Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Humberto Carrillo Calvet

March 29, 2000

Capítulo 1

INTRODUCCION

1.1 ¿Qué es una ecuación diferencial?

Las ecuaciones diferenciales son algo nuevo para nosotros. Sin embargo ya estamos familiarizados con el problema de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas, y también tenemos una idea clara de lo que es una solución aún cuando en muchos casos no podemos encontrarla, como es el caso de las ecuaciones de alto grado o que involucran funciones trascendentes. En las ecuaciones que ya conocemos pueden aparecer una o más variables. Las primeras pueden definirse como expresiones del tipo

$$F(x) = 0$$

donde x representa la variable en cuestión y F una función real de variable real cuya regla de correspondencia está dada en términos de sumas, productos, o potencias de funciones familiares como la idéntica, el logaritmo, las funciones trigonométricas o las inversas de éstas. Si la ecuación tiene más de una variable, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$ entonces quedaría definida como una expresión del tipo

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

siendo F una función de R^n en R^m. En este caso la ecuación es vectorial y constituye lo que conocemos como un sistema de ecuaciones. Si el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas es de la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

Aquí el problema consiste en resolver simultaneamente varias ecuaciones y conocemos métodos aplicables cuando F es una función lineal:

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1^i x_1, a_2^i x_2, ..., a_n^i x_n + b_i.$$

Ejemplos de los tipos de ecuaciones mencionadas anteriormente son:

i) $x + 2 = 0$

ii) $x^2 + 3x + 2 = 0$

iii) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$

iv) $2x + y + 3 = 0$

v) $\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x + 5y - 2 = 0 \end{array} \right\}$

Utilizando el lenguaje del cálculo diferencial podemos escribir ecuaciones donde aparezca una función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, su variable x, y derivadas de diferentes órdenes de f como por ejemplo:

i) $f'(x) - 5 = 0$

ii) $8f''(x) + 6f'(x) + 3f(x) + 2 = 0$

iii) $f^{(vi)}(x) + f(x) = 0$

iv) $(f''(x))^3 + 2xf(x) + \text{sen} x = 0$

que son ecuaciones del tipo

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$$

y son llamadas ecuaciones diferenciales ordinarias. El órden de la mayor derivada que aparezca es entendido como el órden de la ecuación diferencial. Podemos también escribir sistemas de ecuaciones deferenciales donde aparezcan dos o más funciones de una misma variable como por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{c} f'(x) - f(x) + q(x) = 0 \\ q'(x) - f(x)q(x) = 0 \end{array} \right\}$$

Constituye un sistema de ecuaciones ordinarias, los cuales en general son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1(x, f_1, f_1', ..., f_1^{(n)}, ..., f_m, f_m', ..., f_m^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, f_1, f_1', ..., f_1^{(n)}, ..., f_m, f_m', ..., f_m^{(n)}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x, f_1, f_1', ..., f_1^{(n)}, ..., f_m, f_m', ..., f_m^{(n)}) = 0 \end{array} \right\}$$

el órden de la mayor derivada que aparece se define como el órden del sistema de ecuaciones diferenciales. El sistema que se dió en el ejemplo anterior es entonces uno de primer órden. Hay otros tipos de ecuaciónes que pueden ser considerados como por ejemplo aquel donde aparece una función f de R^n en R, sus variables y derivadas parciales de diferentes órdenes:

i) Si $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R},\ f = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ii) Si $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R},\ f = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f = 0$$

iii) Si $f : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R},\ f = f(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Estas ecuaciones son llamadas ecuaciones diferenciales parciales y también en este caso el órden de la ecuación se define como el órden de la mayor derivada que aparezca. Todas estas son ecuaciones funcionales pues las incógnitas no son números sino funciones. Existen otros tipos de ecuaciones funcionales como las ecuaciones integrales y las integro-diferenciales pero por el momento estamos interesados en las ecuaciones diferenciales y de estas especialmente en las ordinarias.

1.2 La Solución de una Ecuación Diferencial

Hemos visto que es posible, utilizando el lenguaje del Cálculo, escribir un nuevo tipo de ecuaciones: Las ecuaciones diferenciales. Junto con ellas surge también un problema, el de resolverlas. Pero, ¿qué significa resolver una ecuación diferencial?. Antes de responder a esta pregunta regresemos a aquellas ecuaciones para las cuales estamos familiarizados con el problema de obtener soluciones. Consideremos el caso de una ecuación del tipo

$$F(x) = 0$$

por ejemplo

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{1}$$

Cuando nos planteamos el problema de encontrar soluciones de esta ecuación estamos suponiendo que existe un conjunto X donde la variable x puede tomar valores. En general la ecuación no es válida para toda $x \in X$ y el problema de resolver la ecuación consiste en encontrar $S \subset X$ tal que $F(x) = 0$ si y sólo si $x \in S$. S conforma el conjunto de soluciones y los elementos de S son llamados soluciones de la ecuación. Para la ecuación (1), sabemos que

$$S = \{1, 3\}$$

y por lo tanto decimos que $1, 3$ son soluciones.

Ejemplos:
i) $x + 2 = 0$, en R tiene como solución al número -2.
ii) $x + 2 = 0$, en $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$ no tiene solución.
iii) $x^2 - 3x + 2 = 0$, en $[0, 1]$ tiene una única solución, $x = 1$.
iv) $x^2 - 12x + 35 = 0$, en R tiene a 7 y 5 como únicas soluciones.
v) $x^2 + x + 1 = 0$, en R no tiene solución alguna.
vi) $1+ \text{sen}x = 0$, en R tiene una infinidad de soluciones.

De forma análoga a los ejemplos anteriormente considerados, al escribir una ecuación del tipo

$$F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0$$

se está pensando que existe un cierto conjunto de funciones X donde la ecuación (1) está bien definida. En este caso X necesariamente tendrá que ser un subconjunto del conjunto de funciones que tienen derivadas hasta de orden n en algún subconjunto de R, que para simplificar vamos a considerar que es un intervalo I

$$X = \left\{f : I \to R \mid \forall i = 1, \cdots, n \ \exists\ f^{(i)}(x)\ \forall x \in I\right\}.$$

La ecuación no es válida para toda $f \in X$ y resolverla es encontrar el subconjunto

$$S = \{f_0 \in X \mid F(x, f_0(x), f_0'(x), \cdots, f_0^{(n)}(x)) = 0\ \forall x \in I\}.$$

Los elementos de S son llamados soluciones de la ecuación diferencial.
Ejemplo: La función $\phi(x) = \text{sen}kx\ \forall x \in R$ elemento de

$$X = \{f : R \to R \mid \exists f'(x), f''(x) \forall x \in R\}$$

es una solución de la ecuación diferencial:

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0$$

ya que

$$\phi'(x) = k\cos kx$$

$$\phi''(x) = -k^2 \text{sen}kx = -k^2\phi(x)$$

o lo que es lo mismo

$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0\ \forall x \in R.$$

Ejemplo: $f:(0,\infty)\to \mathrm{R}$ tal que $f(x)=\frac{1}{x}$ es una solución de la ecuación

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

en $(0,\infty)$ pues

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1/x}{x} = -\frac{f(x)}{x}.$$

1.3 Existencia y Unicidad

Una vez discutido lo que se entiende por una ecuación diferencial y por una solución de esta surgen las siguientes preguntas: 1) ?‘Toda ecuación diferencial tiene solución? 2) De tener solución ¿cuántas tiene?, ¿quienes son? Para responder a estas preguntas conviene analizar algunos ejemplos:

a) $(y'(x))^2 + (y(x))^2 + 1 = 0$ Esta es una ecuación diferencial de primer orden, pues es de la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

sin embargo no tiene solución ya que

$$(y'(x))^2 + (y(x))^2 \geq 0$$

para cualquier pareja de valores reales que las funciones $y(x), y'(x)$ tomen.

El ejemplo anterior nos sugiere una ecuación que tiene sólo una solución. A saber

$$(y'(x))^2 + (y(x))^2 = 0$$

la única solución de esta ecuación es $y(x) = 0\ \forall x \in \mathrm{R}$.

b) $y'(x) = 3x^2$ En este caso rápidamente podemos ver que

$$y(x) = x^3 + c,\ \forall x \in \mathrm{R}$$

es solución para cualquier valor de la constante c. Lo que quiere decir que la ecuación tiene un número infinito de soluciones.

c) $y''(x) = 0$ Cualquier función cuya gráfica sea una línea recta será solución de esta ecuación. Esto es, cualquier función del tipo

$$y(x) = c_1 x + c_2, \forall x \in \mathrm{R}$$

con c_1, c_2 constantes. Otra vez la ecuación tiene un número infinito de soluciones.

d) $y'(x) = 2$ Esta ecuación exige sólamente que la pendiente de la gráfica de y sea constante e igual a 2. Por lo tanto

$$y(x) = 2x + c, \ \forall x \in \mathrm{R}$$

es solución para cualquier valor real de la constante c. Resulta también que asociadas a la ecuación diferencial aparece un número infinito de soluciones.

En los ejemplos anteriores se ha podido notar que una ecuación diferencial puede no tener solución, tener un número finito de soluciones o una infinidad. A medida que avancemos en nuestro estudio nos iremos dando cuenta de que los dos primeros casos no son típicos y que lo común es que asociada a cada ecuación diferencial exista un número infinito de soluciones. El hecho de que asociadas a una ecuación diferencial exista un número infinito de soluciones es de esperarse, pues para resolverla, de un modo u otro, hay que hacer al menos una integración y en consecuencia aparece una constante de integración que, al tomar diferentes valores, define una gama infinita de soluciones de la ecuación diferencial. Típicamente también uno quiere seleccionar soluciones particulares dentro de este conjunto infinito S. Esto se hace imponiendo condiciones (compatibles con la propiedad de satisfacer la ecuación) que sean característica exclusiva de la solución deseada. En la siguiente sección veremos que una forma de distinguir soluciones es imponiendo lo que se conoce como condiciones iniciales.

1.4 La Ecuación $y^{'} = f(x)$

Con objeto de profundizar en las observaciones hechas en la sección anteriór analizaremos el problema que representa resolver la ecuación $y' = f(x)$. Este problema no es más que el de encontrar una primitiva de la función $f(x)$.

Ejemplo: $y'(x) = 3x^2$. Sabemos que para cada valor real de c, la función $y(x) = x^3 + c$ representa una primitiva de la función$f(x) = 3x^2$ y en consecuencia una solución. Aquí, el problema se redujo a hacer una integración y de ahí el orígen de la constante arbitraria que determina una infinidad de soluciones. Sabemos pues que cualquier integrante de la familia de funciones $x^3 + c$ es solución pero, ¿Serán todas las soluciones de esta forma?, es decir, ¿Cualquier solución de la ecuación se podrá obtener sumando una constante a la función x^3?. La respuesta está dada en el teorema siguiente:

Teorema: Si ϕ es una solución de la ecuación $y' = f(x)$ entonces $\phi + c$ también es solución, y toda solución difiere de ϕ por una constante. Obviamente si ϕ es solución, esto es si $\phi' = D_x\phi = f$ entonces

$$D_x[\phi+c]=D_x\phi=f$$

y, por lo tanto, $\phi + c$ también es solución para todo $c \in$ R. Además si ψ es otra solución entonces también $D_x\psi = f$ y $D_x\psi = D_x\phi$ de donde, necesariamente, $\psi = \phi + c$, siendo c algún número real.

Nótese que el teorema no afirma que la ecuación tiene soluciones. Pero, si $f(x)$ es contínua en un intervalo I, el teorema fundamental del cálculo garantiza que f tiene primitiva en I. De hecho para cualquier $x_0 \in I$ la función $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$ es una primitiva. Escoger diferentes valores para x_0 significa tomar diferentes primitivas que difieren entre sí por una constante. Esto prueba el siguiente:

Teorema: Si f es contínua en un intervalo I, la ecuación $y' = f(x)$ en el intervalo I tiene infinidad de soluciones que difieren entre sí por una constante. Que las soluciones difieran entre sí por una constante quiere decir, geométricamente, que sus gráficas se obtienen una de otra haciendo una traslación en la dirección del eje de las ordenadas.

Ejemplo: $y' = 2$, $\forall x \in (0,1)$. Todas las soluciones son de la forma $y(x) = 2x + c$.

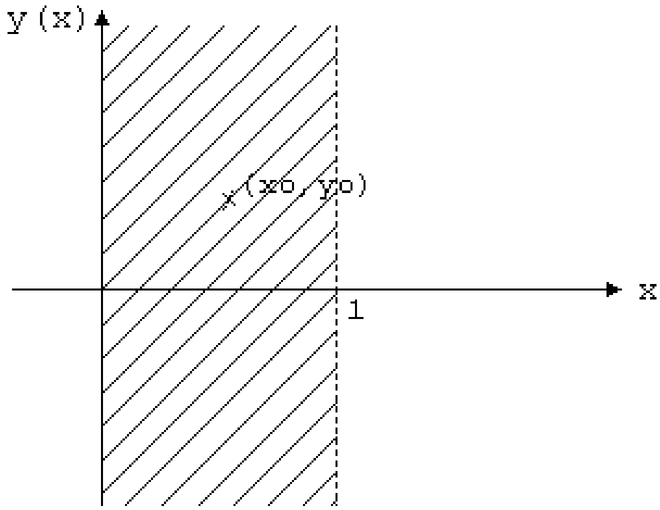


Figura 1

Así las soluciones de la ecuación cubren íntegramente la banda del plano entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Observemos que: (1) dado cualquier punto (x_0, y_0) en esta banda, hay una solución que pasa por él y (2) ésta es única, pues hay sólo una recta de pendiente 2 que pase por ese punto.

Esta condición de unicidad también se puede verificar analíticamente: si $y(x_0) = y_0$ esto implica que $y_0 = 2x_0 + c$ y entonces la única función del tipo $y = 2x + c$ que cumple con la condición dada es aquella para la cual, $c = y_0 - 2x_0$. En general si $G(x)$ es solución de $y' = f(x)$ entonces todas las soluciones serán de la forma $y(x) = G(x) + c$. De todas estas sólo aquella para la cual $c = y_0 - G(x_0)$ cumple la propiedad $y(x_0) = y_0$. Así queda demostrado que:

Teorema. Dada la ecuación $y' = f(x)$ si f es contínua en I y $x_0 \in I, y_0 \in$ R entonces existe una y sólo una solución, $y(x)$, con la propiedad de que $y(x_0) = y_0$.

Ejercicios:

1) Considere la ecuación $y'' = f(x)$ con f contínua en el intervalo I. Demuestre que dado $x_0 \in I$ y $y_0, y_1 \in$ R existe una única solución de la ecuación tal que:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

2) Considere la ecuación $y^{(n)} = f(x)$ con f contínua en el intervalo I. Demuestre que dado $x_0 \in I$ y $y_i \in$ R, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ existe una única solución de la ecuación tal que:

$$y^{(i)}(x_0) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Capítulo 2

SISTEMAS DINAMICOS

2.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es llamar la atención acerca de la utilidad de las ecuaciones diferenciales para la modelación de sistemas dinámicos.

