del plano de parámetros donde se producen este tipo de bifurcaciones de puntos fijos.

Proposición 1.1.2. Sean $k, l \in \mathbb{N}$. Entonces:

- a) Si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, $l - 1 \leq b < a - k + l$ ó $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$, $l - 1 \leq b < -a + k + l - 1$ $A(x)$ tiene $4(l - 1)$ puntos fijos.
- b) Si $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$, $b = a - k + l$ ó $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$, $b = -a + k + l - 1$ $A(x)$ tiene $4l - 3$ puntos fijos.
- c) Si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, $a - k + l < b < -a + k + l - 1$ ó $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$, $-a + k + l - 1 < b < a - k + l$ $A(x)$ tiene $2(2l - 1)$ puntos fijos.
- d) Si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, $b = -a + k + l - 1$ ó $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$, $b = a - k + l$ $A(x)$ tiene $4l - 1$ puntos fijos.
- e) Si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, $-a + k + l - 1 < b \leq l$ ó

$\frac{2k-1}{2} < a \leq k, \quad a - k + l < b \leq l \quad A(x)$ tiene $4l$ puntos fijos.

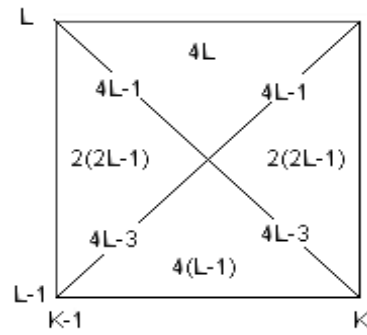


Figura. 1.1.4. Número de puntos fijos en el espacio de parámetros $[k - 1, k] \times [L - 1, L]$,

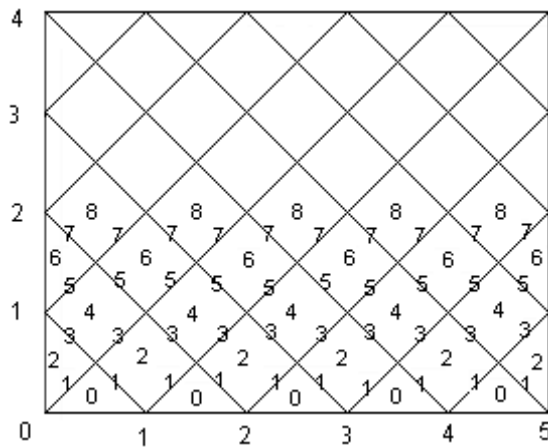


Figura. 1.1.5. Número de puntos fijos en el espacio de parámetros de la función $A(x)$.

Observemos ahora el diagrama de bifurcaciones fijando a y variando b

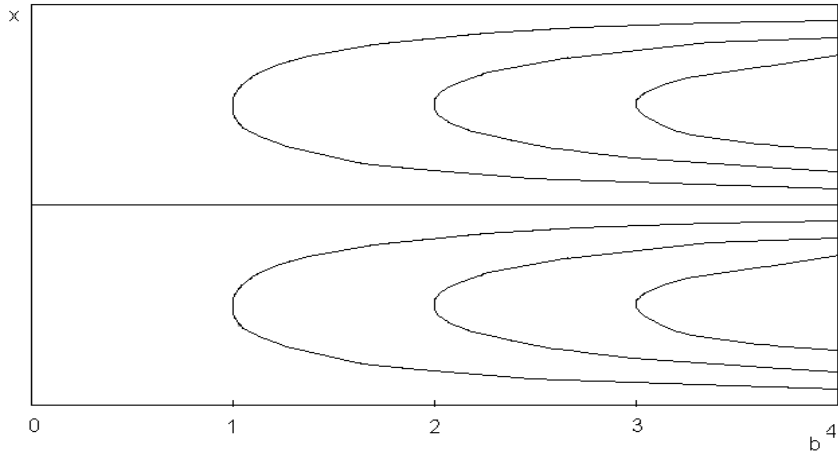


Figura. 1.1.6. *Diagrama de Bifurcaciones con $a = 0.0$ y $b \in [0, 4]$.*

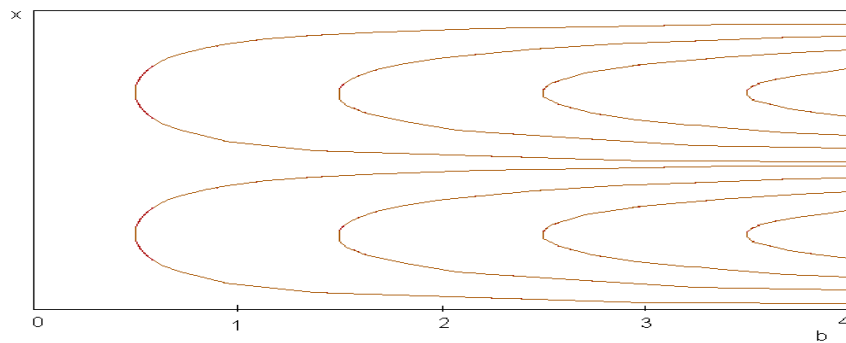


Figura. 1.1.7. *Diagrama de Bifurcaciones con $a = 0.5$ y $b \in [0, 4]$.*

Demostración de la proposición 1.1.2.

Sean $k, l \in \mathbb{N}$. Para k fijo, realizamos inducción sobre l .

Primero sea $l = 1$, la región sería

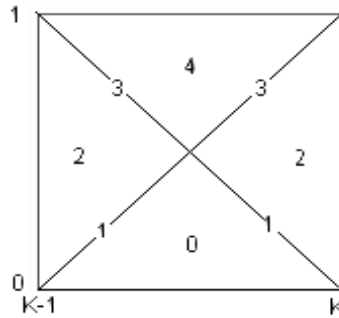


Figura. 1.1.8. Número de puntos fijos en el espacio de parámetros $[k - 1, k] \times [0, 1]$ de la función $A(x)$.

Veamos donde hay puntos fijos, es decir las x tales que $\tilde{A}(x) = x + n$, $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$x + a + b \operatorname{sen} 2\pi x = x + n$$

$$a + b \operatorname{sen} 2\pi x = n$$

$$\operatorname{sen} 2\pi x = \frac{n - a}{b}$$

pero $\operatorname{sen} 2\pi x \leq 1$, entonces

$$\left| \frac{n - a}{b} \right| \leq 1$$

$$|n - a| \leq |b|$$

de lo anterior tenemos que existen puntos fijos en las regiones tales que

$$|n - a| \leq |b|$$

y claramente no hay puntos fijos en donde

$$|n - a| > |b|,$$

es decir si $n = k$,

$$k - a > b$$

y si $n = k - 1$,

$$a - k + 1 > b$$

dado que las rectas que cruzan la región estudiada son $b = k - a$ y $b = a - k + 1$; así tenemos que la región donde no hay puntos fijos es si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, entonces $0 \leq b < a - k + 1$ y si $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ entonces $0 \leq b < k - a$.

Analizando todas las regiones que nos generan estas rectas, por la proposición anterior, la bifurcación silla-nodo ocurre en las rectas, entonces si $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ y $b = a - k + 1$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $b = k - a$ $\tilde{A}(x)$ tiene 1 punto fijo y cuando $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$ y $a - k + 1 < b$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $k - a < b$ $\tilde{A}(x)$ tiene 2 puntos fijos.

Por otro lado si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$ y $b = k - a$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $b = a - k + 1$ en particular $\tilde{A}(x)$ tiene 2 puntos fijos, pero además ocurre otra bifurcación tangente aumentado un punto fijo más distinto de los anteriores, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene ahora 3 puntos fijos.

Por último, si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, $k - a < b$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$, $a - k + 1 < b$, en particular $\tilde{A}(x)$ tiene 2 puntos fijos, pero además ya ocurrió otra bifurcación silla-nodo aumentado 2 puntos fijos más distintos de los anteriores, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene ahora 4 puntos fijos.

Acotando superiormente las regiones obtenemos los resultados.

Supongamos que las afirmaciones de la proposición son ciertas para algún l .

Demostremos para $l + 1$.

Si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$ y $l \leq b$ entonces $-a + k + l - 1 < b$ ó bien si $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $l \leq b$ entonces $a - k + l < b$. Así por hipótesis de inducción $\tilde{A}(x)$ tiene $4l$

puntos fijos, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene $4((l+1) - 1)$ puntos fijos.

Analizando todas las regiones que nos generan estas rectas, por la proposición anterior, la bifurcación silla-nodo ocurre en las rectas, entonces si $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ y $b = a - k + l + 1$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $b = k - a + l$ $\tilde{A}(x)$ tiene 1 punto fijo más, distinto de los que ya tenía, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene $4(l+1) - 3$ y cuando $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$ y $a - k + l + 1 < b$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $k - a + l < b$ $\tilde{A}(x)$ tiene 2 puntos fijos más, distintos de los que ya tenía, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene $2(2(l+1) - 1)$.

