# 1. TEORIA DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINAMICOS

El Segundo Método de Lyapunov (caso autónomo)

Este reporte presenta el método directo de Lyapunov para determinar la estabilidad o estabilidad asintótica de un estado de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo. El presente trabajo pretende ser una introducción al extenso tema de la teoría de la estabilidad, de gran actualidad e importancia hoy en día, a pesar de haber transcurrido casi un siglo en que fuera presentada en términos precisos por el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918) en su famosa tesis doctoral publicada por primera vez en 1892, la cual no recibió la debida atención alrededor de 25 años.

## 1.1. INTRODUCCION

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad están presentes en la vida cotidiana. Es de uso común decir: el franco suizo es estable, el peso mexicano es inestable, el estado de salud de fulano es estable, etc. Incluso, en muchas áreas del conocimiento, se maneja dicho concepto de manera intuitiva, es común oír a un ingeniero decir que una estructura es estable o no lo es, un químico dice que una reacción se ha estabilizado, un economista suele decir que el precio de determinado producto es estable, un físico diría que el movimiento de una partícula es estable , etc. Pero un concepto que aparece frecuentemente en todas las ciencias, merece ser definido en términos precisos.

No fue sino hasta 1892 cuando Lyapunov formuló de manera precisa el concepto de estabilidad. Y ese ha sido el punto de partida para establecer otras variantes de tan importante concepto (¡Y son bastantes!.) De hecho, no hay concepto en la Matemática que admita tantas acepciones distintas como el de estabilidad y por este motivo, cuando se habla de estabilidad, se debe aclarar a cual de ellas se refiere, para evitar ambigüedades.

A manera de ejemplo, consideremos el movimiento de una canica que se mueve bajo la acción de la gravedad sobre diferentes superficies como las mostradas en la figura 1.1. En los cuatro casos, la canica se encuentra en una posición de equilibrio, pero ¿cuál será el movimiento que ejecuta la canica si la sacamos "un poco" de su estado de equilibrio y la soltamos? En los casos $(a)$ y $(b)$ , la canica se mantendrá cerca de su posición de equilibrio oscilando alrededor de ésta, pero además, debido a la fricción, la canica tenderá a ocupar dicha posición de equilibrio. En ambos casos, el equilibrio se dice ser asintóticamente estable, la única diferencia que existe en estos dos casos, es que la "perturbación" que le hagamos a la canica para sacarla de su estado de equilibrio debe ser mucho menor para el caso $(b)$ . Si ahora nos fijamos en la canica del inciso $(c)$ , cualquier "perturbación" por pequeña que ésta sea, la canica se alejará de su posición de equilibrio; en este caso el equilibrio es inestable.

Finalmente, en $(d)$ , para cualquier "perturbación" pequeña de la canica, ésta permanecerá "cerca" de la posición de equilibrio pero no tenderá a acercarse a dicha posición de equilibrio y estaremos en presencia de estabilidad (no asintótica).

Como un segundo ejemplo considérese una regla clavada en la pared en las posiciones de equilibrio mostradas en la figura 1.2, ahí se indican los tres tipos diferentes

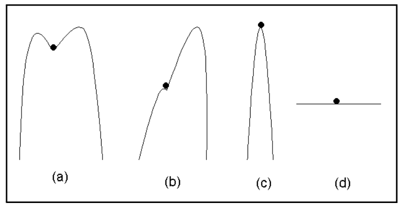


Figura 1.1: (a) y (b) Asintóticamente estables, (c) Inestable, (d) Estable (no asintóticamente).

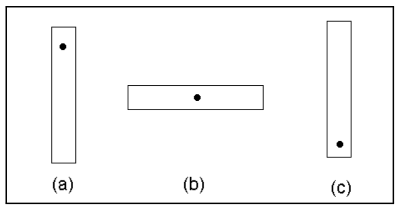


Figura 1.2: (a) Estabilidad asintótica. (b) Estabilidad (no asintótica). (c) Inestabilidad.

de posiciones de equilibrio.

## 1.2. NOTACION

i) $B_\rho$ es la bola de $\mathsf{R}^n$ con centro en el origen, es decir, $B_\rho = \{x \in \mathsf{R}^n : \|x\| < \rho, \rho > 0$, con $\|\cdot\|$ la norma euclideana$\}$ (no se excluye el caso $\rho = \infty$.)

ii) $f : B_\rho \to \mathsf{R}^n, x \longmapsto f(x)$ es una función de clase $C^1$.

iii) $f(0) = 0$.

Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{d}{df} x(t) = f(x(t))$$

la cual por brevedad escribimos

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

en donde $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ y omitimos la variable independiente $t$.

La condición (ii) garantiza la existencia y unicidad de las soluciones de 1.1 , mientras que la condición (iii) implica que la función idénticamente cero es solución de 1.1 la cual llamaremos “el equilibrio” o “el origen”.

Sea $x_0 \in B_\rho$, la solución de 1.1 que en $t = 0$ pasa por $x_0$ la denotamos $\varphi(t, x_0)$, es decir, esta solución es tal que $\varphi(0, x_0) = x_0$. Ver la figura 1.3 para el caso $n = 2$.

## 1.3. DEFINICIONES

El equilibrio de 1.1 se dice ser (en el sentido de Lyapunov):

i) Estable. Si para cada $\varepsilon > 0, \rho \geq \varepsilon$ existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|x_0\| < \eta$ entonces $\|\varphi(t, x_0)\| < \varepsilon \; \forall \; t \geq 0$.

ii) Atractivo. Si existe $\eta > 0, \rho \geq \eta$ tal que si $\|x_0\| < \eta$ entonces lim $\|\varphi(t, x_0)\| = 0$ cuando $t \to \infty$.

iii) Asintóticamente Estable. Si él

a) es estable

b) es atractivo

iv) Inestable. Si él no es estable.

Las figuras (1.4)-(1.7) ilustran los cuatro conceptos para el caso $n = 2$.

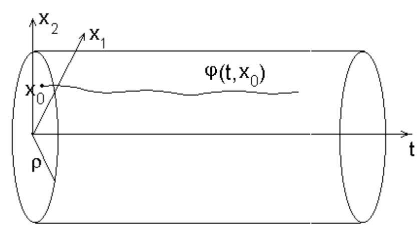


Figura 1.3: Gráfica de la solución $\varphi(t, x_0)$, n=2.

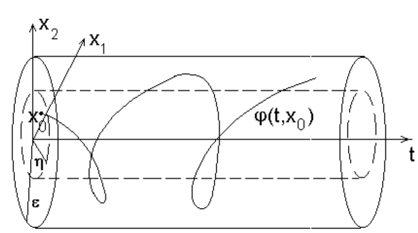


Figura 1.4: Estabilidad del origen. Cualquier solución que en $t = 0$ comience en el cilindro de base de radio $\eta$ no puede abandonar el cilindro de base con radio $\varepsilon$.

NOTA BENE:

La inestabilidad y la atractividad son perfectamente compatibles como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Considérese el siguiente sistema en coordenadas polares ($n = 2$)

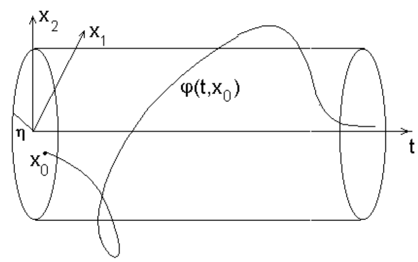


Figura 1.5: Atractividad del origen. Cualquier solución que en $t = 0$ comience en el cilindro de base con radio $\eta$, eventualmente puede abandonarlo, pero "finalmente" permanece dentro del mismo.

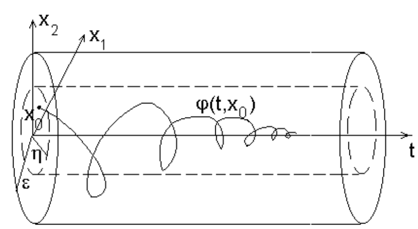


Figura 1.6: Estabilidad asintótica del origen.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = sen^2 \dfrac{\theta}{2} \\ \dot{\rho} = \rho\,(1-\rho) \end{cases} \tag{1.2}$$

en la figura (1.8) aparecen las imágenes de las soluciones de (1.2). Dichas imágenes son comúnmente llamadas trayectorias u órbitas del sistema. Observamos tres trayectorias notables: Los equilibrios $A\,(0,0)$, $B\,(1,0)$ y el círculo unitario sin incluir el punto $B\,(1.0)$. Las flechas indican el recorrido de las mismas cuando $t$ crece. El equilibrio $B\,(1,0)$ es atractivo pero inestable.