Con este propósito discutiremos algunos modelos biológicos de crecimiento de población y, con el objeto de hacer algunas comparaciones ilustrativas, trataremos un problema clásico, el del movimiento. Lo que se quiere es revisar la noción del sistema dinámico y, a través de la discusión de un número reducido de problemas simples, dar una idea del camino que se sigue para la construcción de un modelo matemático que de cuenta del comportamiento de este tipo de sistemas.

Si fijamos nuestra atención en cualquier porción del universo, no importa si es un átomo, una célula, un hombre, una sociedad, la atmósfera terrestre o el sistema solar, encontramos que ésta se encuentra en un proceso permanente de cambio. Estos cambios por lo general son de interés para el hombre y de ahí que un problema típico en las disciplinas científicas es: dado un sistema (una porción del Universo) de interés, estudiar la forma en que operan los cambios en él. Idealmente querría uno estudiar el grán sistema dinámico que constituye el Universo, pero no es posible para la mente humana comprender y modelar en su totalidad a este inmenso sistema. El Universo constituye un todo en sí mismo y en consecuencia no podríamos concebir dos partes de él que no se encuentren en constante interacción. Esta idea esta bellamente expresada en el viejo aforismo que dice: No podrá moverse una partícula de polvo sin que se conmueva el Universo. Sin embargo, por fortuna para la Ciencia es posible delimitar mentalmente subsistemas que están relativamente aislados en el sentido de que su comportamiento dinámico puede comprenderse tomando en cuenta las interacciones entre sus diferentes partes y la acción de una colección manejable de factores externos. Así es posible, estudiar y comprender sistemas dinámicos que constituyen sólo una parte del Universo haciendo abstracción de todas aquellas partes del resto que no tienen una influencia relevante. Pero aún teniendo delimitada una porción del Universo como sistema de estudio, nos encontramos otra vez con que su estructura , por pequeño que el sistema sea, es infinitamente complicada. Debido a esto, es necesario realizar otra vez un proceso de abstracción para enfocar nuestra atención solamente en aquellas partes del sistema que nos interesan y cuya interacción es determinante para el estudio de los procesos que se quieren estudiar.

Para algunos sistemas una vez que se ha podido:

(1) Especificar con suficiente precisión lo que constituye el sistema;

(2) Listar las propiedades del sistema cuyo cambio se quiere estudiar;

(3) Tomar en cuenta todos aquellos agentes externos al sistema que a través de su interacción con éste pueden afectar de manera relevante las propiedades de interés.

Resulta que:

a) Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ simbolizan las propiedades de interés del sistema, entonces cada x_i es cuantificable y el estado en que se encuentra el sistema queda especificado, en cada tiempo, por una eneada $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de números reales. El hecho de que el estado del sistema esté sujeto a cambios se traduce en que cada una de las magnitudes x_i es una función del tiempo y que el estado estará dado en cada tiempo por los valores de una función vectorial

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)_{,\cdots,} x_n(t)).$$

b) Experimentalmente se pueden encontrar leyes gene- rales que rigen los cambios que tienen lugar en el sistema;

c) Estas leyes se pueden escribir matemáticamente como ecuaciones diferenciales que determinan las funciones $x_i(t)$.

A lo largo del capítulo discutiremos algunos ejemplos de este tipo de modelos. En estos la atención se enfoca hacia las propiedades $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ del sistema y se hace abstracción de cualquier otra restante. De acuerdo al modelo, el conocimiento de la eneada $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en cada tiempo representa el máximo conocimiento que se puede tener del sistema. Por esta razón se dice $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ especifica el estado del sistema al tiempo t y a las funciones $x_i(t)$ se les llama variables de estado del sistema.

2.2 Dos Problemas: Crecimiento de Población y Movimiento

CRECIMIENTO DE POBLACIONES. Supongamos que estamos interesados en estudiar la forma en que el número de integrantes de una población, ubicada en cierto medio, cambia en el tiempo.

Como ejemplo podemos pensar que se trata de la población de conejos en una isla. En este caso el conjunto de los conejos de la isla es nuestro sistema de estudio y todo aquello que interaccione de manera relevante con él, será considerado como el ambiente del sistema. Por interacción relevante se entiende una interacción que tenga como consecuencia un cambio significativo en el número de pobladores. Así, no convendrá considerar como el ambiente del sistema a un cazador inexperto que cada verano mata unos pocos conejos, mientras que una "plaga" de cazadores sí es de tomarse en cuenta.

Lo que nos interesa de la población es la forma en que ésta cambia numéricamente en el tiempo y el estudio de este cambio puede ser tratado con diferentes grados de detalle. Por ejemplo, podríamos fijarnos en el cambio de la cantidad total de conejos; o en el de la cantidad de machos y hembras; o en el de la cantidad de conejos de cada raza o de cada color o de diferentes edades que haya en cada momento; o también en el cambio de la cantidad de conejos de cada región de la isla, etc..

Si sólo estamos interesados en el número total de conejos y no nos interesa distinguirlos respecto a alguna otra propiedad que a éstos pueda asignárseles, entonces un modelo con una sola variable de estado es suficiente para el estudio de nuestro sistema. A esta variable la podemos llamar $N(t)$, el número de conejos que hay en la isla en el tiempo t. Esta determina completamente el estado del sistema, siendo el conocimiento de $N(t)$ el máximo conocimiento que, de acuerdo al modelo que se está construyendo, puede obtenerse del sistema.

Si estamos interesados en un mayor conocimiento, por ejemplo distinguir sexos, habrá que considerar un modelo de dos variables de estado $N_m(t)$ y $N_h(t)$; el número de conejos machos y el número de conejos hembras que hay en la isla en el tiempo t respectivamente. En este caso el modelo resulta "más fino" quedando su estado descrito por dos variables de estado.

Si además de considerar sexos quisiéramos distinguir los conejos adultos de los no adultos, daríamos lugar a un modelo con las variables de estado $N_m^a(t), N_m^n(t), N_h^a(t)$ y $N_h^n(t)$, donde los superíndices a y n se refieren a conejo adulto y no adulto respectivamente. Así, a medida que un conocimiento más detallado del sistema es requerido, el modelo crece en complejidad pues tienen que aparecer más variables de estado que tomen en cuenta las nuevas características que se quieren considerar.

MOVIMIENTO. Pensemos ahora que nos interesa conocer la forma en que se mueve un cuerpo. Por "conocer la forma en que se mueve el cuerpo", entendemos conocer la posición del cuerpo y su velocidad durante el lapso en que realiza su movimiento. Estas son las dos propiedades que determinan el estado de movimiento de un cuerpo. Las magnitudes que las caracterizan constituyen las variables de estado del sistema.

Supongamos por ejemplo que se trata de un cuerpo que soltamos y cae sobre la superficie terrestre. Con tal cuerpo, debido a la atracción gravitacional, interaccionarán todos los cuerpos del Universo. También en su caída sufrirá una fuerza de fricción debida al contacto con el aire de la atmósfera. Obviamente sería muy complicado tomar en cuenta todos estos factores, pero esta complicación puede evitarse si suponemos que el comportamiento observado está determinado única- mente por la influencia del campo gravitacional terrestre. Esto lo podemos hacer porque la magnitud de este efecto es aplastantemente mayor que la de los otros. Haciendo esto hemos delimitado sistema y ambiente del sistema como el cuerpo y el campo gravitacional te- rrestre respectivamente. El problema de la localización del cuerpo se simplifica si lo consideramos como un punto. Sin duda esto es una idealización, pero será de mucha utilidad para una gran cantidad de problemas donde, ya sea porque sus dimensiones son despreciables, o que su volumen y forma no juegan un papel importante en su movimiento, la aproximación es válida. El cuerpo en caída libre se mueve a lo largo de una línea vertical y para localizarlo basta considerar un punto de referencia en ella y entonces tomar como variable de estado a $x(t)$: la distancia entre el punto de referencia y el punto que representa la posición del cuerpo. La otra variable de estado del modelo es $\vartheta(t)$, la velocidad con que el punto que representa al cuerpo se mueve en la recta vertical imaginaria. Así el estado del sistema queda totalmente especificado en cualquier tiempo por la pareja $(x(t), \vartheta(t))$.

De manera similar, si el cuerpo que nos interesa se moviera en un plano, una mesa de billar por ejemplo, entonces para localizarlo usariamos dos variables de estado $x(t)$ y $y(t)$ medidas respecto a un sistema de coordenadas fijo en el plano de la mesa; para la velocidad otras dos $\vartheta_x(t)$ y $\vartheta_y(t)$: las componentes de la velocidad en cada una de las dos direcciones. Así, el estado del sistema en cada tiempo t queda dado por

$$(x(t), y(t), \vartheta_x(t), \vartheta_y(t)).$$

Si se tratase de un sistema constituído por dos bolas de billar, la bola 1 y la bola 2 entonces el estado quedaría dado por

$$(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t), \vartheta_{x_1}(t), \vartheta_{y_1}(t), \vartheta_{x_2}(t), \vartheta_{y_2}(t)).$$

2.3 Leyes del Comportamiento

MOVIMIENTO: Para estudiar el movimiento de un cuerpo interesa conocer la posición y velocidad del cuerpo en cada instante. Vimos en la sección anterior (para el ejemplo del cuerpo que cae) que considerando en el modelo dos funciones, $x(t)$ y $\vartheta(t)$, podíamos especificar tanto la posición como la velocidad del cuerpo en cada instante. El problema queda resuelto en el momento en que averiguemos la dependencia temporal de x y ϑ. Para esto se requiere más información relativa al sistema que nos permita determinar estas funciones $x(t)$ y $\vartheta(t)$. La única forma de obtener esta información es experimentando, esto es, observando, de una u otra forma, el comportamiento del sistema real. El objetivo de la experimentación es encontrar regularidades y principios de carácter general. Una vez encontradas algunas normas que rigen comportamiento del sistema real, la idea es traducirlas apropiadamente al modelo como expresiones matemáticas que permitan trabajar el problema en el papel como uno de naturaleza enteramente matemática.

Para el tipo de problema que estamos considerando es conocida una ley de caracter muy general: la ley de Newton. Esta ley toma en cuenta la influencia del ambiente sobre el sistema en términos de fuerzas y especifica el efecto de éstas sobre el movimiento del cuerpo.

La Ley de Newton dice que: Si sobre un cuerpo de masas m actúa una fuerza F, entonces el cuerpo sufre un cambio en su velocidad que instantáneamente es igual en magnitud a F/m. Matemáticamente esto se escribe como

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{F}{m}.$$

Veamos ahora, para el ejemplo del cuerpo que cae, cómo esta ley nos permite determinar las funciones x y ϑ. La velocidad, por definición, es una medida del cambio relativo de posición respecto al tiempo y esto matemáticamente queda expresado por la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta.$$

En este problema la fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso del cuerpo debido a la fuerza de gravedad y está dado por mg. Tomando esto en cuenta tenemos como punto de partida para encontrar a $x(t)$ y $\vartheta(t)$ el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \vartheta \\ \\ \frac{d\vartheta}{dt} = g \end{array} \right\}. \qquad (1)$$

La segunda ecuación es satisfecha por la familia de funciones:

$$\vartheta(t) = gt + c_1$$

siendo c_1 una constante real cualquiera. Si sustituimos esta expresión en la primera ecuación tendremos que

$$\frac{dx}{dt} = gt + c_1$$

y entonces

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$$

siendo c_2 otra constante real cualquiera.

Así, hemos encontrado que las expresiones

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \\ \vartheta(t) &= gt + c_1 \end{aligned}$$

representan la familia S de soluciones del sistema (1) de ecuaciones diferenciales. Cada pareja de constantes (c_1, c_2) determina una pareja de funciones en el conjunto S.

Notemos también que $c_2 = x(0)$ y $c_1 = \vartheta(0)$. Entonces cada pareja (c_1, c_2) representa un diferente estado inicial $(x(0), \vartheta(0))$ del sistema. El resultado es que para cada estado inicial $(x(0), \vartheta(0))$ tenemos un movimiento distinto dado por

$$(x(t), \vartheta(t)) = (\frac{gt^2}{2} + \vartheta(0)t + x(0), gt + \vartheta(0)).$$

Esto quiere decir que, a partir del conocimiento del estado inicial del sistema, podemos conocer el estado del sistema en cualquier otro tiempo. Estos modelos causaron gran revolución en el pensamiento filosófico de la época pues sugieren un comportamiento determinista de la naturaleza en el sentido de que el estado de cosas en un momento dado determina todo estado futuro.

CRECIMIENTO DE POBLACIONES. Volvamos al problema de los conejos en una isla. En la sección anterior vimos que la aproximación más simple al problema nos lleva a considerar un modelo con una sola variable de estado, $N(t)$.

Igual que para el movimiento, en este problema, necesitamos más información para determinar teóricamente la dependencia temporal de la función N.

Del conocimiento que tenemos acerca del comportamiento de los seres vivos sabemos que la población aumenta o disminuye debido a los fenómenos de natalidad y muerte respectivamente. En consecuencia el cambio global en el número de pobladores se deberá al balance que haya entre estos dos factores de cambio.

Este constituye una ley en nuestro problema y la podemos formular matemáticamente de la manera siguiente:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = n - m \tag{2}$$

donde n y m representan las razones percapita de natalidad y muerte, esto es:

n = número de nacimientos por unidad de tiempo y por poblador.

m = número de muertes por unidad de tiempo y por poblador.

Ahora tenemos una ley general formulada matemáticamente pero, ¿podremos a partir de la ecuación (1) determinar a $N(t)$?.

Antes de responder a este pregunta recordemos que, para los pro- blemas de movimiento, no basta conocer la Ley de Newton para poder encontrar la dependencia funcional de las variables de estado, sino que se requiere conocer además la expresión de la fuerza que interviene en el problema. Conocer la expresión de la fuerza, en este contexto, significa conocer la función $F(x, \vartheta, t)$[1]. Si F no se conoce como función de estas variables entonces F en la ecuación no es más que una simple letra y el problema no está bien planteado matemáticamente.

Para el caso de la ecuación (2) la situación es completamente análoga. Para que podamos atacar matemáticamente el problema de encontrar $N(t)$, necesitamos conocer las funciones $n(N, t)$ y $m(N, t)$.

En el estudio de poblaciones veremos que la ley (2) no es tán útil en la práctica como la ley de Newton en la mecánica. La razón es que, para las poblaciones, la forma en que las funciones n y m dependen de N y t no es fácil de encontrar debido a la complejidad del sistema. En cambio las fuerzas para ciertas clases importantes de problemas se han podido encontrar experimentalmente. Este ha sido el caso, por ejemplo, de las fuerzas gravitacionales y las electromagnéticas. Hay que aclarar, sin embargo, que la situación no ha sido la misma para todos los tipos de fuerzas conocidas. Por ejemplo en el dominio nuclear esto no se ha podido lograr, esto es, así como se sabe que la fuerza entre dos masas gravitacionales m_1 y m_2 que se encuentran a una distancia r es $F_q = \rho m_1 m_2/r^2$ con ρ = cte. , para la fuerza entre dos partículas subatómicos no se ha podido encontrar una ecuación de este tipo.