Por otro lado si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$ y $b = k - a + l$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ y $b = a - k + l + 1$ en particular $\tilde{A}(x)$ tiene $2(2(l+1) - 1)$ puntos fijos, pero además ocurre otra bifurcación silla-nodo aumentado un punto fijo más distinto de los anteriores, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene ahora $4(l+1) - 1$ puntos fijos.

Por último, si $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$, $k - a + l < b$ ó bien $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$, $a - k + l + 1 < b$, en particular $\tilde{A}(x)$ tiene $2(2(l+1) - 1)$ puntos fijos, pero además ya ocurrió otra bifurcación silla-nodo, aumentado 2 puntos fijos más distintos de los anteriores, es decir $\tilde{A}(x)$ tiene ahora $4(l+1)$ puntos fijos.

Las cotas superiores para las regiones donde coexisten n puntos fijos están dadas por las cotas inferiores donde coexisten $n + 2$ puntos fijos. ■

4.1.2 ESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS.

La proposición anterior nos determina el número de puntos fijos en un espacio de parámetros, pero no el tipo de estabilidad, esta la determina el siguiente resultado.

Proposición 1.2.1. Si a, b satisfacen

$$a - k \leq b, \quad k - a \leq b \quad \text{y} \quad b^2 - (a - k)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$, la función $A(x)$ tiene un punto fijo estable.

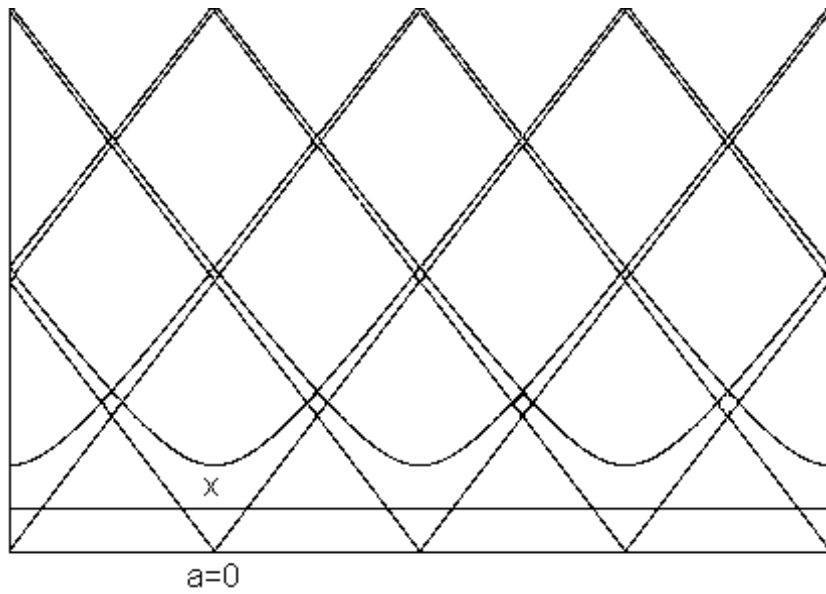


Figura. 1.2.1 *Regiones de puntos fijos estables.*

Como ejemplo tomemos un punto en la región de estabilidad (marcado con una cruz) y observemos la dinámica del correspondiente sistema dinámico.

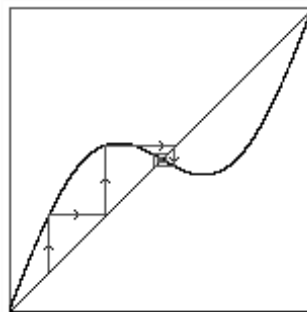


Fig. 1.2.2. $a = 0$, $b = 0.25$, *existencia de un punto fijo estable.*

Demostración de la proposición 1.2.1.

Tenemos que $\tilde{A}(x)$ tiene un punto fijo si

$$\tilde{A}(x) = x + k, \quad k \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$x + a + b \operatorname{sen} 2\pi x = x + k,$$

es decir que,

$$\operatorname{sen} 2\pi x = \frac{k - a}{b},$$

esta condición se cumple si

$$\left| \frac{k - a}{b} \right| \leq 1.$$

Por otro lado tenemos que el punto fijo es estable si

$$\left| \tilde{A}'(x) \right| < 1$$

es decir,

$$|1 + 2\pi b \cos 2\pi x| < 1$$

como,

$$\cos 2\pi x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(2\pi x)},$$

$$\left| 1 \pm 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k - a}{b} \right)^2} \right| < 1,$$

de esta forma, se obtiene

$$0 < b^2 - (a - k)^2 < \frac{1}{\pi^2}. \quad \blacksquare$$

4.2 PUNTOS PERIÓDICOS EN LA REGIÓN DE HOMEOMORFISMOS.

Hasta el momento nos hemos concentrado en puntos fijos, veamos que sucede con los puntos periódicos de período mayor que uno.

Para encontrar puntos periódicos de período q tendríamos que encontrar las órbitas de período q de $A(x)$ o bien los puntos fijos de $A^q(x)$. Por ejemplo, los puntos de período dos serán los puntos fijos de $A^2(x)$ que no son fijos de $A(x)$.

Cuando $b = 0$ y $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ la función $A(x)$ se reduce a una rotación.

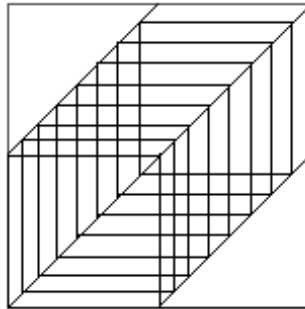


Figura. 2.1. Rotación con $b = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

Todas sus órbitas son periódicas de período dos. Cuando b tiende a cero, $A(x)$ tiende a la rotación y puede considerarse, para b pequeño, como una perturbación no lineal de la familia de rotaciones.

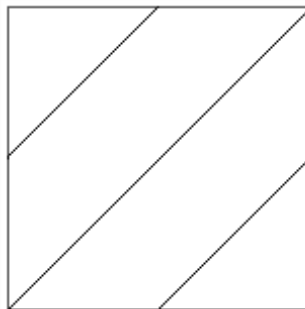


Figura. 2.2. *Perurbación no – lineal de la rotación.*

$$a = \frac{1}{2}, b = 0.03.$$

Observamos que cuando incrementamos b únicamente se preserva una órbita periódica atractora.

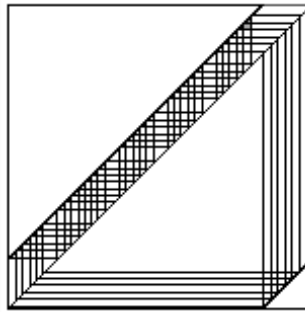


Figura. 2.3. $a = \frac{16}{100}, b = 0.$

Cuando aproximamos a a un número irracional, en este caso a $\frac{1}{2\pi}$, el sistema tiene una órbita de período grande ($q = 100$).

Cuando $b > \frac{1}{2\pi}$ la función $A(x)$ pierde la inyectividad.

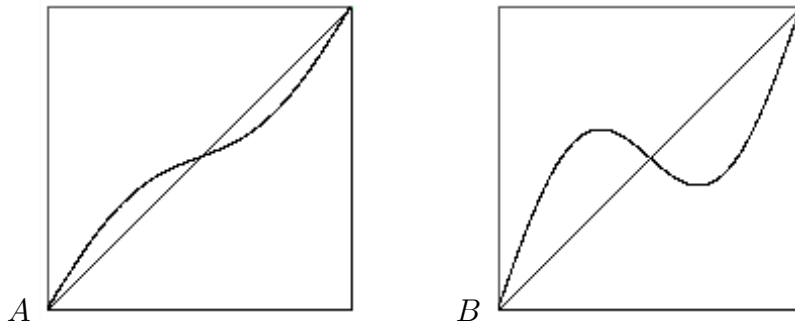


Figura. 2.4. $a = 0$, A) $b = 0.1 < \frac{1}{2\pi}$; B) $b = 0.3 > \frac{1}{2\pi}$.

Observación 2.1. Si $a \geq 0$, $0 < b < \frac{1}{2\pi}$, $A(x)$ es un difeomorfismo.

Demostración.

Como $b < \frac{1}{2\pi}$, entonces $1 < \frac{1}{2\pi b}$, y

$$\cos 2\pi x \neq \frac{1}{2\pi b}$$

ya que $\cos 2\pi x \geq -1$,

$$2\pi b \cos 2\pi x \neq -1$$

$$A'(x) = 1 + 2\pi b \cos 2\pi x \neq 0$$

así por el Teorema de la función Inversa¹ A es un difeomorfismo local, además A es inyectiva globalmente, pues si no lo fuera, por el Teorema de Rolle existiría x^* tal que $A'(x^*) = 0$, lo cual contradice que $A'(x) \neq 0$ para todo x en dicha región, por lo tanto A es un difeomorfismo ■

Teorema 2.2 Si A es un homeomorfismo entonces todas sus órbitas periódicas tienen la misma característica.