En el ejemplo anterior hicimos ver el carácter inestable y a la vez atractivo de un equilibrio que no es el origen, mientras que las definiciones dadas se refieren precisamente al origen. Aclaremos un poco esta situación.

Con modificaciones simples en las definiciones anteriores podríamos definir esos conceptos para un equilibrio que no fuera necesariamente el origen, o incluso para una solución arbitraria (no necesariamente un equilibrio). Para fijar ideas, veamos como quedaría por ejemplo el concepto de estabilidad para una solución (fija) arbitraria

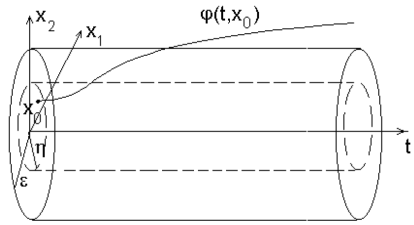


Figura 1.7: Inestabilidad del origen.

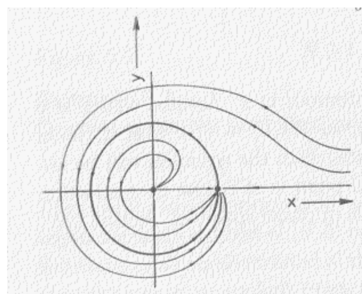


Figura 1.8: La inestabilidad y la atractividad son compatibles.

de (1.1). Los restantes tres conceptos para este caso son análogos de modo que los omitiremos.

Sea $\varphi_1(t, x_0)$ una solución de (1.1), es decir, esta solución es tal que $\varphi_1(0, x_0) = x_0$.

DEFINICION. La solución $\varphi_1(t, x_0)$ se dice ser estable (en el sentido de Lyapunov) si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\rho \geq \varepsilon$, existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|y_0\| < \eta$ entonces

$$\|\varphi(t, y_0) - \varphi(t, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall\ t \geq 0.$$

en la figura (1.9) se ilustra esta definición para el caso $n = 2$.

El estudio de la estabilidad de una solución arbitraria siempre se reduce al estudio de la estabilidad del origen haciendo un cambio de variable adecuado de la siguiente manera.

Supóngase que queremos verificar la estabilidad de la solución $\varphi(t, x_0)$ de (1.1), hagamos el cambio de variable

$$y = x - \varphi_1(t, x_0) \tag{1.3}$$

derivando esta expresión con respecto a $t$ y sustituyendo en la ecuación (1.1) tenemos

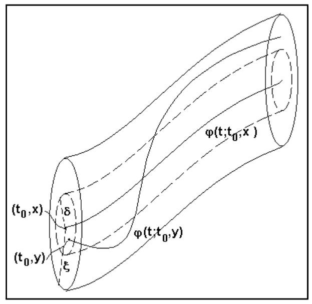


Figura 1.9: Estabilidad de la solución $\varphi_1(t, x_0)$

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\varphi}_1(t, x_0) = f(y + \varphi_1(t, x_0)) - f(\varphi_1(t, x_0)) \tag{1.4}$$

la expresión de la derecha es una función de $(t, y)$ de modo que hemos obtenido una ecuación de la forma

$$\dot{y} = g(t, y) \tag{1.5}$$

en donde $g(t, y) = f(g + \varphi_1(t, x_0)) - f(\varphi_1(t, x_0))$. Se observa inmediatamente que la función $g \equiv 0$ es una solución de (1.5), la desventaja es que el cambio de variable que elegimos nos lleva en el caso general a una ecuación no autónoma (cuyo estudio será tema de otro reporte). Pero en muchos casos esto no presenta mayor dificultad.

EJEMPLO ($n = 1$) considérese la ecuación

$$\dot{x} = x - x^2 \tag{1.6}$$

sea la solución

$$\varphi_1(t, 1) \equiv 1 \tag{1.7}$$

hacemos el cambio de variable

$$y = x - \varphi_1(t, 1) = x - 1 \tag{1.8}$$

derivando (1.8) y sustituyendo en (1.6) llegamos a

$$\dot{y} = (1 + y) - (1 + y)^2 \tag{1.9}$$

de modo que el estudio de la estabilidad de (1.7) equivale al estudio de la estabilidad del origen de la ecuación equivalente (1.9).