Así el problema que se presenta en la Física Núclear guarda cierta analogía con el de población es que estamos considerando; en el primero, podríamos decir que se conoce la ley y no se conoce la expresión de la fuerza que aparece en la ley; en el segundo también tenemos la ley pero no conocemos las expresiones de las razones de natalidad y muerte.

Esta dificultad no limita del todo el estudio de poblaciones pues se puede

[1] En el ejemplo del cuerpo que cae $F(x, \vartheta, t) = mg, \forall (x, \vartheta, t)$

hacer lo que han hecho los físicos nucleares. Ellos, guiados por el conocimiento cualitativo que tienen de estas fuerzas, proponen una expresión matemática para la fuerza, trabajan teóricamente con la expresión propuesta y posteriormente la confrontan los resultados teóricos con el experimento para ver, con qué exactitud y dentro de qué márgenes lo que se ha modela describe bien la realidad.

De manera semejante, ante el problema de crecimiento de una población, se puede proponer una expresión para la función $[n-m](N,t)$ que se apegue a las características cualitativas que se conocen del pro- blema. Una vez hecho esto analizando las ecuaciones del modelo se puede obtener información teórica.

A continuación discutiremos algunos ejemplos para ilustrar la forma de proceder que discutimos anteriormente.

2.4 Modelo de Población Joven

Supongamos que estamos interesados en estudiar una población que se encuentra en las siguientes circunstancias hipotéticas:

(1) La población está aislada.
(2) La población habita un medio infinito.
(3) El medio es homogéneo.

Discutimos un poco estas suposiciones. Por (1) queremos decir que, con la población, no interactúan agentes externos. Esto obviamente no es el caso para ninguna población real, pero servirá como una apro- ximación para poblaciones donde la influencia de agentes externos no afecta sensiblemente el número de pobladores. Un ejemplo donde se satisface con buena aproximación esta suposición podría ser el de una población de truchas en un acuario donde los criadores la protegen de las inclemencias del clima, de enfermedades y depredadores.

La condición (2) significa que la población puede expandirse sin límite en su territorio. Dicho de otra forma, la densidad [2] de pobladores en el área ocupada puede mantenerse constante aún cuando el número de pobladores tienda a infinito. Esta suposición tampoco se cumple en la realidad, pero la podríamos aceptar como válida para una población, que en relación con su

[2] El número de pobladores por unidad de superficie

medio, es pequeña. Pequeña en el sentido de que ese mismo medio puede soportar una población considerablemente mayor y el espacio no constituye un factor limitante para su desarrollo. Lo más probable es que, con el tiempo, una población como esta crezca y la suposición deje de valer, por esto, en el encabezado de la sección, le hemos llamado población joven a nuestra población hipotética.

Por último, lo que significa (3) es que los recursos del medio, que la población requiere para su sustento, se encuentran en todo el territorio, en igual cantidad y con la misma calidad.

Para estudiar esta población, de acuerdo a la discusión de las secciones anteriores, nuestro problema consiste en proponer una expresión matemática para n y m en términos de N y de t. O lo que es más sencillo, proponer globalmente una expresión para la función diferencia $[n - m]$.

Para ver qué función $[n-m](N,t)$ nos conviene para esta población analizemos que quiere decir que:

(1) $n - m$ dependa de N;
(2) $n - m$ dependa de t.

(1) Quiere decir que, las razones de natalidad y mortalidad per cápita son mayores o menores dependiendo del número de pobladores. Esto sólo se puede concebir, cuando en la población se da un fenómeno de competencia o de cooperación.

(2) Quiere decir que, en diferentes momentos, las razones de natalidad y de muerte per cápita, son diferentes. O lo que es lo mismo, las condiciones de reproducción y de subsistencia cambian en el tiempo. Esto sólo puede ocurrir cuando algún factor externo afecta directamente a los pobladores o los afecta indirectamente a través de los recursos necesarios para su desarrollo.

Las condiciones en que se encuentra la población que estamos considerando, no permiten suponer, que en esta se vaya a dar un fenómeno importante de competencia. Por otra parte un fenómeno de cooperaci- ón no es de esperarse en una población de animales bajo los supuestos que hemos hecho. Por estas razones, es natural proponer que $n - m$ no dependa de N. Como también hemos supuesto que la población no sufre efectos externos, por estar aislada, es natural suponer que $n - m$ no dependa de t.

Estas conclusiones sugieren que propongamos que

$$[n - m](N,t) = k \ \forall(N,t)$$

donde k es una constante, cuyo valor depende del tipo de pobladores y de las características particulares (homógeneas) del medio en que se encuentran.

En consecuencia, la ley de crecimiento toma la forma particular:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k \tag{3}$$

como $N(t)$ no puede ser negativo entonces,

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\ln N$$

siempre que $N(t) \neq 0$. Escribiendo la ecuación (2) como

$$\frac{d}{dt}\ln N = k$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \ln N(t) &= kt + c \\ 24pt N(t) &= e^{(kt+c)} \\ 24pt N(t) &= e^{c}e^{kt} \end{aligned}$$

siendo c una constante real cualquiera. Además definiendo

$$N_0 = N(0) = e^c$$

por lo tanto tenemos que

$$N(t) = N_0 e^{kt}. \tag{4}$$

El resultado que hemos obtenido nos dice que, para cada $N_0 \geq 0$ tenemos una diferente solución de (2) o lo que es lo mismo un número diferente de pobladores en cada tiempo. Esto concuerda con lo esperarado: el número de pobladores que vaya haber en cada tiempo debe depender del número de pobladores que haya inicialmente.

Conociendo N_0, para conocer la dependencia temporal de N, solo falta conocer el valor de k. Este es un parámetro característico de este sistema dinámico que podemos calcular con la fórmula

$$k = \frac{1}{t_1}\ln\left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]$$

a paratir del conocimiento del número de pobladores, $N(t_1)$, en cualquier instante $t_1 > 0$.

Dependiendo del valor de k tenemos tres tipos posibles de comportamiento para la función $N(t)$:

a) $k > 0$. La población crece sin límite.

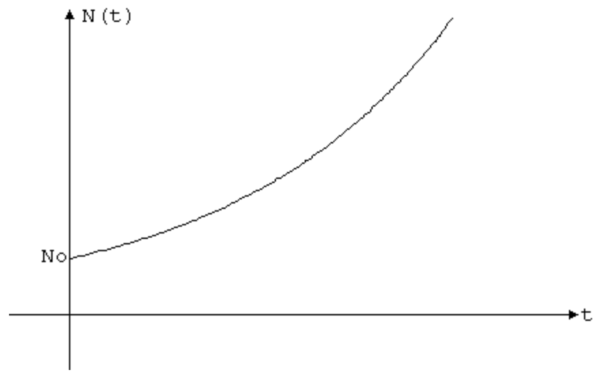


Figura 1

b) $k = 0$. La población se mantiene constante.

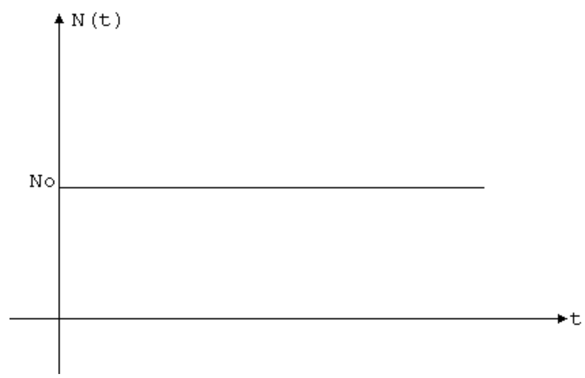


Figura 2

c) $k < 0$. La población tiende a extinguirse.

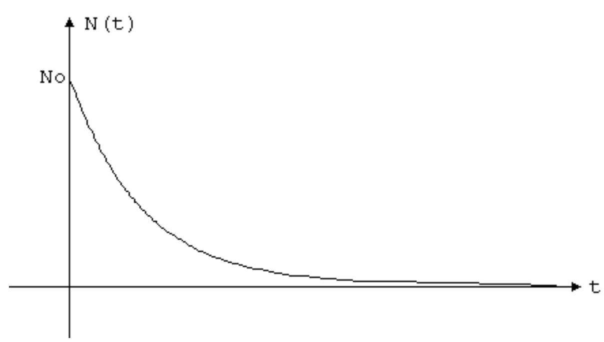


Figura 3

2.5 Modelo de Población con Saturación

Consideremos ahora otra población que hipotéticamente se encuentra bajo las siguientes circunstancias.

(1) La población está aislada.
(2) El medio es homogéneo.
(3) El medio es finito.

Como en la sección anterior discutimos las suposiciones (1) y (2), ahora sólo analizaremos las modificaciones que tienen lugar cuando el medio es finito. Primero aclararemos que, por finito, entendemos un medio razonablemente grande como para que puedan ocuparlo un número considerable de individuos. Subrayemos también que por ser finito el medio no podrá, por rico que sea, sustentar una cantidad arbitraria de individuos. Obviamente el hecho de que el medio sea finito no tendrá consecuencias mientras la población sea suficientemente pequeña y el medio, efectivamente, no la limite[3]. Por esto es de esperarse que mientras esto ocurre su comportamiento esté gobernado por la ecuación (3).

Esto quiere decir que para una población pequeña tendremos, dependiendo de las caracterísiticas del medio y de la población las tres posibilidades siguientes:

(a) la población tiende a extinguirse.
(b) la población se mantiene constante.
(c) la población crece.

También es importante notar que, si (a) es el caso, dado que inicialmente la población es pequeña y la tendencia es a disminuir, entonces la población siempre se podrá considerar como suficientemente pequeña y en consecuencia esta efectivamente se extinguirá. El caso (b) implica que la población se mantiene constante para cualquier valor inicial N_0. Esto corresponde a una situación ideal que no se observará en un sistema ecológico:cualquier perturbación natural tendrá como consecuencia que el parámetro k se haga positivo o negativo. Si (c) es el caso, como la población aumenta exponencialmente, pronto la población dejará de ser "suficientemente pequeña" y empezará a sentir las limitaciones del medio.

[3] Recordemos que: población pequeña en comparación con el medio fué la apro- ximación que corresponde, en la realidad, a la suposición de un medio infinito.

Aún cuando tengamos un medio favorable al crecimiento de una población pequeña ($k > 0$), si número de pobladores es “suficientemente grande” entonces la población disminuirá. En consecuencia, es natural esperar que exista un número crítico de pobladores que marque la frontera entre lo que estamos entendiendo por población “suficientemente pequeña” y “suficientemente grande”.

Este número crítico η, de pobladores, sería algo así como la “capacidad de carga” del medio respecto a esos pobladores. Debe ocurrir que si se ubican inicialmente un número de pobladores $N_0 > \eta$ entonces la población disminuirá hasta tener un número de pobladores $N(t) = \eta$. Asimismo, si $N_0 < \eta$ entonces al población deberá crecer hasta que $N(t) = \eta$. Idealmente, si $N_0 = \eta$ entonces la población se debe mantener constante.

Habiendo visto que el caso (c) es el interesante, por dar lugar a un comportamiento que no se daba en el modelo de población joven, propongamos una expresión $[n-m](N,t)$ para este caso.

Otra vez, como la población es aislada es de esperarse que $n-m$ no dependa de t. Por otra parte, del análisis hecho en los párrafos anteriores se concluye que $n-m$ debe depender de N y que la función $[n-m](N)$ debe cumplir:

$$[n-m](N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} > 0 \text{ si } N < \eta$$

$$[n-m](N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} < 0 \text{ si } N > \eta$$

$$[n-m](N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0 \text{ si } N = \eta.$$

Existen muchas funciones con tal propiedad, conviene para modelar este comportamiento, proponer la expresión más simple:

$$[n-m](N) = \eta - N.$$

La ley de crecimiento será entonces:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \eta N - N^2. \tag{5}$$

Esta ecuación es llamada la ecuación logística y para encontrar sus soluciones denotamos por dN/dt la derivada de N respecto a t y escribimos:

$$\begin{aligned}
\frac{N'}{N(\eta - N)} &= 1 \\
\int_0^t \frac{N'dt}{N(\eta - N)} &= \int_0^t dt \\
\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{N(\eta - N)} &= t
\end{aligned}$$

descomponiendo el integrando en fracciones parciales tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta}\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{N} + \frac{1}{\eta}\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{(\eta - N)} &= t \\
\frac{1}{\eta}\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{N} - \frac{1}{\eta}\int_{\eta-N(0)}^{\eta-N(t)} \frac{dN}{N} &= t
\end{aligned}$$

para que estas integrales esten definidas se requiere que:

1) Los límites de integración no se anulen;
2) Tanto $N(t)$ y N_0 como $\eta - N$ y $\eta - N_0$ tengan el mismo signo.

Bajo estas suposiciones

$$\ln \frac{N}{N_0} + \ln \frac{\eta - N_0}{\eta - N} = \eta t$$

y despejando llegamos a que

$$N(t) = \frac{\eta N_0}{(\eta - N_0)e^{-\eta t} + N_0}\ . \tag{6}$$

Aunque la ecuación (6) vale sólo cuando se cumplen las condiciones (1) y (2), es importante notar que la condición (2) no restringe realmente a la ecuación (6) pues esta garantiza, de por sí, la validez de la suposición. Esto es, se puede demostrar que la ecuación (6) implica que

$$N(0) > 0 \Rightarrow N(t) > 0, \forall t \in \mathrm{R}$$

$$N(0) < 0 \Rightarrow N(t) < 0, \forall t \in \mathrm{R}$$

$$N(0) < \eta \Rightarrow N(t) < \eta, \forall t \in \mathrm{R}$$

$$N(0) > \eta \Rightarrow N(t) > \eta, \forall t \in \mathrm{R}.$$

Consideremos ahora la suposición 1), de acuerdo a ella la ecuación (6) no es válida cuando $N(0) = 0$ ni cuando $N(0) = \eta$. Sin embargo, aún en este caso esta ecuación indica el resultado correcto, a saber que si $N(0) = 0$ entonces $N(t) = 0\ \forall t$ y que si $N(0) = \eta$ entonces $N(t) = \eta\ \forall t$. Que estas funciones constantes son soluciones lo podemos checar directamente de la ecuación diferencial $N' = N(\eta - N)$; el miembro izquierdo se anula (la derivada de una función constante es cero) y lo mismo ocurre con el derecho. Estas soluciones constantes son conocidas como soluciones de equilibrio.

Observación. En general para una ecuación del tipo $N' = f(N)$, las funciones de la forma $N(t) = \alpha$, $\forall t$ donde α es un cero de f, son soluciones de equilibrio.

Ahora terminaremos el análisis de este modelo discutiendo qué valor de η debe utilizarse en la ecuación (5).