Demostración.

Supongamos que A tiene órbitas de característica (p_1, q_1) y (p_2, q_2) , por el Teorema 2.13 del capítulo 3, su número de rotación sería

$$\frac{p_2}{q_2} = \rho(A) = \frac{p_1}{q_1}$$

lo cual contradice que el número de rotación es único. ■

Este Teorema no es válido cuando no es homeomorfismo ya que pueden coexistir

¹Ver Apéndice

atractores de distintos períodos.

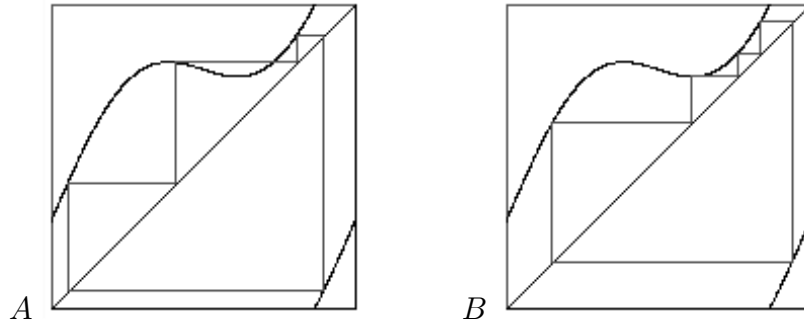


Figura. 2.5. *Coexistencia de atractores con $a = 0.285$, $b = 0.21$.*

A) *Órbita de período cuatro.*

B) *Órbita de período cinco.*

Definición 2.3 La Lengua $\frac{p}{q}$, que denotamos $L_{\frac{p}{q}}$ es el conjunto de puntos (a, b) en el espacio de parámetros tales que el número de rotación de $A(x)$, es igual a $\frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$ $p < q$.

$$L_{\frac{p}{q}} = \left\{ (a, b); \rho(A(x)) = \frac{p}{q} \right\}$$

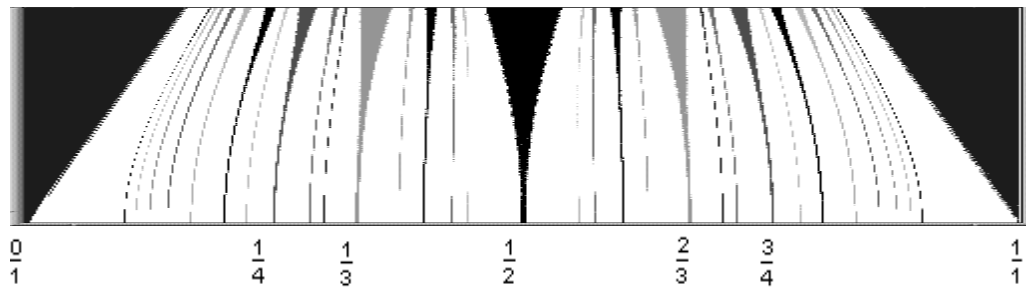


Figura. 2.6. *Lenguas de Arnold.*

Por el Teorema 2.10 del capítulo 2 en cada lengua, $A(x)$ tiene órbitas de característica (p, q) y por el Teorema 2.1.2. del mismo capítulo las lenguas no se intersectan

Ejemplos de la dinámica de $A(x)$ en el toro y en la circunferencia con parámetros (a, b) que pertenecen a distintas L_q .

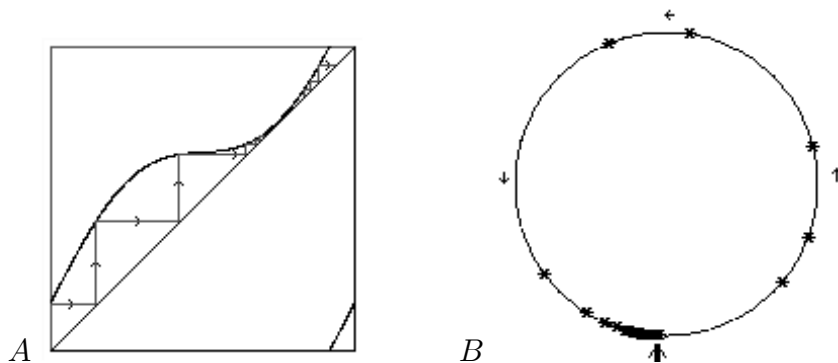
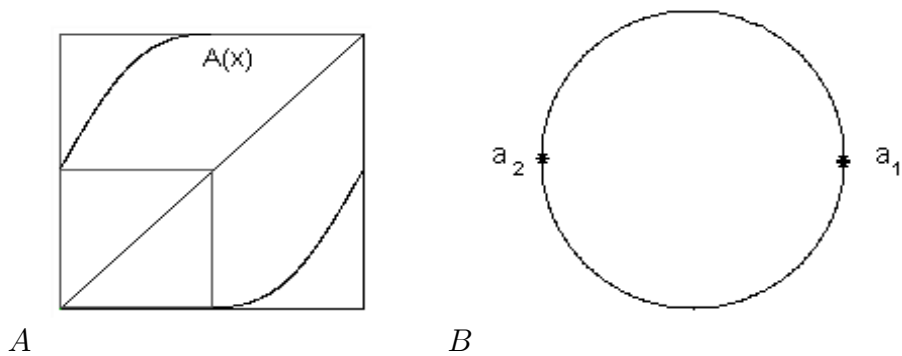


Figura. 2.7 $a = 0.15$, $b = 0.15$, Frontera $L_{\frac{9}{7}}$, fijo semiatractor.

Observemos el comportamiento del sistema dinámico determinado por $A(x)$ cuando escogemos los parámetros a y b en diferentes lenguas. En la lengua $L_{\frac{1}{2}}$ tenemos lo siguiente:



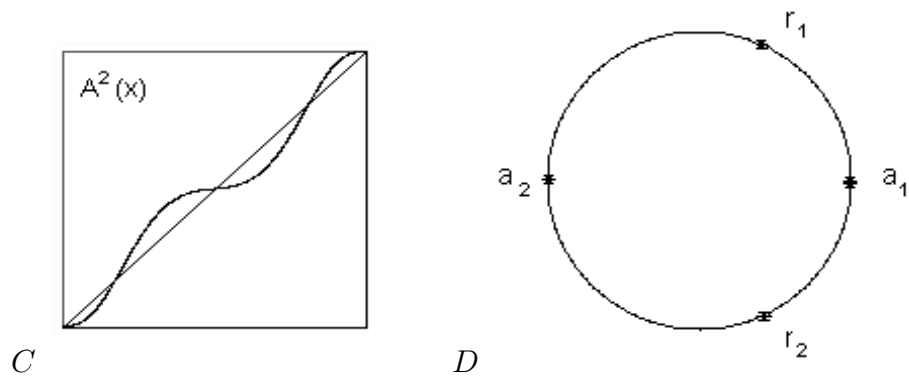
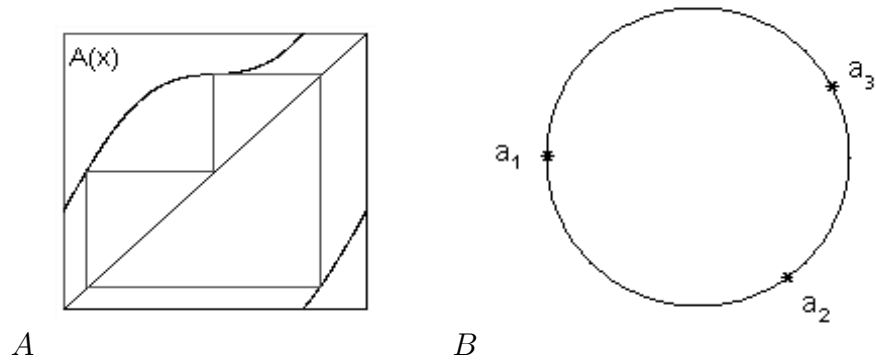


Figura. 2.8. Parámetros $a = 0.5$, $b = 0.15$ en $L_{\frac{1}{2}}$.

- A) Órbita atractora en el Toro;
- B) Puntos de período dos atractores en S ;
- C) Puntos fijos de $A^2(x)$;
- D) Puntos atractores y repulsores en S

En la lengua $L_{\frac{1}{3}}$ tenemos también una órbita atractora y otra repulsora, pero ahora de período tres.