OBSERVACIÓN: En el ejemplo anterior hemos usado el siguiente resultado cuya prueba emitimos:

"La solución $\varphi_1(t, x_0)$ de (1.1) es estable si y sólo si la solución $y \equiv 0$ de (1.5) es estable".

Resultados análogos se obtienen para los tres conceptos restantes.

## 1.4. FUNCIONES DEFINIDAS Y SEMIDEFINIDAS

Para determinar la estabilidad o estabilidad asintónica, a partir de las definiciones dadas en la sección anterior, por un lado, necesitamos conocer la expresión analítica de las soluciones de (1.1), algo que sabemos es generalmente imposible, por otro lado, suponiendo que tuviéramos dicha expresión para las soluciones, no es trivial hacer las estimaciones pertinentes "$\varepsilon, \eta$". Existe un método alternativo que no requiere el conocimiento de manera expresa. Este es el llamado método directo de Lyapunov que sólo requiere de algunas funciones auxiliares que a continuación definimos:

Una función continua

$$W : \overline{B}_\sigma \to \mathrm{R},\ x \mapsto W(x) \tag{1.10}$$

tal que $W(0) = 0$ (donde la barra denota la cerradura de la bola $B_\sigma$) será llamada

i) Semidefinida positiva si $\forall\ x \in \overline{B}_\sigma, W(x) \geq 0$

ii) Definida positiva si $\forall\ x \in \overline{B}_\sigma \backslash \{0\}, W(x) > 0$

iii) Semidefinida negativa si $\forall\ x \in \overline{B}_\sigma, W(x) \leq 0$

iv) Definida negativa si $\forall\ x \in \overline{B}_\sigma \backslash \{0\}, W(x) < 0$

EJEMPLO. La función $W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es semidefinida positiva si $\overline{B}_\sigma \subset \mathrm{R}^n$ con $n > 2$, pero es definida positiva si $\overline{B}_\sigma \subset \mathrm{R}^2$. Ver la figura (1.10) para el caso $n = 2$.

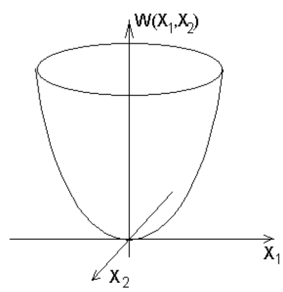


Figura 1.10: La función definida positiva $W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es un paraboloide con vértice en el origen.

Observación: La geometría de las funciones definidas es muy compleja. Se ha creído erróneamente que éstas (para $n = 2$) se ven en una vecindad del origen suficientemente pequeña, como la de la figura (1.10). El siguiente ejemplo desmiente esta afirmación.

EJEMPLO. La función $W(x_1, x_2)$ generada por rotación a lo largo del eje $W$ de la función dada por la fórmula:

$$h(x_1) = \begin{cases} x_1^2 \left(2 - sen\left(\dfrac{1}{x_1}\right)\right), & x_1 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

es definida positiva, sin embargo, no existe ninguna vecindad del origen en la cual la función $W$ se vea como la de la figura (1.10). En la figura (1.11) aparece esbozada su gráfica.

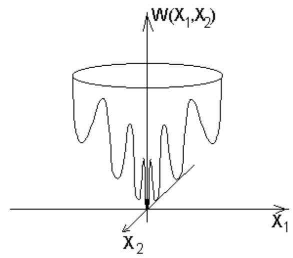


Figura 1.11: Una función definida positiva cuya geometría es complicada.

## 1.5. LA DERIVADA EULERIANA

Sea $W(x)$ una función definida (positiva o negativa) de clase $C^1$ sobre $\overline{B}_\sigma$ y considérese la ecuación (1.1). Llamamos derivada euleriana de esta función a la expresión:

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i \tag{1.12}$$

en la cual las $f_i$ son coordenadas de $f$.

De manera que la derivada euleriana de $W$ es justamente la derivada de $W$ a lo largo de soluciones de (1.1).

Observación: nótese que:

$i)$ $\dot{W} = \nabla W \cdot f$, lo que da lugar a una interpretación geométrica muy clara (ver figura 1.12);

ii) $\dot{W}$ es una función de $x$ que se anula para $x = 0$.