En la sección anterior, para proponer el valor del parámetro k resultó suficiente conocer N_0 y el valor $N(t_1)$ para un tiempo $t_1 \neq 0$, cualquiera. Si procedemos en este modelo con la misma idea, nos topamos con la dificultad de resolver la ecuación trascendente

$$N(t_1)e^{-\eta t_1} - N_0 = -N(t_1)N_0/\eta \tag{7}$$

para encontrar el valor del parámetro η.

Geométricamente, resolver esta ecuación significa encontrar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones:

$$f(x) = N(t_1)e^{-xt_1} - N_0 y g(x) = -N(t_1)N_0/x.$$

Como $N(t_1), N_0$ y t_1 son números positivos, tenemos una situación como la que muestra la siguiente figura.

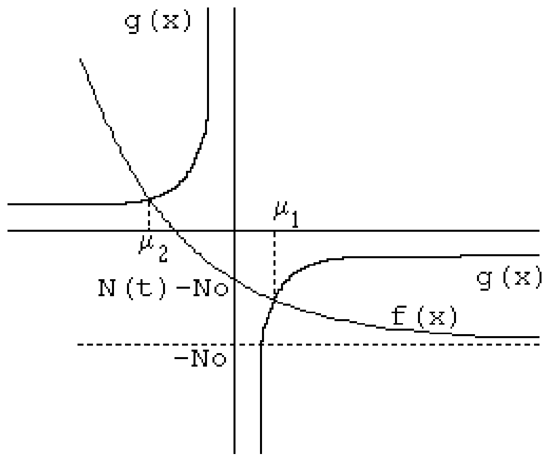


Figura 4

En esta figura podemos ver que se dan dos intersecciones, una para $x = \eta_1$ y otra para $x = \eta_2$. Como en nuestro problema no tiene sentido un valor negativo de η, el número que buscamos es η_1.

Dado que no podemos resolver analíticamente la ecuación (6), no será posible encontrar exactamente a η_1 y habrá que recurrir a algún método numérico para dar una aproximación. Esto se puede hacer utilizando algún algoritmo (como el famoso método de Newton) para encontrar los ceros de la función $F(x) = f(x) - g(x)$ que coinciden con las intersecciones antes mencionadas.

Capítulo 3

ANALISIS GEOMETRICO DE LA ECUACION DE PRIMER ORDEN

3.1 Campo de Direcciones

El caso más general de ecuación de primer orden está representado por la expresión

$$F(x, y, y') = 0$$

En la discusión siguiente nos ocuparemos sólo de las ecuaciones para las cuales se puede despejar y' como función de x y de y es decir aquellas del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Las soluciones de (1) son funciones y las podemos representar gráficamente como una curva en el plano xy. Dejemos que sea D_f el subconjunto del plano donde está definida la función (ver figura 1). Conside- remos un punto cualquiera $(x_0, y_0) \in D_f$ y $y(x)$ una solución de (1) tal que su gráfica pase por el punto (x_0, y_0) esto es que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Entonces la ecuación (1) nos dice que $f(x_0, y_0)$ es el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de $x(y)$ en el punto (x_0, y_0).

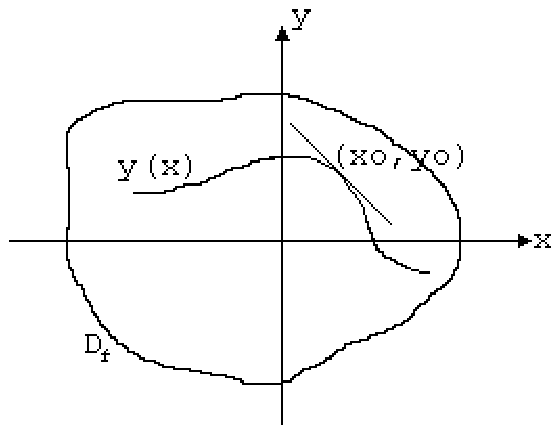


Figura 1

Así de la ecuación diferencial, específicamente de la función $f(x,y)$, conocemos en cada punto de D_f una tangente. Esto lo podemos visualizar si en cada punto $(x,y) \in D_f$ nos imaginamos un segmento con la dirección que $f(x,y)$ determina (ver figura 2).

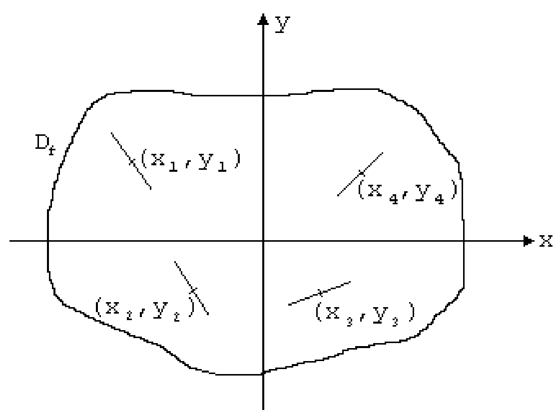


Figura 2

Un subconjunto del plano como éste, en el que para cada punto se ha definido una dirección, es llamado campo direccional.

En estos términos lo que se ha hecho al plantear la ecuación (1) es definir un campo direccional y el problema de encontrar sus soluciones es el de encontrar aquellas curvas en con la propiedad de ser tangentes en cada punto al campo direccional dado.

Ejemplo: La ecuación diferencial $y' = y^2$ define un campo direccional en todo el plano cuyas direcciones son constantes a lo largo de rectas paralelas al eje x.

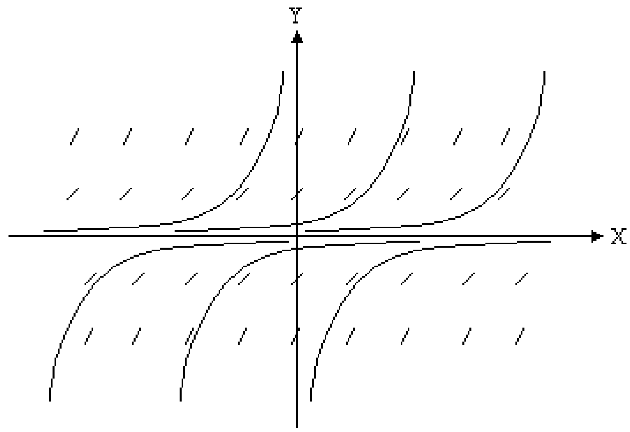


Figura 3

El dibujar algunos segmentos representativos de las direcciones de campo sugiere que las gráficas de las soluciones son curvas como las que aparecen en la figura 3.

Observación: Debido a que la dirección, que define el campo de la ecuación $y' = y^2$, en cada punto del plano depende solamente de la coordenada y, entonces para cualquier y_0 los puntos de laforma (x, y_0), con $x \in$ R, se encuentran rodeados de un campo direccional idéntico y por lo tanto, como puede notarse en la figura 3, las soluciones pueden obtenerse una de otra haciendo traslaciones en la dirección del eje x.Así mismo podemos afirmar que en general para una ecuación del tipo $y' = f(y)$, las gráficas de las soluciones se obtienen una de otra haciendo traslaciones en la dirección del eje x. En contrate con esto, en el capítulo I vimos que las soluciones de la ecuación $y' = f(x)$ difieren entre sí por una constante y por lo tanto sus gráficas son traslaciones unas de otras en la dirección del eje.

La ecuación de este ejemplo puede resolverse analíticamente. Sus soluciones son las funciones de la forma. $y = -\frac{1}{x+c}$,cuyas gráficas son como muestra la figura 4. Comparese las gráficas de la figuras 4 y 5.

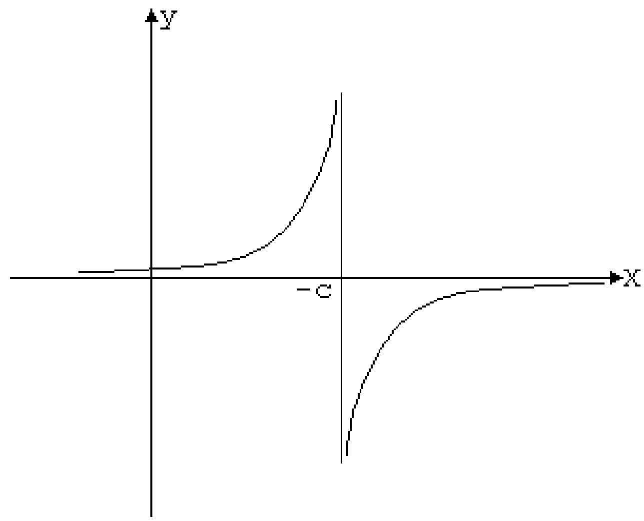


Figura 4

Para la ecuación que acabamos de considerares muy fácil encontrar una fórmula general de sus soluciones y comprobar la validez de los resultados geométricos. Esta no es la situación general, por el contrario,en la mayoría de los casos es imposible encontrar expresiones elementales para las soluciones lo cual hace conveniente, si no necesario, un análisis geométrico para obtener conocimiento referente a las soluciones.

Ejemplo: $y' = x^2 + y^2$

En el ejemplo anterior después de notar que el campo direccional era constante a lo largo de rectas paralelas al eje x procedimos a dibujar segmentos direccionales a lo largo de estas rectas y de esta manera pudimos obtener la forma de las gráficas de las soluciones. En el presente ejemplo el campo direccional depende tanto de x como de y.En consecuencia no es constante a lo largo de rectas paralelas aalguno de los ejes. A pesar de esto podemos utilizar el mismo método y encontrar las curvas que unen los puntos de igual dirección (estas son llamadas curvas isoclinas) que, para el presente ejemplo, son círculos con centro en el origen. Así por ejemplo en el círculo de radio 2 tenemos que $x^2 + y^2 = y' = 4$ lo que indica que,. para cualquier punto sobre éste, la correspondiente dirección será la de una recta de pendiente 4. Ver figura 5.

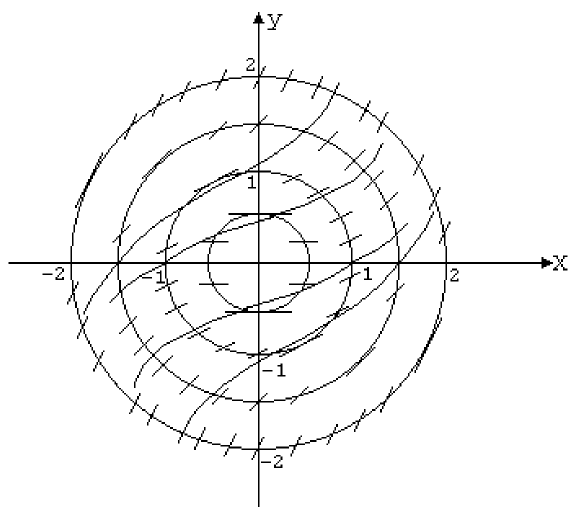


Figura 5

3.2 El Problema de Existencia de Soluciones

Consideremos la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ siendo f tal que:

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x \text{ es racional} \\ -1 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{array} \right\}$$

La función f determina en el plano xy un campo direccional. Este campo no depende de y. Por lo tanto es constante a lo largo de cualquier recta paralela al eje y las direcciones cambian discontinuamente del valor 1 al valor -1 a medida que nos movemos en la dirección del eje x. Es en vano tratar de encontrar una familia de curvas que sean tangentes a un campo como éste. Tal familia no existe.

Esto nos hace ver que si tenemos la ecuación $y' = f(x,y)$ con $f(x,y)$ definida en una región R del plano, entonces el problema de encontrar las soluciones de esta ecuación no siempre podrá resolverse. Esta observación sugiere la siguiente pregunta: ?‘Qué debe satisfacer $f(x,y)$ en R para que tales curvas existan?

Claramente es la discontinuidad de f lo que imposibilita el ejemplo anterior, la existencia de curvas tangentes al campo direccional. Por el contrario, si $f(x,y)$ es continua en R la situación cambia. En este caso, si dejamos que el segmento direccional correspondiente a un punto arbitrario $(x_0, y_0) \in$ R se mueva en su propia dirección, adoptando después de cada movimiento la nueva dirección correspondiente al punto al que se ha trasladado, entonces este segmento se desplazará, en la región R cambiando dirección de manera contínua y dibujando en esta región una curva lisa. Este razonamiento intuitivo sustenta la plausibilidad del siguiente teorema.

3.3 Teorema (de Peano)

Sea $f(x,y)$ continua en un abierto, R, del plano. Entonces dado cualqui- er punto $(x_0,y_0) \in$ R existe una solución de la ecuación $y' = f(x,y)$ tal que su gráfica pasa por el punto (x_0,y_0).

3.4 La Unicidad de las Soluciones

En el capítulo I consideramos la ecuación $y' = f(x)$ y vimos que el hecho de que f sea continua nos garantiza que, dado x_0 en el dominio de continuidad de f y y_0 un real arbitrario, existe una solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (x_0, y_0) y esta es única. De acuerdo al teorema de Peano, la continuidad de $f(x, y)$ en una región R también garantiza que por cada punto (x_0, y_0) de R pasa una solución de la ecuación $y' = f(x, y)$. ¿Será cierto que la continuidad de $f(x, y)$ garantiza también que por cada punto de R pasa una única solución?. El análisis del siguiente ejemplo nos dará la respuesta.

Ejemplo:

$$y' = y^{2/3}$$
$$y'y^{-2/3} = 1$$
$$\frac{d}{dx}(3y^{1/3}) = 1$$
$$3y^{1/3} = x + c$$
$$y = (\frac{x}{3} + k)^3, k = cte.$$

Las funciones de esta familia definidas en todo R son soluciones, pero la expresión $y = (\frac{x}{3} + k)^3$ no es la solución general de la ecuación pues $y(x) = 0$, $\forall x \in$ R es solución y no es elemento de la familia. Por otra parte cada una de las funciones de la familia se anula en el correspondiente valor $x = -3k$ (ver figura 6).

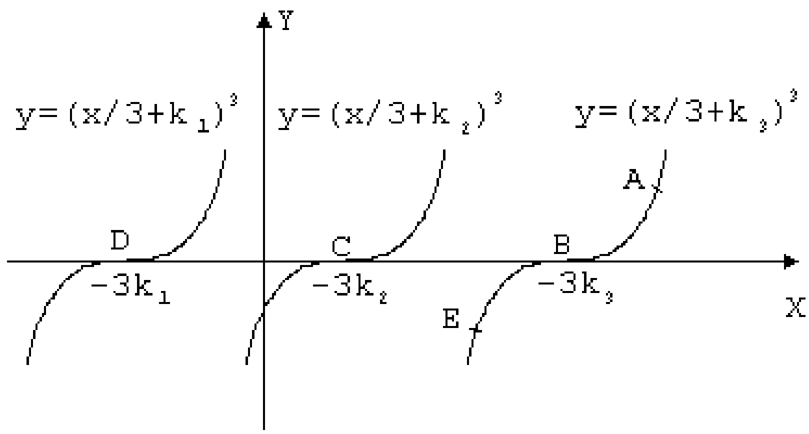


Figura 6

Esto quiere decir que, para cualquier número k, por el punto $(-3k, 0)$ del plano pasan al menos dos soluciones: $y = 0$ y $y = (\frac{x}{3} + k)^3$. Si analizamos con más cuidado situación, notamos que realmente por cada punto del plano pasan infinitas soluciones, curvas como $ABCE$ o $ABCDF$ también son soluciones que tienen muchos puntos en común.