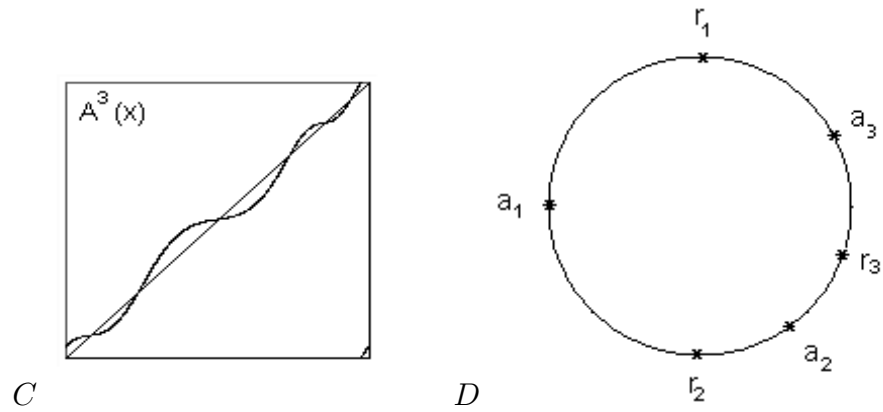


Figura. 2.9. Parámetros $a = 0.35$, $b = 0.15$ en $L_{\frac{1}{3}}$.

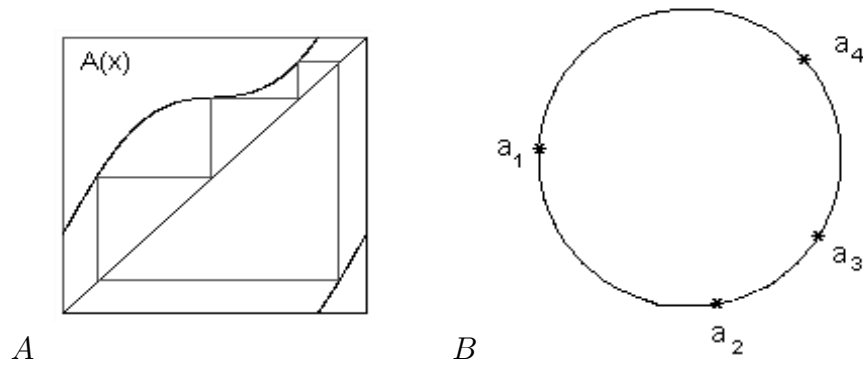
A) Órbita atractora en el Toro;

B) Puntos de período tres atractores en S ;

C) Puntos fijos de $A^3(x)$;

D) Puntos atractores y repulsores en S

Si ahora tomamos parámetros en la lengua $L_{\frac{1}{4}}$ observamos que solo existen dos órbitas periódicas una atractora y otra repulsora.



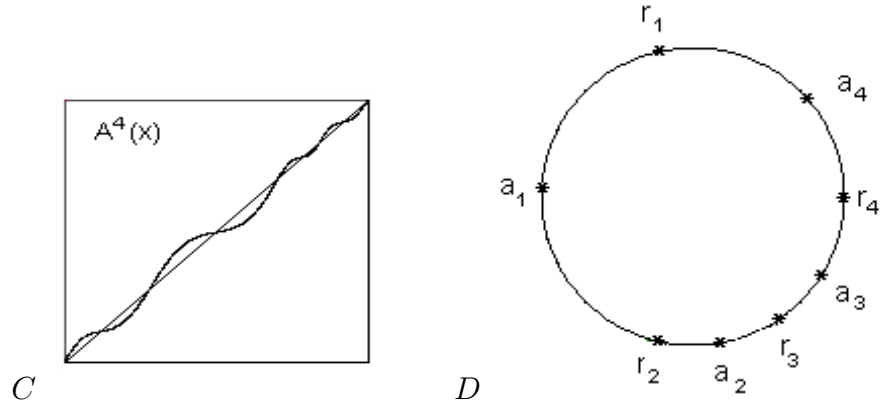


Figura. 2.10. Parámetros $a = 0.28$, $b = 0.15$ en $L_{\frac{1}{4}}$.

A) Órbita atractora en el Toro;

B) Puntos de período cuatro atractores en S ;

C) Puntos fijos de $A^4(x)$;

D) Puntos atractores y repulsores en S

Un Homeomorfismo puede tener múltiples atractores, sin embargo en los ejemplos observamos que coexisten a lo más dos órbitas una repulsora y otra atractora. El siguiente resultado nos confirma la generalidad de este hecho.

Teorema de Jacobson 2.4. Un difeomorfismo de la circunferencia

$$f(x) = x + \phi(x)$$

para el cual la función angular ϕ es un polinomio trigonométrico de grado $s > 0$ tiene a lo más $2s$ órbitas periódicas.

Corolario 2.5. Para todo (a, b) en la zona de difeomorfismos, $A(x)$ tiene a lo más 2 órbitas periódicas.

Este resultado es consistente con la figura 1.1.5. que nos corrobora que en la región de homeomorfismos no puede haber más de dos puntos fijos.

Es importante saber que tipo de estabilidad tiene las órbitas. En los ejemplos anteriores vemos que existen a lo más dos órbitas periódicas y su estabilidad es complementaria.

Hasta el momento hemos visto variando a y b , gráficas de funciones en el toro, sus levantamientos, la dinámica en el círculo y las lenguas de Arnold.

Es interesante también analizar como varia el número de rotación al fijar un parámetro y variar el otro. Fijemos b y variemos a .

Ejemplo:

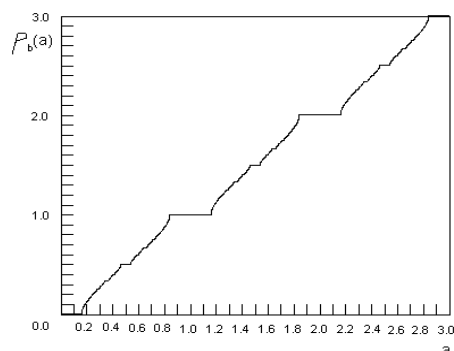


Figura. 2.11. Gráfica del número de rotación variando $a \in [0, 3]$ y fijando $b = 0.159$

A estas gráficas se les llama escaleras del diablo.

Teorema 2.6.[Herman]. Sea A un homeomorfismo, definamos $\rho_b(a) = \rho(\tilde{A})$ entonces

- i) $\rho_b(a + 1) = \rho_b(a) + 1$.
- ii) $\rho_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, monótona no decreciente y $\rho_b(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- iii) Si $\rho_b(a_0) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ entonces ρ_b es estrictamente creciente en a_0 .
- iv) Si $b > 0$, $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q})$ es un intervalo de interior no vacío.
- v) $K = \mathbb{R} - \text{Int}(\rho_b^{-1}(\mathbb{Q}))$ es un Cantor, es decir un conjunto perfecto y totalmente discontinuo.

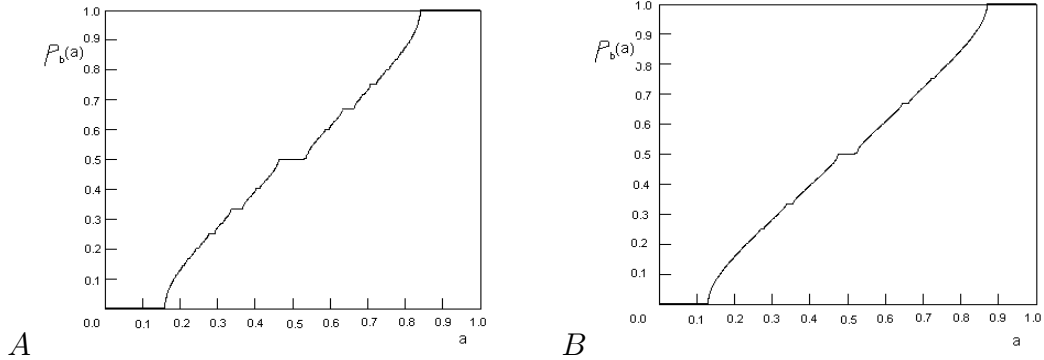
Es importante notar que los cantors \mathbb{K} son $\cup \rho^{-1}(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ unión las fronteras de las $L_{\frac{p}{q}}$.

Del resultado anterior sabemos que $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q})$ es un intervalo de interior no vacío, es decir los cortes transversales de lenguas tienen interior no vacío, una estimación para el ancho de ellas a una altura b esta dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.7. Sea $A(x)$ un homeomorfismo. El ancho de la lengua $L_{\frac{p}{q}}$ a la altura b no excede a Cb^q , donde C es una constante positiva.

Por ejemplo en la figura 1.2.1. y 2.1.6. podemos verificar que este teorema se cumple pues $L_{\frac{1}{7}}$ tiene una anchura igual a Cb con $C = 2$.

Tenemos una cota para la anchura de las lenguas a una altura b , ahora podríamos preguntarnos por la medida de los puntos en una sección transversal que no están en las lenguas. En las siguientes figuras vemos como cambia la medida de esta sección cuando b tiende a cero.