EJEMPLO. Considérese la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases} \tag{1.13}$$

y la función definida positiva de clase $C^1$ sobre $\mathsf{R}^2$

$$W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \tag{1.14}$$

entonces, la derivada euleriana de $W$ con respecto al sistema (1.13) está dada por la expresión

$$W(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{dx_1}{dt} \tag{1.15}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i \\
&= 2x_1(-x_2) + 2x_2 x_1^2
\end{aligned}
$$

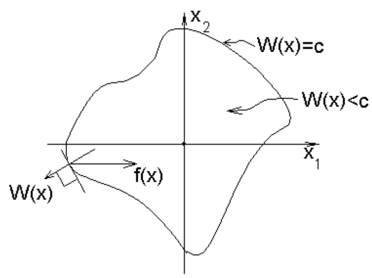


Figura 1.12: Interpretación geométrica de la derivada Euleriana $\dot{W} = \nabla W \cdot f$ ($n = 2$)

## 1.6. FUNCIONES DE LYAPUNOV:

Decimos que una función de clase $C^1$

$$W : B_\rho \to \mathrm{R},\ x \longmapsto W(x) \tag{1.16}$$

es una función de Lyapunov para la ecuación (1.1), si existe $\sigma \leq \rho$ tal que sobre $\overline{B}_\sigma, W$ es definida positiva (negativa) y $\dot{W}$ (la derivada euleriana) es semidefinida negativa (positiva).

Si (1.16) es tal que, sobre $\overline{B}_\sigma$ es definida negativa (positiva) decimos que $W$ es una función fuerte de Lyapunov para la ecuación (1.1).

## 1.7. EL METODO DIRECTO DE LYAPUNOV

Ya contamos con los elementos suficientes para enunciar y demostrar los dos teoremas clásicos de Lyapunov:

**Theorem 1.1.** (ESTABILIDAD). Si existe una función de Lyapunov para (1.1), entonces el origen es estable.

*Demostración.* Supongamos que la función de Lyapunov

$$
\begin{aligned}
W : \quad & B_\rho \longrightarrow \mathrm{R}, \\
& x \longmapsto W(x)
\end{aligned}
$$

es definida positiva, el otro caso es análogo y lo omitimos. Sea $\epsilon > 0$, $\epsilon < \sigma$ donde $\sigma$ es el de la definición de la sección anterior. Considérese la frontera de la bola $B_\epsilon$ la cual denotamos $F_r\,(B_\epsilon)$, como ésta es compacta y $W$ es continua existe:

$$a = \min\{W(x) : x \in Fr\,(B_\epsilon)\}$$

el cual es positivo, además, también por la continuidad de $W$, existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta \subset \overline{B}_\epsilon$ y $W(x) < a \;\forall\; x \in B_\eta$. Por lo tanto, si $x_o \in B_\eta$ entonces $\varphi(t, x_o) \in B_\epsilon \;\forall$ $t \geq 0$, de lo contrario, existe un $\tau > 0$ tal que $\varphi(\tau, x_0) \in F_r B_\epsilon$, pero esto último quiere decir que:

$$W\,(\varphi(0, x_o)) = W(x_0) < a \leq W\,(\varphi(\tau, x_o))$$

lo cual es contrario a la hipótesis, ya que $\dot{W} \leq 0$ significa que $W$ es decreciente con respecto a $t$. De modo que la solución $\varphi(t, x_o)$ no puede abandonar la bola $B_\epsilon$. ■

Theorem 1.2. (ESTABILIDAD ASINTOTICA). Si existe una función fuerte de Lyapunov para (1.1), entonces el origen es asintóticamente estable.

Demostración: Como en el teorema anterior, supongamos que la función fuerte de Lyapunov

$$W : B_\rho \to \mathrm{R},\;\; x \longmapsto W(x)$$

es definida positiva, el otro caso es similar y lo omitimos.