El análisis de este ejemplo nos ha mostrado una ecuación diferen- cial cuyo campo direccional es continuo y sin embargo no satisface la condición de unicidad. Esto quiere decir que para garantizar esta condición es necesario hacer hipótesis adicionales sobre la función f. Puede demostrarse que una condición suficiente (pero no necesaria) para que por un punto $(x_0, y_0) \in$ R pase una única solución, es que exista $\frac{\partial f}{\partial y}$ en R y sea continua.

3.5 Campos con Direcciones Verticales

Hemos visto que la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ define un campo direccional en aquella región del plano donde la función $f(x, y)$ esta definida. Este campo no puede tener direcciones verticales (paralelas al eje y) pues, a tales direcciones habrían de corresponder pendientes infinitas y $f(x, y)$ en su dominio debe tomar valores reales. Por esta razón las curvas tangentes a él son gráficas de funciones. (Una curva lisa[1] en el plano xy, que no pueda entenderse como gráfica de una función de variable x, tiene necesariamente alguna tangente vertical).

[1] Una curva lisa es aquella que no tiene “picos" y es contínua.

Este análisis nos permite además concluir que no cualquier curva lisa en el plano xy que pueda entenderse como gráfica de una función de x puede ser solución de alguna ecuación diferencial del tipo $x' = f(x, y)$.

Ejemplo: Claramente una función cuya gráfica sea como se muestra en la figura 7 es lisa y no puede ser solución de una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$ pues en el punto (x_0, y_0) no está definida la derivada.

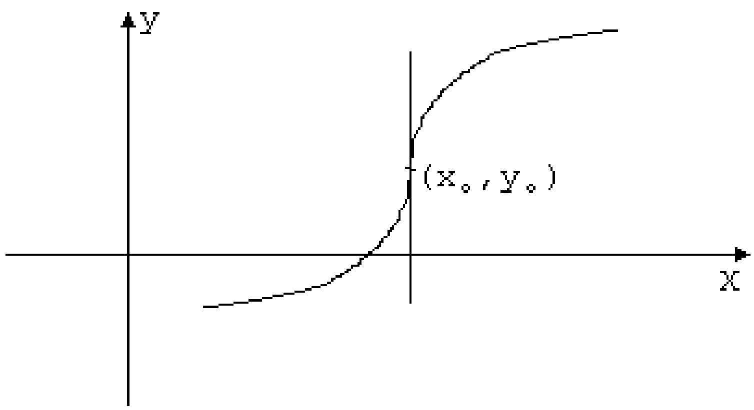


Figura 7

Ejemplo: Considere la ecuación

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

$$y^2 y' = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^3}{3}\right) = 1$$

$$\frac{y^3}{3} = x + c$$

$$y = \sqrt[3]{3x + 3c} = \sqrt[3]{3x + k}$$

k una constante arbitraria.

Las funciones de la familia están definidas en todo el plano y sus gráficas, como se pueden ver en la figura 8, no tienen derivada en el punto $-k/3$ lo que indica, contrario a las primeras apariencias, que estas funciones, pensándolas definidas en todos los reales, no son soluciones de la ecuación diferencial.

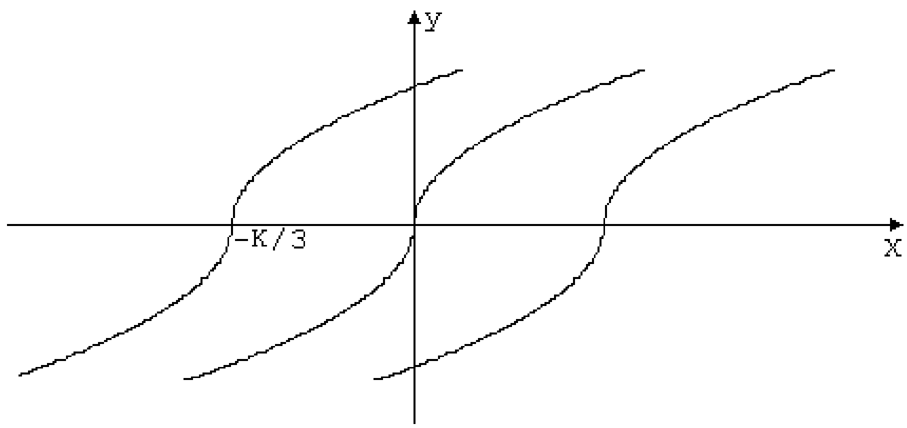


Figura 8

De hecho, si sustituimos en la ecuación tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+k)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+k)^2}}$$

igualdad que se verifica solamente si $x \neq -k/3$. Por lo tanto la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{y^2}$ no tiene alguna solución definida en todos los reales y una función de la familia (A) es solución sólo si tomamos como dominio para ella un subconjunto de los reales que no contenga al correspondiente punto $-k/3$.

Eliminando al punto $-k/3$ del dominio de estas funciones estamos prohibiendo que las correspondientes gráficas crucen el eje x restrición que, por otra parte, pudimos haber notado directamente de la ecuación diferencial, donde la función $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$ no está definida cuando $y = 0$.

En el ejemplo anterior pudimos notar que el campo direccional de la ecuación $y' = \frac{1}{y^2}$ está definido solamente en los dos semiplanos que no contienen al eje x y por lo tanto sólo podemos encontrar curvas tangentes a él que yazcan en solamente uno de ellos. Este campo direccional, sin embargo puede ser extendido a la región donde no está definido de tal manera que el campo total resultante sea continuo, esto es, existe una dirección, la vertical, que si se define para los puntos del eje x entonces resulta un campo continuo. Por esta razón la discontinuidad que este campo presenta no se debe a la conformación misma de éste sino a que el lenguaje que hemos utilizado para describir el campo tiene limitaciones que le impiden definir direcciones paralelas al eje de la variable dependiente[2]. Como la discontinuidad no es intrínseca a la naturaleza del campo entonces podríamos buscar otra forma de definirlo en la que no aparezcan discontinuidades.

En el ejemplo anterior, como ya hemos indicado, el problema para definir un campo direccional en todo el plano usando la ecuación $y' = \frac{1}{y^2}$, radicaba en que una función $y(x)$ derivable, no puede tener tangentes verticales (paralelas al eje y) esto sugiere que si, para definir el campo direccional, consideramos a y como variable independiente y a x como dependiente, entonces será posible definir el campo donde las correspondientes direcciones son paralelas al eje y pues esta variable ya no juega el papel de dependiente sino de independiente.

El cambiar los papeles de x por los de y significa considerar las funciones inversas $x(y)$ y escribir, para definir el campo, una ecuación $x' = g(y, x)$ para que el campo de esta ecuación coincida con el de $y' = \frac{1}{y^2}$ donde este último está definido, hacemos $x' = y^2$. El campo de esta ecuación no sólo está definida donde lo estaba el de la ecuación original sino que lo está en todo el plano; cuando $y = 0$ (en el eje x), las direcciones que define son paralelas al eje y.

Las soluciones de $\frac{dx}{dy} = y^2$ están dadas por la ecuación $x(y) = \frac{y^3}{3+c}$ $\forall y \in$ R y sus gráficas (figura 9) ahora si “pintan” en el eje x.

[2] Esta limitación tiene origen en el hecho de que para cuantificar las pendientes de rectas usamos números reales y este conjunto resulta “chico" para este propósito pues después de haber asignado direcciones de cada número real, resta una dirección y ningún real que asignarles.

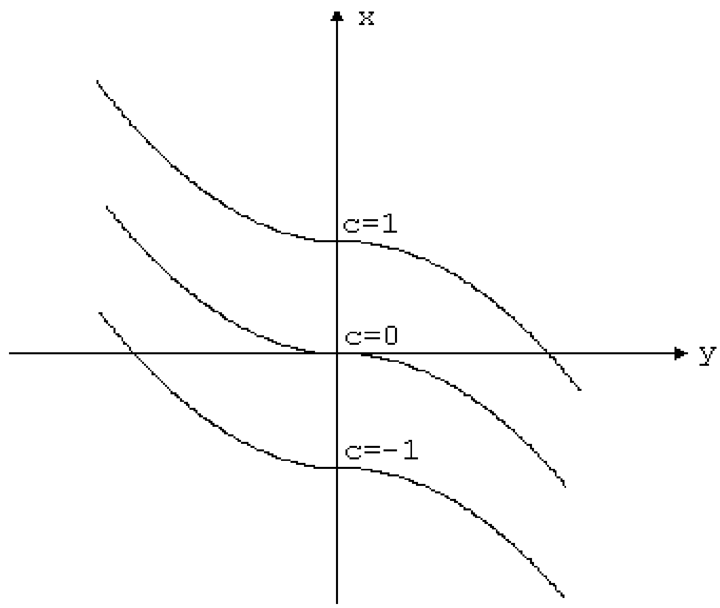


Figura 9

NOTA 1. La extensión que hemos hecho para el campo direccional de la ecuación $y' = \frac{1}{y^2}$ la podremos hacer en general para una ecuación $y' = f(x, y)$ siempre que el campo de ésta presente el problema de direcciones verticales y no tenga direcciones horizontales. Para esto basta considerar el campo de la ecuación $dx/dy = 1/f(x, y)$ en todos aquellos puntos (x, y) donde $f(x, y)$ esté definida y naturalmente hacemos $\frac{dx}{dy} = 0$ donde $\lim f(x, y) = \pm\infty$.

NOTA 2. Hemos visto un ejemplo de campo direccional discontinuo que puede ser extendido continuamente. Esto no quiere decir que siempre que el campo direccional definido por la ecuación $y' = f(x, y)$ sea discontinuo, este puede extenderse continuamente. Por el contrario existen ejemplosf de ecuaciones, más adelante veremos alguno, cuyos campos direccionales presentan discontinuidades que son característica intrínseca del propio campo y no es posible salvarla de manera alguna.

3.6 Campos con Direcciones Verticales y Horizontales

En la sección anterior vimos que existe una estrecha relación entre las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \tag{2}$$

La relación está básicamente en que:

i) Si $f(x,y)$ es continua y diferente de cero en R entonces en este conjunto el teorema de Peano garantiza la existencia de soluciones tanto de (1) como de (2) y las soluciones de (2) son las inversas de las soluciones de (1). En este caso decimos que (1) y (2) son equivalentes en el sentido de que sus soluciones, entendidas como curvas en el plano, son las mismas.

ii) Cuando $f(x,y)$ es continua en R pero $f(x,y) = 0$ en $H \subset R$ entonces por cada punto de R pasa una solución de 1, pero como $1/f(x,y)$ no está definida en H, no hay soluciones de (2) que pasen por estos puntos. Obviamente en la región $R - H$ las gráficas de las soluciones de (1) y (2) coinciden.

Por lo que hemos visto ni la ecuación (1) ni la (2) sirve para definir un campo direccional arbitrario, la (1) sirva para definir campos direccionales que no contengan direcciones paralelas al eje y y la ecuación (2) para los que no tengan direcciones paralelas al eje x.

Si queremos trabajar con un campo direccional con direcciones tanto verticales como horizontales entonces habremos de tomar en cuenta ambas ecuaciones, la (1) para la región donde no haya direcciones verticales y la (2) donde esto ocurre.

De este manera, "pegando" los campos direccionales definidos por ambas ecuaciones y haciendo lo mismo para las correspondientes soluciones podemos obtener el campo direccional total así como el conjunto de curvas tangentes a él. Este procedimiento, aunque no parezca muy elegante, nos permite tratar el problema de definir un campo direccional arbitrario y encontrar las curvas tangentes a él, que obviamente ya no tendrán porqué ser gráficas de funciones. Las curvas tangentes al campo direccional definido por las ecuaciones (1) y (2) son llamadas curvas integrales tanto de la ecuación (1) como de la ecuación (2).

Ejemplo:

Encontraremos el campo direccional y las curvas tangentes a él definido por las ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad , \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

El campo direccional de la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ no está definido en el eje x y el de $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ no lo está en el eje y.

De $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ podemos ver que para cada punto (x, y) del plano con $y \neq 0$, la dirección asociada es la perpendicular al segmento que va del origen al punto (x, y), y usando la ecuación $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ podemos ver que las direcciones en el eje x son perpendiculares a este como se muestra en la figura 10. Esto sugiere que las curvas integrales de estas ecuaciones sean círculos con centro en el origen.

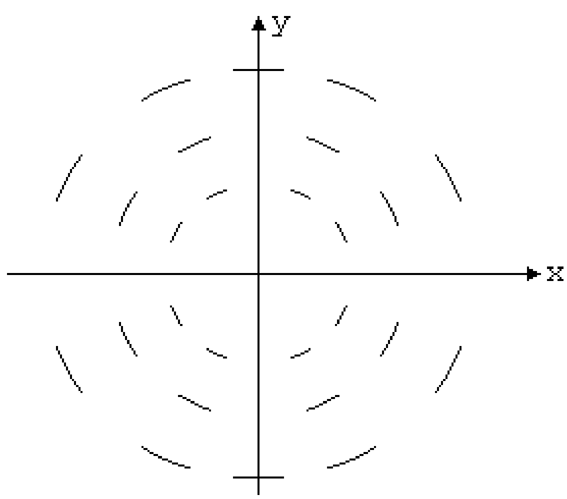


Figura 10

Observación: No hay que pasar por alto que ninguna de las ecuaciones, (1) o (2), define dirección en el orígen. En este punto está indefinido el campo y no sólo esto sino, que la discontinuidaddd que este presenta es esencial pues no es posible definir en él alguna dirección de tal manera que el campo resultante sea continuo.

3.7 Otra Forma de Definir un Campo de Direcciones

De acuerdo con la discusión de las secciones anteriores, hemos visto que a partir de una función f : $\mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$, si interpretamos los valores $f(x, y)$ como pendientes, podemos definir un campo direccional en el plano. Esta forma de definir un campo de direcciones no es la única posible y hemos visto que tiene limitaciones para definir un campo direccional arbitrario.