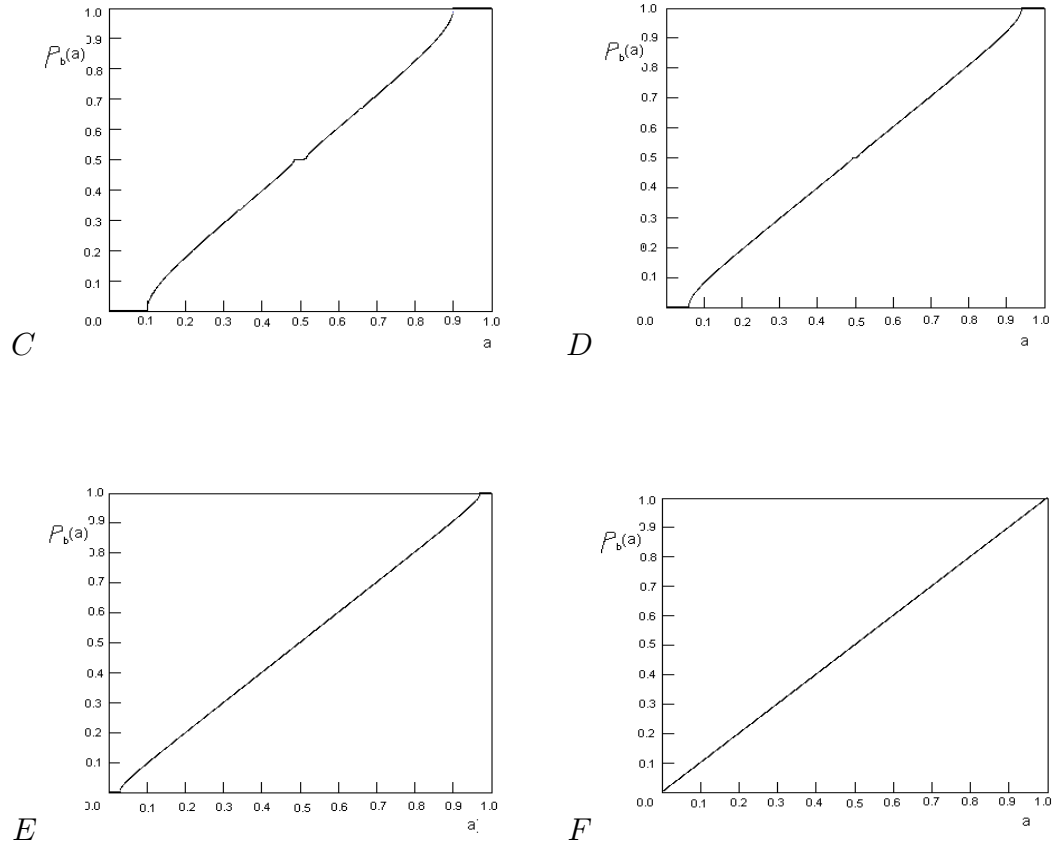


Figura. 2.12. Gráficas de $\rho_b(a)$, variando el parámetro b con $a \in [0, 1]$.

A) $b = 0.159$; B) $b = 0.13$; C) $b = 0.1$; D) $b = 0.06$;

E) $b = 0.03$; F) $b = 0$

Lo que observamos en el panel anterior es que la medida de los puntos que no están en alguna $L_{\frac{p}{q}}$ tiende a uno cuando b tiende a cero, esto ha sido expresado y demostrado por Arnold y Herman en los siguientes resultados

Teorema 2.8. (Arnold [1]) Sea $E_B = \{(a, b) : a \in [0, 1], b \in [0, B], \text{ tal que } A(x) \text{ es analíticamente conjugada a una rotación irracional}\}$ entonces

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{m(E_B)}{B} = 1.$$

Teorema 2.9.

Sea $E^B = \{(a, b) : a \in [0, 1], b \in [B, \frac{1}{2\pi}]\}$, tal que $A(x)$ es analíticamente conjugada a una rotación irracional } entonces

$$\lim_{B \rightarrow \frac{1}{2\pi}} \frac{m(E^B)}{\frac{1}{2\pi} - B} = 0.$$

El siguiente resultado por Herman es también muy interesante

Definición 2.10. Dados $u, v \in [0, 1]$ y b fijo sea

$$M(b, u, v) = m \left\{ a \in [u, v] : \tilde{A}_b \text{ es } C^{r-2} \text{ -conjugada a una traslación irracional} \right\},$$

es decir la medida de Lebesgue del conjunto considerado.

Teorema 2.11. Para cualesquiera $u, v \in [0, 1]$ tales que $\rho_b(u) \neq \rho_b(v)$, se tiene que $M(b, u, v) > 0$.

Herman generaliza el Teorema para conjugaciones no analíticas.

Sea fija $\beta > 0$ pequeña ($\beta \leq 10^{-100}$) y $\beta' > \beta$; $\beta' = \frac{3}{2}\beta$.

Teorema 2.12. Sea $\{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de levantamientos de C^r -difeomorfismos de la circunferencia y $r \geq 2 + 2\beta$. Entonces si $\tilde{A}_n \rightarrow Id$ en la $C^{2n+2\beta}$ -topología, entonces

$$M(\tilde{A}) = m\{a \in [0, 1] : \tilde{A} \text{ es } C^{r-1-\beta^0} \text{ -conjugada a una traslación ergódica}\} \rightarrow 1$$

es decir, la medida de lebesgue del conjunto considerado tiende a 1.

4.3 BIESTABILIDAD

4.3.1 BIESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS

La Lengua de Arnold está definida en términos del número de rotación y pierde sentido cuando $b > \frac{1}{2\pi}$. A continuación veremos una forma natural de entender el concepto de lengua fuera de la zona de homeomorfismos.

Definición 3.1.1. $R_{q:p}$ es la cerradura del conjunto de puntos (a, b) tales que A tiene una órbita periódica atractora de característica (p, q) . Al conjunto $R_{q:p}$ se le llama Lengua Generalizada (o Zona de Resonancia) $q : p$.

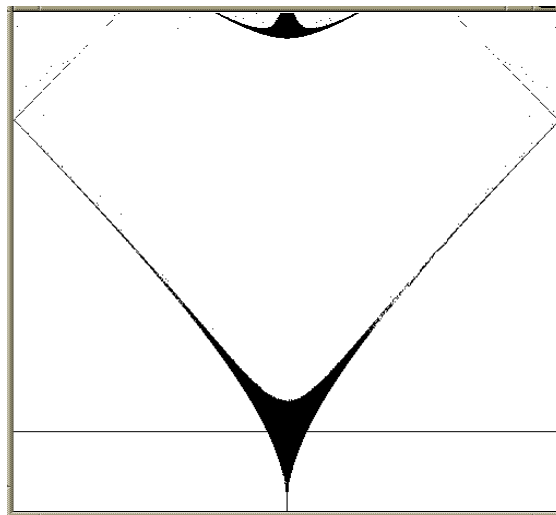


Figura. 3.1.1 Lengua generalizada 2 : 1, $R_{2:1}$

El siguiente resultado es útil para encontrar órbitas periódicas.

Teorema 3.1.2. A tiene una órbita periódica de característica (p, q) si y sólo si existen $x; n, m, \in Z^+$ tales que

$$\begin{aligned} A^m(x) - [A^m(x)] &= A^n(x) - [A^n(x)] \\ m - n &= q \\ [A^m(x)] - [A^n(x)] &= p. \end{aligned}$$

Demostración.

Hagamos $m = q, n = 0,$

$$A^q(t) = t + p,$$

entonces de la condición de lengua generalizada

$$A^q(t) - [A^q(t)] = t - [t] = t + p - [f^q(t)],$$

de aquí que

$$[A^q(t)] - [t] = p.$$

Por otra parte, si existe x y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} A^m(t) - [A^m(t)] &= A^n(t) - [A^n(t)] \\ m - n &= q, \\ [A^m(t)] - [A^n(t)] &= p, \end{aligned}$$

entonces, como $m = q + n,$ se tiene

$$A^m(t) = A^{n+q}(t) = A^n(A^q(t)) = A^n(t) - [A^n(t)] + [A^m(t)],$$

si definimos

$$\begin{aligned} -[A^n(t)] + [A^m(t)] &= p \\ y &= [A^n(t)], \end{aligned}$$

entonces

$$A^q(t) = t + p,$$

es decir la función tiene una órbita atractora de característica (p, q) . ■

En la región donde A no es inyectiva puede darse la coexistencia de atractores.

Proposición 3.1.3. El conjunto

$$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ (a, b) : a - k \leq b, -a + k \leq b, b^2 - (a - k)^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B'$$

determina los valores de parámetros para los cuales la función A tiene dos puntos fijos estables coexistiendo.