Por el teorema anterior, el origen es estable; resta probar entonces que el origen es atractivo. Como $\dot{W} < 0$, esto significa que $W(t)$ es una función estrictamente decreciente y como por hipótesis $W(t)$ está acotada por abajo por cero, se concluye que existe

$$\lim_{t \to \infty} W(t) = \alpha \geq 0.$$

Demostremos que $\alpha = 0$. Supongamos lo contrario, $\alpha > 0$ y deduzcamos una contradicción. Escogemos un número positivo $\eta < \sigma$, donde $\sigma$ es el que aparece en la definición de la sección anterior; con la propiedad de que

$$W(x) < \alpha \;\forall\; x \in B_\eta$$

puesto que $\dot{W}$ es continua y definida negativa, ella tiene un máximo negativo $-b$ sobre la cáscara compacta $\overline{B}_\sigma \backslash B_\eta$, de modo que se tiene:

$$\dot{W}(t) \leq -b \;\forall\; t \geq 0$$

e integrando de 0 a $t$ esta desigualdad, se tiene:

$$W(t) - W(0) \leq -bt \;\forall\; t \geq 0$$

o equivalentemente

$$W(t) \leq -bt \;\forall\; t \geq 0$$

lo cual es una contradicción, ya que $W$ es definida positiva, por lo tanto concluimos que $\alpha = 0$. ■

La figura 1.13 ilustra los dos teoremas anteriores

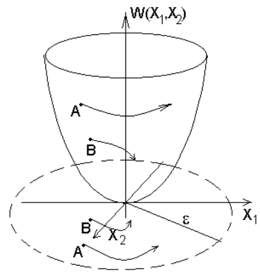


Figura 1.13: A estable, B asintóticamente estable. ($n$ = 2)

## 1.8. COMENTARIOS ACERCA DE LOS TEOREMAS DE LYAPUNOV.

Los dos teoremas de Lyapunov presentados en la sección anterior nos proporcionan condiciones suficientes para determinar estabilidad y estabilidad asintótica, y enfatizamos el hecho de que el método no requiere del conocimiento de una expresión analítica para las soluciones de (1.1), sino únicamente del campo vectorial $f(x)$; de ahí que se le llamó método directo.

Por otra parte, el método no indica cómo encontrar una función de Lyapunov adecuada para un problema determinado. Sin embargo, en muchos modelos físicos, integrales de movimiento como la función energía, frecuentemente resultan ser un buen punto de partida para buscar funciones de Lyapunov.

Obsérvese también, que en ambos teoremas, la $\eta$ encontrada a partir de la $\epsilon$ dada depende de ésta, pero es independiente de la variable independiente $t$; esto se debe a que el sistema autónomo (1.1) es invariante bajo traslaciones del tiempo $t$. Es decir, para cualquier $x_o \in B_e$, si $\varphi(t, x_o)$ es una solución de (1.1) , también lo es la función $\varphi(t + c, x_o)$, donde $c$ es una constante real arbitraria, este resultado se verifica fácilmente.

## 1.9. EJEMPLOS

EJEMPLO 1 (Sistemas gradiente). Sea

$$H = \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}, x \longmapsto H(x)$$

una función de clase $C^1$ tal que tiene un máximo estricto en el origen. Considérese la ecuación

$$\dot{x} = \nabla H(x)$$

tomemos como función de Lyapunov la diferencia

$$W(x) = H(0) - H(x)$$

la cual es evidentemente definida positiva en alguna bola $B_\epsilon$ del origen. Además, la derivada euleriana es en este caso.

$$\dot{W} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 \leq 0$$

De este modo, las condiciones del teorema 1.1 se cumplen, por lo tanto el origen es estable. Para visualizar este ejemplo, tomemos el caso particularmente simple, cuando la función $H$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} H: \quad & \mathrm{R}^2 \longrightarrow \mathrm{R}, \\ & (x_1, x_2) \longmapsto H(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

de modo que la ecuación diferencial resulta ser

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

y la función de Lyapunov será:

$$W(x_1, x_2) = H(0,0) - H(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_1^2 - x_2^2) = x_1^2 + x_2^2$$

cuya derivada Euleriana es

$$W(x_1, x_2) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)^2 = -4x_1^2 - 4x_2^2 \leq 0$$

veánse las figuras (a) y (b) de la grafica 1.14

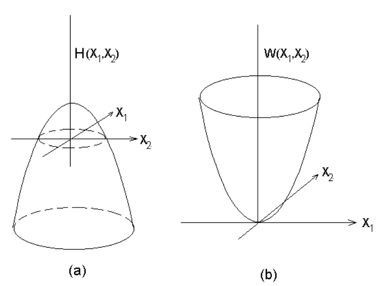


Figura 1.14:

EJEMPLO 2. Sea $A$ una matriz $n \times n$ antisimétrica, ésto es: $A = -A^T$ (donde $A^T$ indica la transpuesta de $A$). Considérese la ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax$$

tomemos como función de Lyapunov el cuadrado de la norma euclideana

$$W(x) = \|x\|^2$$

la cual es obviamente definida positiva en $\mathrm{R}^n$. La derivada euleriana de $W$ con respecto al sistema lineal dado es:

$$\dot{W}(x) = \nabla W(x) \cdot Ax = 2x \cdot Ax = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_i)^2$$

de manera que los elementos de la diagonal de $A$, $a_{ii}$ son $\leq 0$ es aplicable el teorema (1.1), y así, el origen es estable, mientras que si los $a_{ii}$ son estrictamente $< 0$ es aplicable el teorema (1.2) con lo que concluimos que el origen es asintóticamente estable.

EJEMPLO 3. (Sistemas mecánicos conservativos con un grado de libertad). Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) \end{cases}$$

donde $g$ es una función de clase $C^1$ real de variable real en una vecindad del origen y

$$x_1 g(x_1) > 0 \ si \ x_1 \neq 0$$

la siguiente función es de Lyapunov

$$W(x) = W(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(s)ds$$

En efecto, $W(0,0) = 0$ y si $(x_{1,}x_2) \neq (0,0)$, se tiene que

$$\int_0^{x_1} g(s)ds > 0 \ si \ x_1 \neq 0$$

ya que la gráfica de $g$ en una vecindad el origen es necesariamente como la de la figura (1.15) finalmente, la derivada euleriana de $W$ con respecto al sistema dado es:

$$\dot{W} = \nabla W \cdot (x_2, -g(x_1)) = (g(x_1), x_2) \cdot (x_2, -g(x_1)) \equiv 0$$

con lo cual es aplicable el teorema (1.1). Así, el origen es estable.

EJEMPLO 4. La función

$$W(x) = W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

es una función fuerte de Lyapunov para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

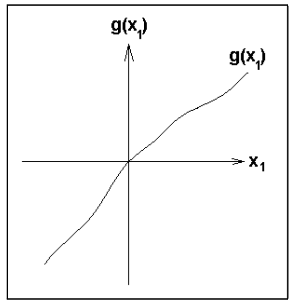


Figura 1.15: Gráfica de la función $g(x_1)$ con $x_1 g\,(x_1) > 0$.

En efecto, $W$ es definida positiva y la derivada Euleriana de $W$ con respecto a este sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \nabla W \cdot (-x_1^3 - x_2, x_1 - x_2^3) \\ &= (2x_1, 2x_2) \cdot (-x_1^3 - x_2, x_1 - x_2^3) \\ &= -2(x_1^4 + x_2^4) \end{aligned}$$

la cual evidentemente es definida negativa, de modo que el origen es asintóticamente estable.

EJEMPLO 5. (Ecuación de Lienard). Considérese la ecuación escalar de segundo orden no lineal

$$\ddot{y} + \dot{y} + g(y) = 0$$

la cual escrita como un sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - x_2 \end{aligned}$$

en donde $g$ es de la clase $C^1$ y $yg(y) > 0$, $y \neq 0$ en alguna vecindad de origen.

Una función de Lyapunov es:

$$W(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_o^{x_1} g(s)ds$$

En efecto, $W(0,0) = 0$ y al igual que la función de Lyapunov del ejemplo 3 se tiene que:

$$\int_o^{x_1} g(s)ds > 0 \ si \ x_1 \neq 0$$

Pero en este caso la derivada Euleriana es:

$$\dot{W}(x_1, x_2) = x_2(-g(x_1) - x_2) + g(x_1)x_2 = -x_2^2 \leq 0$$

por lo que deducimos la estabilidad del origen pero no podemos garantizar estabilidad asintótica, ya que la derivada euleriana no es definida negativa, pues ésta se anula en los puntos de la forma $(x_1, 0)$ es decir, sobre el eje $x_1$ y, por lo tanto, no se puede aplicar el teorema (1.2).

OBSERVACION: En todos los ejemplos de esta sección el origen es, en efecto, una solución de equilibrio.