Otra forma de definir un campo direccional es mediante una función F : $R \subset \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ podemos pensar que ésta a cada punto $(x, y) \in R$ le asocia un vector del plano (ver figura 11), cada uno de estos vectores

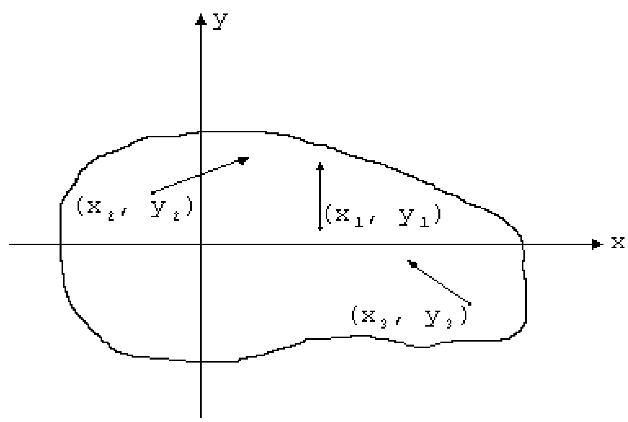


Figura 11

tiene dirección, sentido y magnitud, pero basta tomar en cuenta la dirección de cada uno de ellos para que en R quede definido un campo direccional.

Observación: Un campo direccional definido de esta manera puede tener direcciones, tanto verticales, como horizontales. De hecho si

$$F(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

el campo tendrá direcciones verticales en aquellos puntos (x, y) donde $A(x, y) = 0$ y horizontales donde $B(x, y) = 0$ donde $A(x, y) = B(x, y) = 0$ y el vector $F(x, y)$ no define dirección alguna.

Tengamos pues un campo direccional definido por

$$F(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) \ \forall \ (x, y) \in R \subset \mathsf{R}^2$$

y consideremos ahora el problema de encontrar las curvas tangentes a este campo. En consecuencia con la observación anterior, las curvas tangentes a este campo no tienen porqué ser gráficas de funciones ni de la variable x ni de la variable y.

El problema de encontrar curvas tangentes al campo dado por $F(x, y)$, es el mismo que el de encontrar curvas ortogonales al campo dado por

$$F^{\perp}(x, y) = (-B(x, y), A(x, y)).$$

Consideremos para las curvas buscadas una parametrización,

$$\gamma(t) = ((x(t), y(t)),$$

tal que $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0\ \forall t$, entonces como $\gamma'(t) = ((x'(t), y'(t))$ es un vector tangente a la curva (figura 12)

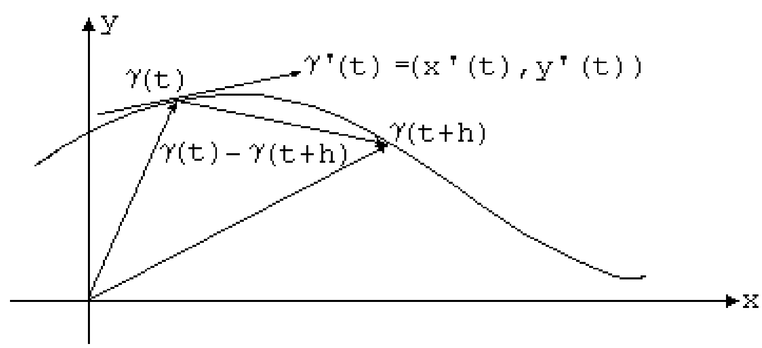


Figura 12

la condición de ortogonalidad queda formulada, en términos del producto escalar de dos vectores, de la manera siguiente:

$$(-B, A) \cdot (x', y') = 0$$

$$-Bx' + Ay' = 0$$

y para cualquier $h \neq 0$

$$-Bx'h + Ay'h = 0$$

o sea

$$-Bdx + Ady = 0.$$

Capítulo 4

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

4.1 Introducción

En este capítulo nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. La forma general de tales ecuaciones es:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0.$$

No existe un método que nos permita encontrar una fórmula general que represente a todas las soluciones de una ecuación como esta. Esto no se puede hacer ni siquiera para las ecuaciones de la forma:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

Entre las ecuaciones del tipo (1) existe una clase muy importante, aquellas para las que

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y - b(x)$$

Este tipo de ecuaciones son llamadas ecuaciones diferenciales li- neales de segundo orden y son interesantes porque surgen en la práctica científica al estudiar matemáticamente algunos sistemas dinámicos y porque son susceptibles de un tratamiento algebráico que sirve para estudiar sus soluciones.

Antes de entrar al estudio de las ecuaciones lineales de segundo orden, en las próximas dos secciones trataremos dos casos particulares de la ecuación

(1). En el capítulo I vimos que el problema de resolver una ecuación de orden n de la forma
$$y^{(n)} = f(x)$$
consiste en resolver n veces una ecuación de primer orden de la forma $y' = f(x)$. Esta situación no es la misma para cualquier ecuación de orden n. En particular el problema de resolver una ecuación de segundo orden no se puede reducir, en todos los casos, a resolver por separado dos ecuaciones de primer orden. Para las dos clases de ecuaciones que consideraremos a continuación la reducción de orden es operativa. Más adelante, veremos que esta reducción de orden no es necesaria para encontrar las soluciones de algunas ecuaciones de segundo orden.

4.2 La Ecuación $y'' = f(x, y')$

Consideremos una ecuación del tipo
$$y'' = f(x, y'), \tag{2}$$
por ejemplo
$$y'' = xy'$$
si definimos una nueva función
$$z = y' \tag{3}$$
sustituimos en la ecuación (2) obtenemos la siguiente ecuación de primer orden
$$z' = f(x, z) \tag{4}$$
si esta última ecuación la pudieramos resolver entonces las solucines de (2) se encuentran resolviendo la ecuación (3) y el problema de segundo orden quedaría reducido a resolver ecuaciones de primer orden: (3) y (4).

Para el ejemplo dado anteriormente las ecuaciones (3) y (4) toman la forma
$$z = y'$$
$$z' = xz$$

la segunda ecuación tiene variables separadas y sus soluciones están dadas por la fórmula general $z = c_1 e^{x^2/2}$. Sustituyendo z en la primera la ecuación obtenemos que

$$y' = c_1 e^{x^2/2}$$

resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos la expresión

$$y = c_1 \int e^{x^2/2} dx + c_2$$

para las soluciones de la ecuación de segundo orden $y'' = xy'$.

4.3 La Ecuación $y'' = f(y, y')$

Consideremos ahora la ecuación

$$y'' = f(y, y') \tag{5}$$

y como ejemplo

$$y'' = \frac{(y')^3}{y^2}$$

si en este tipo de ecuación se hace la sustitución $y' = z$ obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = f(y, z)$$

con el inconveniente de que es una relación entre las tres variables x, y, z. Sin embargo, suponiendo que la función $y(x)$ es invertible, podemos pensar a z como $z(x(y))$, es decir, como función de y. Por la reglas de la cadena tenemos entonces que

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} \ ,$$

despejando y aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy}(\frac{dx}{dy})^{-1} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

así para encontrar las soluciones de (5) solo hay que resolver la ecuación de 1er. orden

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z) \tag{6}$$

y sustituir las soluciones en la ecuación

$$\frac{dy}{dz} = z \tag{7}$$

para encontrar $y(x)$.

En el ejemplo la ecuación (6) toma la forma

$$z\frac{dz}{dy} = \frac{z^3}{y^2}$$

separando variables se obtienen las soluciones

$$z(y) = \frac{1}{((1/y) - c_1)},$$

sustituyendo en (7) e integrando obtenemos la ecuación

$$\ln(y) - c_1 y = x + c_2$$

que nos da en forma implícita la relación entre la variable x y la variable y. Observese que por ser esta una ecuación trascendente no podemos despejar la función $y(x)$ para obtener la fórmula general de las soluciones de la ecuación original.

4.4 Ecuaciones Lineales

Una ecuación diferencial del tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x) \tag{8}$$

se conoce como ecuación lineal de segundo orden. Así mismo por una ecuación lineal de orden n, se entiende una del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x).$$

En esta sección estudiaremos solamente el caso de segundo orden pero los resultados que obtendremos se pueden generalizar para ecuaciones de orden superior se dice que la ecuación (8) es homogénea si $b(x) \equiv 0$ para toda x, y no homogénea en caso contrario.

Entre las propiedades más importantes de la ecuación (8) está la interesante relación que existe entre sus soluciones y las soluciones de la correspondiente ecuación homogénea, es decir la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{9}$$

La relación es la siguiente: Si Y_0 es la solución general de (8), Y_0 es la solución general de (9) y y_p es una solución cualquiera de (8) entonces

$$Y(x) = y_p(x) + Y_0(x)$$

Este resultado se apoya en el razonamiento siguiente: Si y_0 es una solución de (9) entonces $y_p + y_0$ es solución de (8). Esto demuestra que $Y \supset y_p + Y_0$. Además, si y es solución de (8) entonces existe $(y - y_p)$ solución de (9) tal que $y = y_p + (y - y_p)$. Lo que demuestra que $Y \subset y_p + Y_0$.

Habiendo hecho esta abstracción, el problema de resolver la ecuación (8) se convierte en el de resolver (9) y encontrar una solución cualquiera de (8).

Antes de proceder al estudio de las soluciones de las ecuaciones lineales, conviene que veamos bajo que condiciones podemos garantizar que estas existen.

Teorema: (de existencia y unicidad) Si:

i) $p(x), q(x)$ y $b(x)$ son continuas en $[a, b]$

ii) $x_0 \in [a, b]$

iii) $y_0, y_1 \in \mathrm{R}$

entonces existe una y sólo una solución de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x),$$

definida en todo el intervalo $[a, b]$, con la propiedad de que

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1.$$

Así, bajo las hipótesis de este teorema, dado cualquier punto en la franja del plano entre los puntos a y b existe una solución que pasa por él. A diferencia de lo que ocurría con las ecuaciones de primer orden ahora no hay única solución con esta propiedad, pero sí hay una única que pase por el punto en cuestión con una pendiente dada.

4.5 La Ecuación Homogénea

Es muy fácil verificar que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación homogénea entonces, para cualquier pareja de constantes reales c_1 y c_2, la función $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ también es solución. En álgebra lineal la expresión $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ se conoce como una combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2.

Proposición: Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

entonces cualquier combinación lineal de ellas también es solución.

En vista de este resultado conociendo una pareja de soluciones ϕ_1, ϕ_2 entonces podemos conocer también toda una familia de soluciones determinada por los dos parámetros c_1 y c_2. Por otra parte, de acuerdo a nuestra experiencia con las ecuaciones diferenciales es de esperarse que la solución general, de la ecuación (si esta existe) involucre dos constantes por ser de segundo orden. Entonces surge la siguiente pregunta: ¿Es $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ la solución general de la ecuación? esto es, ¿será que dada ϕ una solución cualquiera se pueden encontrar cons- tantes c_1 y c_2 tales que $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$?. Apelemos al teorema de existencia y unicidad para dar respuesta a por esta pregunta. Por éste sabemos que toda solución de la ecuación lineal de segundo orden está determinada por el valor que ella y su derivada tomen en un punto dado. Así para que cualquier solución ϕ determinada por las condiciones iniciales $\phi(x_0) = y_0$, $\phi'(x_0) = y_1$ se pueda escribir como combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2, se debe cumplir que: dada cualquier terna (x_0, y_0, y_1), $x_0 \in [a, b]$, $y_0, y_1 \in$ R existan c_1 y c_2 tales que

$$\begin{aligned} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) &= y_0 \\ c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) &= y_1 \end{aligned} \qquad (10)$$

Cumpliéndose esto, la solución $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ coincide con la función ϕ en el punto x_0 y entonces, por la unicidad debe coincidir con ella en todo punto del intervalo $[a, b]$.

Para que la condición (10) se cumpla tiene que ocurrir que el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{vmatrix} = [\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'](x_0)$$

sea diferente de cero para cada $x_0 \in [a,b]$. La función

$$w(x) = [\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'](x)$$

es conocida como el Wronskiano de la funciones ϕ_1 y ϕ_2. Para poder entender lo que significa el que el Wronskiano de dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 nunca se anule, en la próxima sección daremos algunas definiciones de álgebra lineal y discutiremos una propiedad fundamental de la función $w(x)$.

4.6 El Wronskiano

Observemos que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación homogénea (9) entonces $W(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$ ó $W(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Esto se debe a que bajo tales condiciones

$$\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1 = 0$$

$$\phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2 = 0$$

multiplicando la primera ecuación por ϕ_2, la segunda por ϕ_1, y restando la primera a la segunda tenemos que

$$\phi_1\phi_2'' - \phi_2\phi_1'' + p(x)(\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1') = 0,\ \forall x \in [a,b]$$

y como $W' = \phi_1\phi_2'' - \phi_2\phi_1''$ entonces $W(x)$ cumple la ecuación

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0$$

de donde

$$W(x) = ce^{-\int^x p(s)ds}$$

y esta función se anula sólo cuando $c = 0$ ya que la exponencial siempre es mayor que cero.

Así pues, tenemos que $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ será la solución general de la ecuación (9) si el Wronskiano de estas dos soluciones no se anula en todo punto del intervalo $[a,b]$.

Obviamente $W(x)$ es la constante cero si alguna ϕ_1 ó ϕ_2 resulta ser la constante cero[1]. Por lo tanto en este caso $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ no será la solución

[1] Note que este caso es de interés pues la función constante cero es solución de (9)

general de (9), lo que era de esperarse pues en realidad $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = c\phi_1$ es una familia dependiente de un sólo parámetro y no de dos.

Supongamos que ni ϕ_1 ni ϕ_2 son la constante cero, en este caso podemos encontrar un punto en $[a, b]$ donde ϕ_1 no se anula. Como ϕ_1 es continua en $[a, b]$ existe un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ tal que $\phi_1(x) \neq 0, \forall x \in [c, d]$. En este intervalo

$$\frac{\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'}{\phi_1^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) = 0$$

de donde $\phi_2 = k\phi_1$ en $[c, d]$, con k en R. La fuinción $k\phi_1$, es también solución de la ecuación (9) y como coincide con la solución ϕ_2 en el intervalo $[c, d]$, entonces por unicidad debe coincidir con ella en todo punto del intervalo $[a, b]$.

Recíprocamente, si $\phi_2 = k\phi_1$, en $[a, b]$ entonces

$$W(x) = \phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1' = k\phi_1\phi_1' - k\phi_1\phi_1' = 0, \forall x \in [a, b].$$

Así pues queda demostrado que:

Teorema: Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación homogénea (9), entonces la familia de funciones

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$$

es la solución general de (9) si y sólo si no existe $k \in$ R tal que

$$\phi_2(x) = k\phi_1(x), \forall x \in [a, b].$$

Cuando no existe $k \in$ R tal que $\phi_2 = k\phi_1$ en $[a, b]$ se dice que las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes. Este nombre viene del álgebra lineal donde, en un contexto más general, se define el concepto de la manera siguiente:

Definición: Si ϕ_1 y ϕ_2 son elementos de un espacio vectorial[2] y cualqui- er combinación lineal de ellos igualada a cero

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = 0$, entonces se dice que ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes.

[2] Se puede demostrar que $\{\phi \mid \phi : [a, b] \to \mathrm{R}\}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales.

Fácilmente se puede demostrar que la proposición

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

es equivalente a la proposición

$$\nexists k \in \mathrm{R} \cdot \ni \cdot \phi_2 = k\phi_1$$

utilizando este lenguaje el teorema anterior se escribe como:

Teorema: Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de (9) entonces $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ es la solución general de (9) si y sólo si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones linealmente independientes.