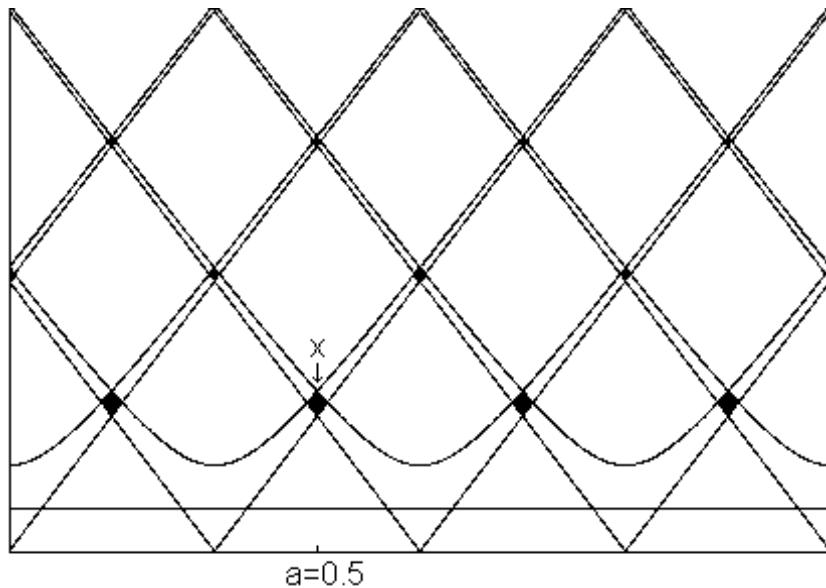


Figura. 3.1.2 *Región de biestabilidad de puntos fijos atractores*

Como ilustración tomemos un par de parámetros en alguna de estas regiones donde

coexisten dos fijos atractores y observemos la gráfica del endomorfismo correspondiente.

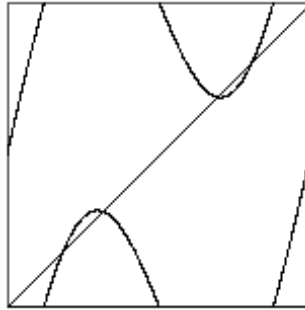


Figura. 3.1.3 $a = 0.5$, $b = 0.52$, *coexistencia de fijos atractores.*

Demostración de la proposición.

Sabemos que para cada $(a, b) \in B'$, existe un punto fijo estable, a saber las soluciones en x de la ecuación:

$$x = \frac{1}{2\pi} \arcsen \left(\frac{k-a}{b} \right)$$

Si $\frac{k-a}{b} > 0$ las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2\pi} \arcsen \left(\frac{k-a}{b} \right) \\ x_2 &= \frac{1}{2} - x_1 \end{aligned}$$

Si $\frac{k-a}{b} < 0$ las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arcsen \left(\frac{k-a}{b} \right) \\ x_2 &= 1 - \frac{1}{2\pi} \arcsen \left(\frac{k-a}{b} \right) \end{aligned}$$

Si $\frac{k-a}{b} = 0$ las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si $k = k_1 = k_2$ para cada una de estas k se obtienen dos soluciones estables. ■

4.3.2 COEXISTENCIA DE ÓRBITAS DE DISTINTOS PERÍODOS .

Otro fenómeno interesante que puede observarse en esta familia es la coexistencia de órbitas periódicas de distintos períodos como por ejemplo:

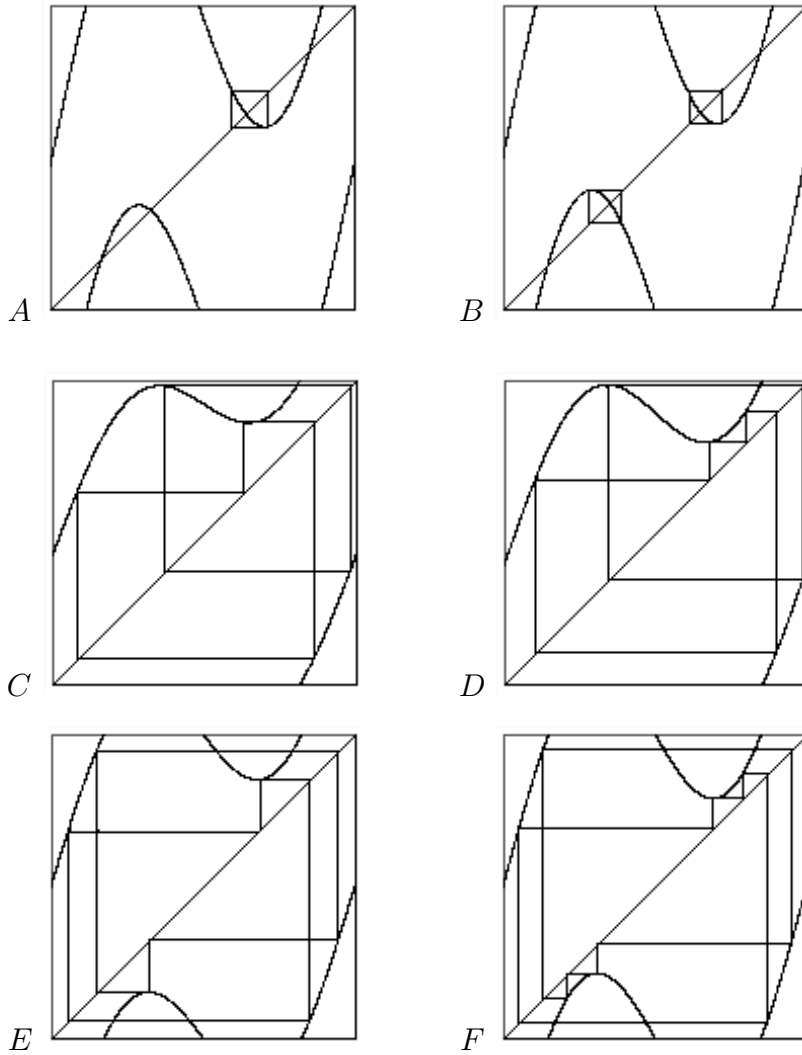


Figura. 3.2.1. *Coexistencia de órbitas atractoras.*

- A) $a = 0.47, b = 0.6$. Órbitas de período uno y dos.
- B) $a = 0.5, b = 0.62$. Órbitas de período dos.
- C) $a = 0.43, b = 0.26$. Órbitas de período dos y tres.
- D) $a = 0.39, b = 0.30$. Órbitas de período dos y cuatro.
- E) $a = 0.5, b = 0.365$. Órbitas de período tres.
- F) $a = 0.5, b = 0.4321$. Órbitas de período cuatro.

En la siguiente Figura se puede observar otras regiones de biestabilidad en el espacio de parámetros.

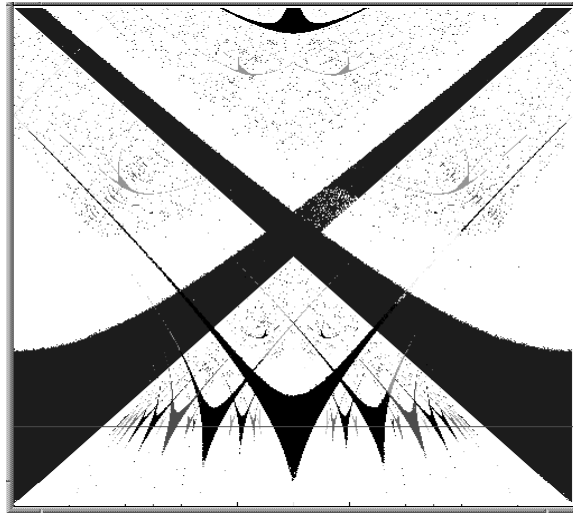


Figura. 3.2.2. *Lenguas generalizadas*

Los experimentos computacionales y el análisis que hemos hecho, nos hacen pensar que: Dadas dos Lenguas de Arnold Generalizadas $R_{q_1:p_1}, R_{q_2:p_2}$.

a).- Para todo $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ se tiene que $R_{q_1:p_1} \cap R_{q_2:p_2} \neq \emptyset$, es decir pueden coexistir atractores periódicos de distintas características.

b).- Sean $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2} \neq \frac{p_3}{q_3}$ entonces $R_{q_1:p_1} \cap R_{q_2:p_2} \cap R_{q_3:p_3} = \emptyset$, es decir más de dos lenguas generalizadas no se intersectan

d).- La frontera de las cuencas de atracción de los atractores periódicos es un Con-

junto de Cantor.

4.4 BIFURCACIONES DE DOBLAMIENTO DE PERÍODO

Fuera de la región de homeomorfismos puede ocurrir otro tipo de bifurcación. En las figuras siguientes vemos gráficas de funciones en la primera y segunda iterada, en la región de estabilidad dada por la proposición, en el límite de esta y fuera de esta.