4.7 El Uso de una Solución para Encontrar Otra

Hemos visto que a partir de dos soluciones linealmente independientes se pueden obtener todas las soluciones de la ecuación (9). En algunos casos este par de soluciones puede encontrase por pura inspección, sin embargo esto no es siempre posible. En la próxima sección veremos un método general para resolver la ecuación (9), pero aplicable solamente cuando los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son funciones constantes. Cuando estos coeficientes no son constantes el problema es más difícil y no se he podido obtener una fórmula general para las soluciones de la ecuación diferencial.

En esta sección veremos un método general para resolver la ecuación (9) a partir del conocimiento de una sola solución. La idea es producir a partir de la solución conocida otra linealmente independiente a ella. Para esto llamémosle ϕ_1 a la solución conocida y supongamos que existe una solución ϕ_2 que es linealmente independiente a ϕ_1. Entonces la función

$$\vartheta(x) = \phi_2(x)/\phi_1(x)$$

no es constante y, si la podemos encontrar, conoceremos también a ϕ_2. Busquemos entonces unas función $\vartheta(x)$ tal que $\phi_2 = \vartheta(x)\phi_1$ sea solución, es decir, que satisfaga

$$\phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2 = 0 \tag{11}$$

tenemos que

$$\phi_2 = \vartheta\phi_1$$
$$\phi_2' = \vartheta\phi_1' + \vartheta'\phi_1$$
$$\phi_2'' = \vartheta''\phi_1 + \vartheta\phi_1'' + 2\vartheta'\phi_1'.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (11) tenemos que

$$\vartheta''\phi_1 + \vartheta'(2\phi_1' + p(x)\phi_1) + \vartheta(\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1) = 0$$

y como ϕ_1 es solución de (9), la ecuación que determina a la función ϑ es:

$$\vartheta''\phi_1 + \vartheta'(2\phi_1' + p(x)\phi_1) = 0$$
$$\vartheta'' = -\frac{(2\phi_1' + p(x)\phi_1)}{\phi_1}\vartheta'$$
$$\vartheta = ce^{\left\{-\int^x \frac{(2\phi_1' + p(s)\phi_1)}{\phi_1}ds\right\}} = \frac{c}{\phi_1^2}e^{-\int^x p(s)ds}$$

de donde tomando $c = 1$

$$\vartheta(x) = \int^x \frac{e^{-\int^z p(s)ds}}{\phi_1^2(z)}dz$$

resultando en conclusión que la solución ϕ_2 buscada está dada por:

$$\phi_2 = \phi_1 \int^x \frac{e^{-\int^z p(s)ds}}{\phi_1^2(z)}dz$$

4.8 La Ecuación Lineal con Coeficientes Constantes

Ahora, consideremos la ecución

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{12}$$

donde p y q son constantes reales. La forma de la ecuación sugiere buscar soluciones que satisfagan las ecuaciones

$$y' = k_1 y$$

$$y'' = k_2 y.$$

En ese caso tendríamos que

$$y(x)(k_1 + kp + q) = 0 \tag{13}$$

y, si las constantes k_1y k_2 se escogen de tal manera que

$$k_1 + kp + q = 0,$$

entonces la función que hemos propuesto será una solución de la ecuación diferencial..

El hecho de que $y' = ky$ implica que $y(x) = ce^{kx}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación $y'' = k_1 y$ observamos que k_1 debe tomar el valor k^2. Así concluimos que la función

$$y(x) = ce^{kx}$$

es solución si la constante k cumple la ecuación

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{14}$$

entonces la función $y(x) = e^{kx}$ es solución.

La ecuación (14) es llamada la ecuación característica de la ecuación diferencial y el miembro izquierdo, el polinomio característico.

(a) En el caso en que la ecuación característica tiene dos soluciones reales diferentes, digamos r_1 y r_2 tendremos que

$$\phi_1(x) = e^{r_1 x} \text{ y } \phi_2(x) = e^{r_2 x}$$

son soluciones de la ecuación diferencial y como la razón

$$\phi_1(x)/\phi_2(x) = e^{(r_1 - r_2)x}$$

no es constante cuando $r_1 \neq r_2$ entonces la solución general de (12) será:

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

(b) En el caso en que el polinomio tenga raíces múltiples

$$r_1 = r_2 = -p/2$$

y por lo tanto obtendremos sólo una solución

$$\phi_1(x) = e^{-px/2}.$$

Utilizando el método que ya obtendremos para encontrar una solución linealmente independiente a una conocida resulta que

$$\phi_2(x) = \vartheta(x)\phi_1(x) \text{ con } \vartheta(x) = x.$$

La solución general estará dada por

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = c_1e^{-\frac{px}{2}} + c_2xe^{-\frac{px}{2}}$$

también puede ocurrir que la ecuación característica tenga dos soluciones complejas. Si una de ellas es $a + ib$ entonces la otra será su complejo conjugado $a - ib$. Las soluciones que surgen a partir de estas dos raíces son:

$$y_1(x) = e^{(a+b_i)x} \text{ , } y_2 = e^{(a-b_i)x}.$$

Estas funciones son formalmente soluciones aunque asumen valores complejos. Esto de debe a que todos los razonamientos que hemos hecho hasta aquí servirían para encontrar las soluciones conplejas (y : R $\rightarrow$ C) de la ecuación (12) con coeficientes p y q en los complejos. Como hemos supuesto coeficientes $p, q \in$ R, queremos obtener soluciones reales. Para esto usamos la fórmula de Euler ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$) para escribir las soluciones como:

$$y_1(x) = e^{ax}(\cos bx + isenbx)$$

$$y_2(x) = e^{ax}(\cos bx - isenbx).$$

Ahora, para encontrar dos soluciones reales, linealmente independientes entre sí, basta notar que

$$\phi_1(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} = e^{ax}\cos bx$$

$$\phi_2(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2i} = e^{ax}senbx$$

son soluciones pues son combinación lineal de soluciones y además son reales. Por lo tanto

$$\phi(x) = e^{ax}(c_1\text{sen}bx + c_2\cos bx)$$

es la solución general de (12).

4.9 La Ecuación no Homogenea. Variación de Parámetros

En la sección 4.4 vimos que la solución general de la ecuación no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x) = b(x) \tag{8}$$

está dada por la expresión $Y(x) = y_p(x) + Y_0(x)$ cuando se conoce la solución general de la ecuación homogénea, para encontrar la solución general de la no homogénea sólo resta encontrar una solución cualquiera de esta última. A continuación veremos un método para encontrar una solución de la no homogénea a partir del conocimiento de dos soluciones linealmente independientes, ϕ_1 y ϕ_2 de la ecuación homogénea. La idea será encontrar y_p de la forma:

$$y_p(x) = \vartheta_1(x)\phi_1(x) + \vartheta_2(x)\phi_2(x) \tag{15}$$

como queremos que y_p sea solución de (8) tiene que ocurrir que

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y = b(x) \tag{16}$$

al sustituir (15) en (16) resultará una ecuación de segundo orden para ϑ_1y ϑ_2 . Esta ecuación representa una sola condición sobre las dos incógnitas ϑ_1 y ϑ_2 . Para poder determinar estas dos funciones necesitamos imponer una condición adicional. Como

$$y_p' = (\vartheta_1\phi_1' + \vartheta_2\phi_2') + (\vartheta_1'\phi_1 + \vartheta_2'\phi_2),$$

al obtener y_p'' aparecerán en el segundo paréntesis segundas derivadas de ϑ_1y ϑ_2. Por lo tanto conviene imponer la condición adicional de que dicho paréntesis se anule y así

$$y_p' = \vartheta_1\phi_1' + \vartheta_2\phi_2' \tag{17}$$

$$y_p'' = \vartheta_1'\phi_1' + \vartheta_1\phi_1'' + \vartheta_2'\phi_2' + \vartheta_2\phi_2'' \tag{18}$$

sustituyendo (15), (17) y (18) en la ecuación (8), tenemos que ϑ_1 y ϑ_2 quedan determinadas por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} b(x) = \vartheta_1(\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1) + \vartheta_2(\phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2) + \vartheta_2'\phi_2' + \vartheta_1'\phi_1' \\ 0 = \vartheta_1'\phi_1 + \vartheta_2'\phi_2 \end{array} \right\}$$

como ϕ_1, ϕ_2 son soluciones de la ecuación homogénea, este sistema se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{c} \vartheta_1'\phi_1' + \vartheta_2'\phi_2' = b(x) \\ \vartheta_1'\phi_1 + \vartheta_2'\phi_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Resolviéndolo para ϑ_1' y ϑ_2' se obtiene que:

$$\vartheta_1' = \frac{b(x)\phi_2}{-W(\phi_1, \phi_2)}$$

$$\vartheta_2' = \frac{b(x)\phi_1}{W(\phi_1, \phi_2)}.$$

Estas ecuaciones están bien definidas pues $W(\phi_1, \phi_2) \neq 0$. Integrándolas, obtenemos la solución particular que buscamos:

$$y_p(x) = \phi_1(x) \int^x -\frac{b(s)\phi_2(s)ds}{W(\phi_1(s), \phi_2(s))} + \phi_2(x) \int^x \frac{b(s)\phi_1(s)ds}{W(\phi_1(s), \phi_2(s))}.$$

4.10 Ecuación de Cauchy-Euler

La ecuación de Cuchy-Euler es de la forma $x^2y'' + axy' + by = 0$,donde $a, b \in \Re$.para encontrar su solución, usamos la siguinte sustitución: $y = x^{m,}$ y sus derivadas:

$$y' = mx^{x-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$x^2m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^{m=0}$$

$$m(m-1)x^m + amx^m$$

$$x^m[m(m-1) + am + b] = 0$$

como x$^m \neq 0$,por ser la solución propuesta, entonces

$$m(m-1) + am + b = 0$$

$$y\ m^2 + (a-1)m + b = 0$$

es la ecuación auxiliar cuyas raíces m_1 y m_2 si son reales y diferentes dan $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$ como solución general.

Si son reales e iguales: m_1 y m_2 entonces $y = c_1x^m + c_2(\ln x)x^m$ es solución general.

Si son complejas: $m = \alpha \pm i\beta$ entonces $y = x^\alpha[A\cos(\ln x^\beta) + Bsen(\ln x^\beta)]$ es solución general.

EJEMPLO: Resolver la siguiente ecuación de Cuchy-Euler:

$$x^2y'' - xy' + 2y = 0.$$

En esta ecuación tenemos: $a = -1$ y $b = 2$, su ecuación auxiliar es:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m = 1 \pm i$$

$$\alpha = 1, \beta = 1$$

$y = x(A\cos(\ln x + Bsen\ln x)$, es la solución general.

4.11 Eciaciones de Orden Arbitrario con Coeficientes Constantes

Una ecuación diferencial con coeficientes constantes tiene la forma ge- neral:

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

donde $a_i, i = 0, 1, ..., n$ son constantes.

Su ecuación auxiliar caracteristica es:

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + ... + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0,$$

que tendrá n raices.

Estas raices pueden ser, como en el caso de segundo orden: reales o complejas, iguales o distintas.

Si las raíces son reales y distintas, la solución es:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}.$$

Si las raíces son reales e iguales, la solución es:

$$y = e^{mx}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n x^{n-1}).$$

Si las raíces son reales y de ellas unas son iguales y otras, diferentes, se usan las dos leyes anteriores según el caso; así supongamos 6 raíces:

$$m_1 \neq m_2 = m_3 \neq m_4$$

$$m_1 \neq m_4 = m_5 = m_6$$

entonces la solución es:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 x e^{m_3 x} + c_4 e^{m_4 x} + c_5 x e^{m_5 x} + c_6 x^2 e^{m_6 x}.$$

Si las raices son complejas, para cada par conjugado, la solución es:

$$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B sen \beta x).$$

Si hay otro par igual entonces:

$$y = e^{\alpha x} x(A \cos \beta x + B sen \beta x)$$

es solución, y así sucesivamente.

EJEMPLO: Resolver $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ su ecuación auxiliar es:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

cuya factorización es

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

con raíces

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3,$$

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$, es la solución general.

4.12 EJERCICIOS:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden.

1) $y'' - \frac{5}{2}y' + y = 0$
2) $y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$
3) $y'' + 2y' + 3y = 0$
4) $y'' - 2y' - 3y = 0$
5) $y'' + 10y' + 25y = 0$
6) $y'' - 4y' + 13y = 0$
7) $16y'' + 16y' + 3y = 0$
8) $y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$
9) $y'' - 6y' + 13y = 0 \in$
10) $5y" + 24y\prime - 5y = 0$
11) $y" - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$
12) $y'' - 8y' + 17y = 0$
13) $y'' - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{9}y = 0$
14) $y'' + 4y' + 5y = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes para las condiciones iniciales dadas.

1) $y'' - y = 0$ para $y(0) = 0,\ y(0) = -8$
2) $y'' + 25y = 0$ para $y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{5}) = 1$
3) $y'' - 16y = 0$ para $y(0) = 2, y'(0) = 4$
4) $y'' = 4y + 0$ para $y(\frac{\pi}{2}) = -1, y\prime(\frac{\pi}{2}) = -2$
5) $4y'' + 4\sqrt{3}y' + 3y = 0$ para $y(0) = -1, y\prime(0) = 3$
6) $2y'' - 3y - 2y = 0$ para $y(0), y\prime(0) = 5/2$
7) $114y" - 24y' + y = 0$ para $y(0) = 4, y'(0) = 2$
8) $y'' + 2y' + 8y = 0$ para $y(0) = -2, y'(0) = 1$
9) $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$ para $y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = 0$
10) $25y'' - 30y' + 9y = 0$ para $y(0) = \frac{5}{3}, y'(0) = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler:

1) $x^2y'' - 12y = 0$
2) $x^2y'' + \frac{2}{3}xy' - \frac{2}{9}y = 0$
3) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$
4) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
5) $x^2y'' + 8xy' + 10y = 0$
6) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$

Encontrar la ecuación diferencial correspondiente a la solución pro- puesta.

1) $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$
2) $y = x^{-2}(A\cos\ln x^2 + Bsen\ln x^{1/2}$
3) $y = x^3(c_1 + c_2\ln x)$
4) $y = c_1x + c_2x\ln x$
5) $y = x^{-1}(A\cos\ln x^{1/2} + Bsen\ln x^{1/2})$

Resolver para las condiciones iniciales dadas:

1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0, y(1) = 0, y'(1) = 4$
2) $x^2y'' + 2xy - 2y = 0, y(1) = 4, y'(1) = 0$
3) $x^2y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1$
4) $9x^2y'' + 3xy' + y = 0, y(1) = 3, y'(1) = 0$
5) $x^2y'' - xy' + 10y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 1$
6) $xy'' + \frac{11}{6}xy' + \frac{1}{6}y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de orden arbitrario con coeficientes constantes:

1) $y''' - 2y'' - y' + 2 = 0$
2) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
3) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
4) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$

5) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

6) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

7) $y''' - 11y'' + 35y' - 25y = 0$

8) $y^{iv} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = 0$

9) $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

10) $y^{iv} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$

11) $y^{iv} - y = 0$ para

$y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 4, y'''(0) = -2$

12) $y^{iv} + 5y'' + 4y = 0$ para

$y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 1, y''(\frac{\pi}{2}) = -1, y'''(\frac{\pi}{2}) = 0$

13) $y''' - 7y'' + 4y' + 12y = 0$

para $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 36$

14) $y''' - 2y'' + t' - 2y = 0$

para $y(0) = 5, y'(0) = 2, y''(0) = 0$

15) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

para $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2, y'''(0) = -2$

Capítulo 5

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

5.1 Introducción

En el capítulo II vimos ejemplos de problemas que surgen en la investigación científica para los cuales se pueden construir modelos matemáti-cos. Estos se refieren a sistemas tales que las leyes que rigen su comportamiento se pueden escribir matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales.