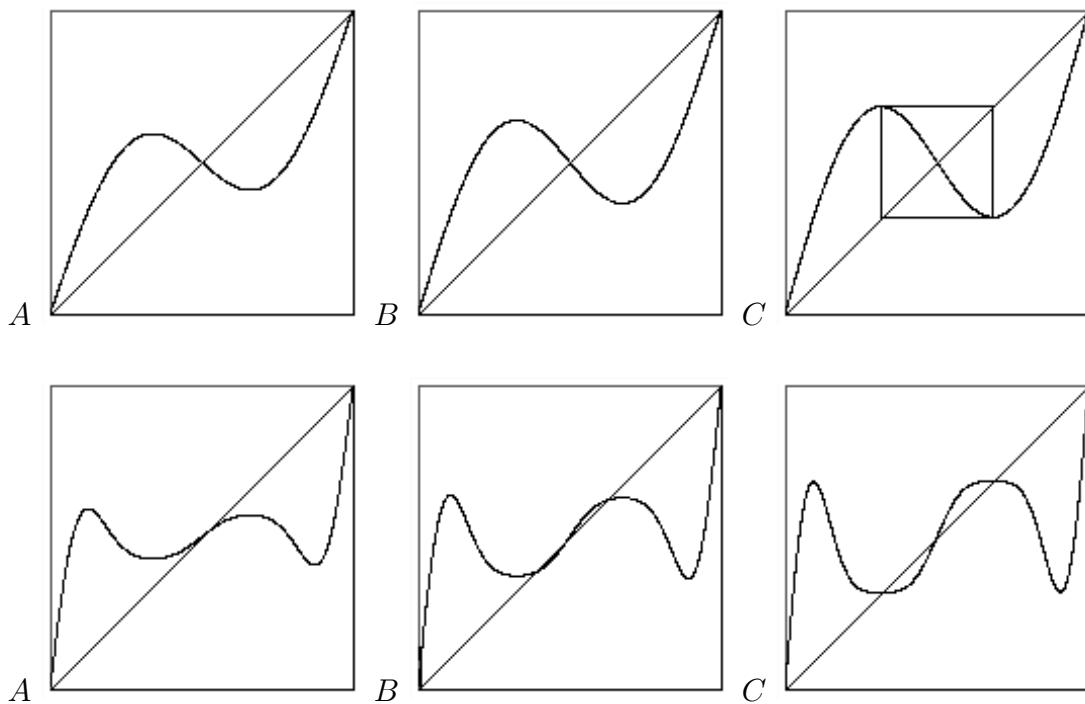


Figura. 4.2 $A^2(x)$ fijando $a = 0$ y variando b : A) $b = 0.3$, B) $b = 0.35$, C) $b = 0.4$.

En la figura 4.2 observamos que el punto fijo atractor se vuelve repulsor, pero aparece una órbita periódica de períodos; ya que anteriormente teníamos que no puede haber

solamente puntos repulsores, por lo cual debe de aparecer algún punto de período mayor que sea atractor,

Lo que acabamos de observar es conocido en $A(x)$ como una bifurcación de doblamiento de período y en $A^2(x)$ una bifurcación de tenedor.

Proposición 4.1. Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, sobre el conjunto

$$b^2 - (k - a)^2 = \frac{1}{\pi^2}$$

del espacio de parámetros la función de Arnold sufre una Bifurcación de Doblamiento de Período.

Demostración.

Veamos en donde se cumplen las condiciones del Teorema 4.2 del capítulo 1 que nos garantiza la bifurcación doblamiento de período.

Por demostrar que existe $x_0 \in [0, 1)$ tal que $\tilde{A}(x_0) = x_0 + k$

$$\tilde{A}(x_0) = x_0 + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0 = x_0 + k$$

$$\operatorname{sen} 2\pi x_0 = \frac{k - a}{b}$$

$$\operatorname{sen}^2 2\pi x_0 = \frac{(k - a)^2}{b^2}$$

Otra condición es que $\frac{d\tilde{A}(x_0)}{dx} = -1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}(x_0)}{dx} &= 1 + 2\pi b \cos 2\pi x_0 \\ &= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 2\pi x_0} \\ &= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

como,

$$b^2 - (k - a)^2 = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\frac{(k-a)^2}{b^2} = 1 - \frac{1}{\pi^2 b^2}$$

entonces,

$$\frac{d\tilde{A}(x_0)}{dx} = -1$$

Por último verifiquemos que $\frac{\partial(\tilde{A}^2(x_0))^0}{\partial b} \neq 0$ y $\frac{\partial(\tilde{A}^2(x_0))^0}{\partial a} \neq 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}^2(x_0) &= x_0 + 2a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0 + b \operatorname{sen} 2\pi (x_0 + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0) \\ (\tilde{A}^2(x_0))' &= 1 + 2\pi b \cos 2\pi x_0 + (1 + 2\pi b \cos 2\pi x_0) 2\pi b \cos 2\pi (x_0 + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{A}^2(x_0))^0}{\partial b} &= 2\pi \cos 2\pi x_0 + (2\pi + 8\pi^2 b \cos 2\pi x_0) \cos 2\pi (x_0 + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0) - \\ &\quad (1 + 2\pi b \cos 2\pi x_0) 2\pi b \operatorname{sen} 2\pi (x_0 + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0) \operatorname{sen} 2\pi x_0 \\ &= 2\pi \cos 2\pi x_0 + (2\pi + 8\pi^2 b \cos 2\pi x_0) \cos 2\pi \left(x_0 + a + b \left(\frac{k-a}{b}\right)\right) + \\ &\quad 2\pi b \operatorname{sen} 2\pi \left(x_0 + a + b \left(\frac{k-a}{b}\right)\right) \operatorname{sen} 2\pi x_0 \\ &= 4\pi \cos 2\pi x_0 + 8\pi^2 b \cos^2 2\pi x_0 + 2\pi b \operatorname{sen}^2 2\pi x_0 \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{\pi b}\right) + 8\pi^2 b \left(\frac{1}{\pi b}\right)^2 + \left(2\pi b - \frac{2}{\pi b}\right) \\ &= \frac{12\pi + 2\pi^2 b^2 - 2}{\pi b} \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{A}^2(x_0))^0}{\partial a} &= -(1 + 2\pi b \cos 2\pi x_0) 4\pi^2 b \operatorname{sen} 2\pi (x_0 + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_0) \\ &= -4\pi^2 b (-1) \operatorname{sen} 2\pi \left(x_0 + a + b \left(\frac{k-a}{b}\right)\right) \\ &= 4\pi^2 b \operatorname{sen} 2\pi x_0 = 4\pi^2 b \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2 b^2}} \neq 0 \blacksquare\end{aligned}$$

Existen otras regiones donde se producen este tipo de bifurcaciones pero no son ac-

cesibles analíticamente.

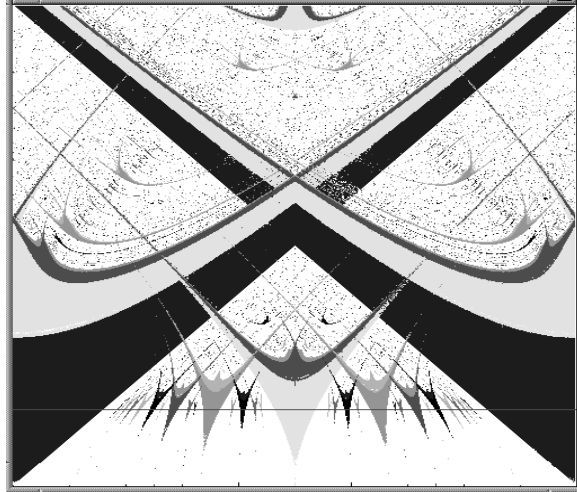


Figura. 4.3. *Lenguas de Arnold en el espacio de parámetros $[0, 1] \times [0, 1]$.*

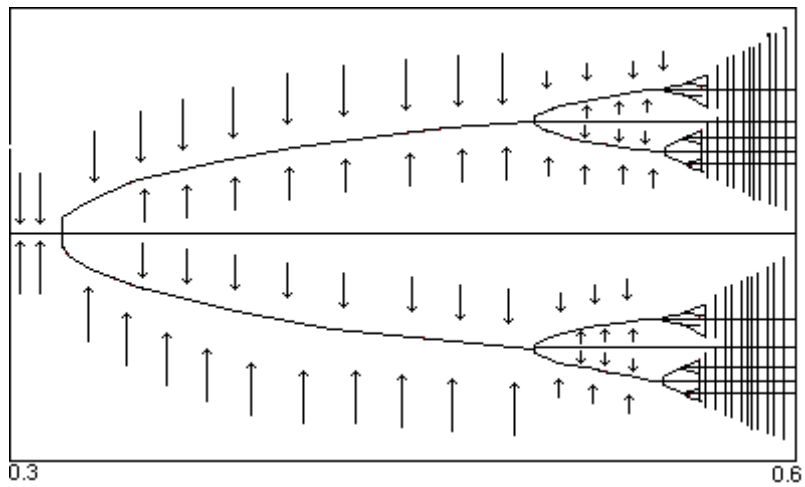


Figura. 4.4 *Diagrama de bifurcaciones $a = 0$, $b \in (0.3, 0.6)$*

Observamos en el diagrama de bifurcaciones que si incrementamos b se da una cascada

de bifurcaciones de boblamiento de período, por ejemplo cuando se inestabiliza la de período dos aparece una de período cuatro.

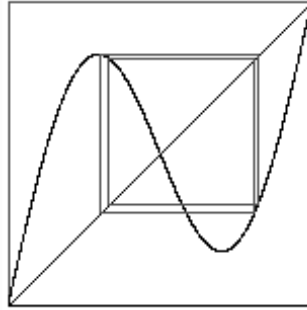


Figura. 4.5. $a = 0$, $b = 0.55$, *Órbita de período 4.*

EPÍLOGO

DISCUSIÓN Y COMENTARIOS FINALES.

En este trabajo se ha hecho una recopilación de resultados sobre la dinámica de funciones de la circunferencia que aparecen dispersos en la literatura. Como ejemplo se han analizado varios aspectos interesantes de la dinámica de la familia Clásica, también llamada Familia de Arnold. Se exponen resultados teóricos así como resultados computacionales y gráficas obtenidos usando el sistema de software CIRCULO desarrollado por Carrillo, García y Nava en el Laboratorio de Dinámica no-lineal de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

Se introdujo el concepto de *envolvencia de una órbita periódica* en un semisistema dinámico en la circunferencia, noción que, hasta donde nosotros sabemos no aparece en la literatura del tema y resulta fundamental para describir la dinámica de estos sistemas así como para poder dar una definición apropiada del concepto de *lengua generalizada de Arnold* en el espacio de parámetros.

APÉNDICE

1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS.

Para algunos detalles en el transcurso del trabajo nos será útil recordar algunos aspectos de espacio de funciones y de topología. Recopilaremos algunas definiciones y resultados (sin demostraciones).

Definición

a). Una topología en un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau$
3. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \tau \Rightarrow \cup_{\alpha \in A} A_\alpha \in \tau$

b). Si τ es una topología en X , a la pareja (X, τ) le llamamos espacio topológico y a los elementos que pertenecen a τ conjuntos abiertos en X .

Ejemplos:

Topología usual :

$$\tau_{\mathbb{R}} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq \mathbb{R} / E \text{ es unión de intervalos abiertos}\}$$

$$\tau_{\mathbb{R}^2} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq \mathbb{R}^2 / E \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. La pareja (Y, τ_g) donde τ_g es la topología fuerte inducida por (X, τ) y g , es llamado Espacio Cociente y a τ_g la llamaremos la topología cociente en Y inducida por (X, τ) y g . Es decir

$$\tau_g = \{A \subseteq Y : g^{-1}(A) \in \tau\}$$

Teorema 1. Sean X y Y espacios topológicos y $g : X \rightarrow Y$ función suprayectiva y continua. Si g es abierta o cerrada entonces la topología de Y coincide con la topología cociente.

Teorema 2 Si Y posee la topología cociente inducida por una función continua y suprayectiva $g : X \rightarrow Y$ Entonces existe un homeomorfismo h de Y en el espacio de partición $D = \{g^{-1}(y) : y \in Y\}$

Definición. Como espacio topológico S es equivalente en el plano complejo (C) a

$$S = \{e^{(2\pi ix)} / x \in [0, 1)\}.$$

Sean $([0, 1], T_{\mathbb{R}}), (S, T_{\mathbb{R}^2})$ espacios topológicos.

La función

$$g : [0, 1] \rightarrow S$$

$$g(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es supreyectiva continua y cerrada. Entonces por el Teorema 1 $(S, T_{\mathbb{R}^2})$ es un espacio cociente.

Definición. El Toro de dimensión 1 es el espacio cociente $T^1 = [0, 1]/\sim$, donde la relación de equivalencia es $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$.

Proposición. T^1 es homeomorfo a S .

Demostración.

Con las topologías usuales de estos espacios, la siguiente función es un homeomorfismo

$$g : T^1 \rightarrow S$$

$$g([x]) = e^{2\pi ix}$$

Definición. El toro de dimensión 2 es el espacio cociente $T^2 = [0, 1] \times [0, 1]/\sim$, donde $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $x - x', y - y' \in \mathbb{Z}$.

El espacio cociente $(S \times S, T_f)$ donde $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S \times S$ es la función dada por $f(x, y) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x), (\cos 2\pi y, \operatorname{sen} 2\pi y)$.

La topología producto en $T_{\mathbb{R}^2}$ coincide con la topología en $T_{\mathbb{R}^2}$.

Proposición. T^2 es homeomorfo a $S \times S$.

Demostración. Con las topologías usuales de los espacios T^2 y $S \times S$, se tiene que si $[x,y]$ es un representante de cada clase de equivalencia de T^2 , la función

$$g : T^2 \rightarrow S \times S$$

es un homeomorfismo de estos espacios.

2. ESPACIO DE FUNCIONES

Definición. Sean X, Y espacios topológicos. El conjunto $C^0(X, Y)$ es la colección de todas las funciones continuas de X a Y .

Topológicamente $C^0(X, Y)$ se define con la ε -bola alrededor de f , como sigue:

$$\mathbf{B}_\varepsilon^0(f) = \{g : X \rightarrow Y \text{ continuas} : \forall x \in X \quad \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\}$$

El conjunto de las ε -bolas ($\varepsilon > 0$) alrededor de las funciones $f : X \rightarrow Y$ forman una base para norma uniforme o la C^0 -topología. Esta es justamente la Topología de la Convergencia Uniforme en X .

Para definir las topologías de orden más grande, revisaremos algo de cálculo.

Definición. f es una función de clase C^r , si existe todas las derivadas

$C^r(X, Y)$ es la colección de todas las funciones de clase C^r de X a Y

Topológicamente las $C^r - \varepsilon$ -bolas alrededor de $f \in C^r(X, Y)$ son

$$\mathbf{B}_\varepsilon^r(f) = \{g \in C^r(X, Y) : \forall k \leq r \text{ y } \forall x \in X \quad \|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}g(x)\| < \varepsilon\}$$

esta definición es equivalente a que para toda $k \leq r$ $D^{(k)}g \in \mathbf{B}_\varepsilon^0(D^{(k)}f)$

Las $C^r - \varepsilon$ -bolas ($\varepsilon > 0$) alrededor de funciones de clase C^r forman una base para la topología en $C^r(X, Y)$, llamada la C^r -topología.

Definición. Sea $f : X \rightarrow Y$. La función $f(x)$ es un homeomorfismo si f es una

función biyectiva, continua y $f^{-1}(x)$ también es continua.

Definición. Sea $f : X \rightarrow Y$. La función $f(x)$ es un C^r -difeomorfismo, si $f(x)$, $f^{-1}(x)$ son C^r -homeomorfismos.

$Diff^r(X, Y)$ es la colección de todos los difeomorfismos de clase C^r de X a Y

Teorema. (Valor Medio) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 , entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema. (Valor Intermedio) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^0 . Si $f(a) = u$ y $f(b) = v$, entonces para toda z entre u y v existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$.

Teorema (de la Función Inversa) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ y $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) \neq 0$. Entonces existe U vecindad de x , V vecindad de $f(x)$ y una función $g : V \rightarrow U$ de clase C^1 tales que

$$f \circ g = Id_V$$

$$g \circ f = Id_U.$$

Teorema. (de la Función Implícita) Si f es una función de clase C^1 y

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$,

entonces existen intervalos abiertos I alrededor de x_0 y J alrededor de y_0 , y una función $p : I \rightarrow J$ de clase C^1 tal que $p(x_0) = y_0$ y $f(x, p(x)) = 0$, para toda $x \in I$.

Bibliografía

- [1] Arnold , V.I. Small denominators I. On the mappings on the circumference onto itself. Am. Math. Soc. 2a Ser 46, 213 (1965).
- [2] D.K. Arrowsmith, C.M. Place. An introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1990, U.K.
- [3] Block L. S. , Coppel W. A. Dynamics in One dimension. Springer Verlag.
- [4] M. R: Herman. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, Springer Lecture Notes in Math., n°597. Berlin 1977, pag. 271-293.

M. R: Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Publ. Math. I.H.E.S., 49 (1979), pag. 1-233.
- [5] Ito R., Rotation sets are closed. Math Proc. Camb Philos. Soc 89. 107-111 (1981)
- [6] Newhouse S., Palis J., and Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. publ. I.H.E.S. 57 5-71.
- [7] R.L. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley. 1986. USA.
- [8] A. Guzman. Dinámica generada por homeomorfismos del círculo. Tesis profesional. 1988 UNAM.

- [9] J.R. Guzman. Sistemas Dinámicos en la Circunferencia: Aplicaciones a Teoría de Números y Modelación de Neuronas. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. 1994 UNAM.
- [10] Zbigniew Nitecki. Differentiable Dynamics. Introduction to the Orbits Structure of Diffeomorphism. The M.I.T. Press. 1971.
- [11] Palis J., W. Melo (1982) Geometric Theory of Dynamical Systems, an Introduction. Springer, Berlin New York.