Cuando el modelo cuenta con más de una variable de estado, dos por ejemplo, es natural esperar que una sola ecuación diferencial no baste, para determinar a ambas variables de estado, sino que la ley de comportamiento quede expresada por dos ecuaciones diferenciales en las que aparezcan relacionadas ambas variables.

Un ejemplo de modelo con dos variables de estado apareció en la sección 2.3 del capítulo II cuando consideramos el problema del cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad. Para este sistema resultaban como leyes de movimiento las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g$$

que constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

En el capítulo I vimos que un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden está representado por un par de ecuaciones del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) = 0 \\ F_2(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) = 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

y el problema de resolver el sistema es el de encontrar las parejas de funciones $x(t)$, $y(t)$ que satisfacen las igualdades del sistema.

En este capítulo nos restringiremos a considerar sistemas del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, t) \end{array} \right\} \tag{2}$$

que constituyen un caso particular de los sistemas de la forma (1) que aparece frecuentemente en las aplicaciones.

El caso particular del sistema (2) donde los miembros derechos no dependen explícitamente de t,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{array} \right\} \tag{3}$$

se conoce con el nombre de sistema de ecuaciones diferenciales autónomo mientras que el sistema (2) es llamado no autónomo. La diferencia entre estos sistemas es que, en el autónomo, t aparece solamente como un parámetro mudo, mientras que en el no autónomo aparece también como variable.

Si pensamos que las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan las variables de estado de algún sistema dinámico, podemos interpretar que la aparición del tiempo como variable en el sistema no-autónomo significa que el sistema que se está modelando interactúa con el exterior. Esto puede ilustrarse con los siguientes:

Ejemplos:

A). Oscilador armónico simple. Considérese una masa m que se desliza sobre una mesa sin fricción sujeta únicamente a la acción de un resorte. Ver figura 1.

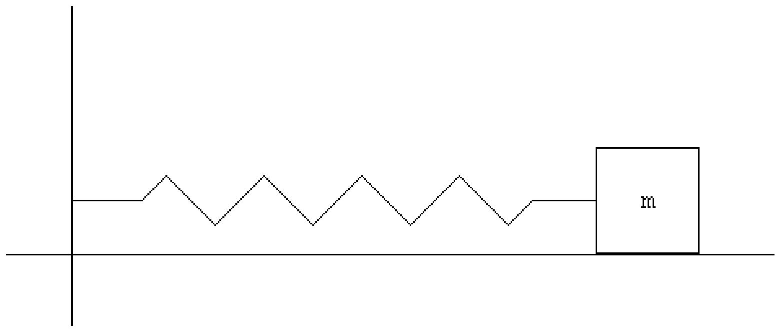


Figura 1

A semejanza del tratamiento hecho en el capítulo II para la caida de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, aquí consideraremos dos variables de estado, la velocidad y la posición. La posición, como se muestra en la figura 1, la medimos desde la posición de equilibrio de la masa del resorte.

Para un sistema de este tipo, de la relación física entre las variables y de la ley de Newton para un cuerpo sobre el que actúa una fuerza $F(x, \vartheta, t)$, tenemos que las ecuaciones que determinan sus comportamiento son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & \vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} & = & \frac{F(x,\vartheta,t)}{m} \end{array} \right\} \tag{4}$$

Experimentalmente se ha encontrado que la fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo depende únicamente de la posición y que esta es en magnitud directamente proporcional a la elongación del resorte. De esto podemos concluir que la magnitud de $F(x)$ es kx, siendo k una cons- tante positiva de proporcionalidad. Como el movimiento del cuerpo puede ser lo mismo a la derecha que a la izquierda del origen del eje de las x , y la fuerza es en la dirección positiva del eje x cuando x es negativa y viceversa, entonces para que el signo de la x nos de el signo de la fuerza necesitamos escribir

$$F(x) = -kx.$$

De esta manera cuando $x > 0$, $F(x) < 0$, y cuando $x < 0$, $F(x) > 0$, lo que indica que la fuerza actúa en la dirección negativa del eje x en el primer caso y en la dirección positiva en el segundo.

Sustituyendo la expresión para $F(x)$ en (4) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = \vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-kx}{m} \end{array} \right\}.$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo, lo que corresponde a la realidad física de que este sistema no interactua con el exterior y tiene una dinámica determinada únicamente por los elementos que lo constituyen.

B). Oscilador armónico forzado. Si ahora hacemos que sobre este sistema actúe algún agente externo, por ejemplo, un niño que con su abanico le echa aire al cuerpo, entonces este aire ejercerá una fuerza adicional sobre el resorte y ya no tendremos el mismo comportamiento que cuando el sistema no interactuaba con el exterior. La fuerza que el niño ejerce por medio del abanico no está en función de la posición del cuerpo ni de su velocidad, ésta depende de que el niño abanique o no y su magnitud, de que abanique con más o menos fuerza. Aunque esta fuerza esté sujeta al capricho del niño y no se pueda expresar en términos de las variables de estado x y ϑ, resulta, que en cada tiempo $t,$ el niño ejercerá una fuerza de una magnitud que llamaremos $f(t)$. Si de antemano conocemos la función $f(t)$, entonces podemos formular matemáticamente el problema.

La fuerza que actúa ahora sobre el cuerpo será la del resorte más la que el niño ejerce con el abanico. Si llamamos F_T a la “fuerza total” que actúa sobre el cuerpo entonces

$$F_T(x,t) = -kx + f(t).$$

sustituyendo F_T en (4) tenemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} & \frac{dx}{dt} = \vartheta & \\ \frac{d\vartheta}{dt} & = & \frac{1}{m}(-kx + f(t)) \end{array} \right\}.$$

Este es un sistema de ecuaciones no autónomo, pues la influencia del niño ha hecho aparecer en la ecuación un término que depende explícitamente del tiempo.

Ahora el tiempo juega un papel distinto. Actúa como si fuera una variable de estado, pues la forma en que el sistema se comporta a partir de un momento dado no depende únicamente del valor de la pareja (x, ϑ), sino también de en que tiempo toma los valores x y ϑ. Es decir, depende de la terna (x, ϑ, t).

En el sistema autónomo, lo que ocurra a partir del momento en que las variables del sistema tomen los valores (x, ϑ) depende únicamente de estos valores. Esto permite manejar al tiempo únicamente como parámetro y establecer el origen del tiempo arbitrariamente, diciendo que $t = 0$ cuando el sistema se encuentre en cualquier estado (x, ϑ) que que- ramos. Para el sistema no autónomo no se puede fijar la escala de tiempo de manera arbitraria pues tenemos la res- tricción de sincronizarla con la que fue usada para dar la función $f(t)$.

5.2 Equivalencia entre Sistemas de Primer Grado y Ecuaciones de Orden Superior

Para los ejemplos mecánicos que se han considerado las leyes de comportamiento han tomado la forma de un sistema de ecuaciones de primer orden. También es común encontrar que tales leyes aparezcan enunciadas como una ecuación diferencial de segundo orden, por ejemplo podemos encontrar que para el cuerpo en caída libre su ley de movimiento se escriba como

$$mx'' = mg$$

y para el oscilador armónico simple como

$$mx'' + kx = 0$$

lo que ocurre es que esas ecuaciones diferenciales de segundo orden, y los sistemas de ecuaciones de primer orden que anteriormente escribimos para los mismos problemas, son equivalentes.

En general, una ecuación de segundo orden, digamos

$$y'' = f(x, y, y') \tag{5}$$

puede convertirse en un sistema de primer orden si definimos las variables y_1, y_2 como $y_1 = y, y_2 = y'$. Haciendo este cambio de variables resulta el sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{r} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{array} \right\}. \tag{6}$$

si este sistema es resuelto de alguna manera, entonces $y_1(x)$ será solución de (5). Recíprocamente, si tenemos un sistema del tipo (6), sustituyendo y_2 por dy_1/dx en la segunda ecuación obtendremos la ecuación de segundo orden

$$y_1'' = f(x, y_1, y_1')$$

y si ésta es resuelta entonces la solución de (6) queda dada por la pareja $(y_1(x), d/dt\ y_1(x))$.

Nota: Análogamente, se puede ver que la ecuación

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n)})$$

y el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \cdots\cdots\cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{array} \right\}$$

son equivalentes.

5.3 Espacio de Fases

Consideremos un sistema del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = A(x, y, t) \\ y' = B(x, y, t) \end{array} \right\} \tag{7}$$

De acuerdo a lo que hemos convenido anteriormente, por una solución de (7) entendemos una pareja de funciones $x(t)$, $y(t)$ tal que al sustituirlas en (7) hacen valer sus ecuaciones. En consecuencia, podemos pensar que cada solución del sistema es una función F : R $\to$ R^2 con regla de correspondencia $F(t) = (x(t), y(t))$.

Ejemplo: Para el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -y \\ y' = x \end{array} \right\}$$

por inspección se encuentra que las soluciones son funciones de la forma

$$F(t) = (r\ \cos(t + c), r\ \mathrm{sen}(t + c))\ \forall t \in \mathrm{R}$$

donde r y c son constantes arbitrarias.

Para estudiar geométricamente las soluciones podemos tomar dos caminos que señalaremos a continuación:

A) Podemos considerar las gráficas de las soluciones que, entendiendo a las soluciones como funciones de R en R^2, resultan curvas en R^3. Para el ejemplo anterior éstas curvas son como muestra la figura 2.

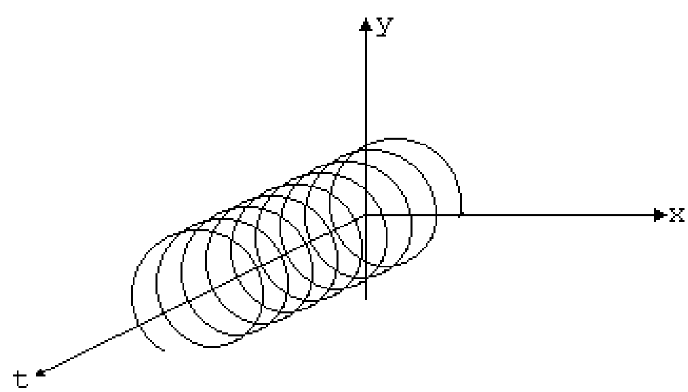


Figura 2

B) En el ejemplo considerado es relativamente fácil graficar las soluciones, pero cuando esto no es así se puede obtener una imagen de las soluciones graficando, en el plano xy , la imagen de la función $F(t)$ que representa la solución.

El plano xy donde graficamos las imágenes de las soluciones de (7) es llamado espacio de fases de (7) y las curvas, en este espacio, que constituyen las imágenes de las soluciones son llamadas curvas integrales o trayectorias en el espacio de fases del sistema (7).

Desde el punto de vista de las aplicaciones es conveniente pensar en las trayectorias del sistema en el espacio de fases por que si el sistema (7) representa algún sistema físico caracterizado por las variables de estado x e y , entonces cada punto (x, y) del espacio de fases, representa un estado del sistema y en cada tiempo t al correspondiente estado del sistema le corresponde un punto de este espacio. Así, si en cada tiempo nos fijamos en el punto del espacio fase que representa el estado del sistema en ese tiempo, tendremos que al evolucionar el sistema real de un estado a otro, lo que ocurre en el espacio fase, es que el punto que representa al sistema se moverá a lo largo de una curva; de la correspondiente trayectoria integral del sistema.

Para el ejemplo que estamos considerando, las trayectorias en el espacio de fases resultan círculos con centro en el origen.

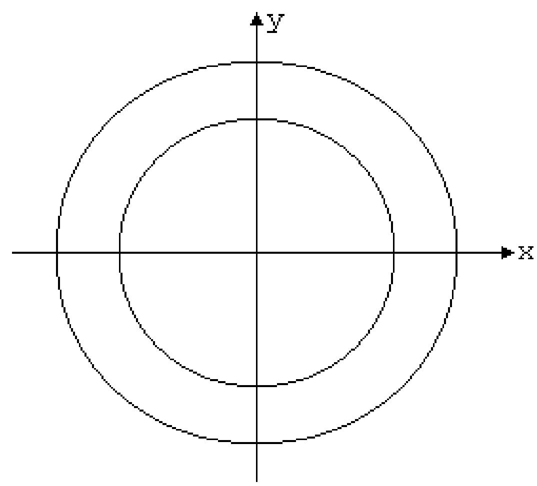


Figura 3

Este resultado, pensando que el sistema del ejemplo se refiere a algún sistema dinámico[1], nos dice que el sistema en estudio tiene un comportamiento periódico.

Nota 1. Las trayectorias del sistema en el espacio fase son las proyecciones de las gráficas de las soluciones sobre el plano xy.

[1]Si x representa la distancia de la posición de equilibrio a que se encuentra una masa unitaria en un oscilador sin fricción y constante del resorte $K = 1$, entonces las ecuaciones del ejemplo describen el comportamiento del oscilador.

Nota 2. Si $x = y(t)$ y $y = \psi(t)$ es una solución de (7) entonces éstas son ecuaciones paramétricas de la correspondiente trayectoria en el espacio de fases y eliminando el parámetro t en estas ecuaciones, obtenemos la relación entre la variable x y la variable y y que debe obedecer la correspondiente trayectoria en el espacio de fases.

Nota 3. Al obtener las trayectorias del sistema en el espacio de fases obtenemos un conjunto de puntos en el plano y, por descartar el parámetro t, perdemos información acerca de la forma en que estas curvas se van dibujando al transcurrir el tiempo.

Si el sistema es autónomo[2], una parte de la información perdida, la dirección en que se dibuja la curva al incrementar el parámetro, se puede recuperar si directamente de la ecuación analizamos el signo de x' o de y' en las diferentes regiones del plano. Hecho esto, podemos asignarle dirección a las trayectorias en el espacio de fases. Para ejemplificar consideremos el sistema (7). Sabemos que las trayectorias son círculos y de la ecuación $y' = x$, que y crece en aquellas regiones del plano donde $x > 0$ tomando esto en cuenta podemos afirmar que las trayectorias se recorren en el sentido de las manecillas del reloj como muestra la figura 4.

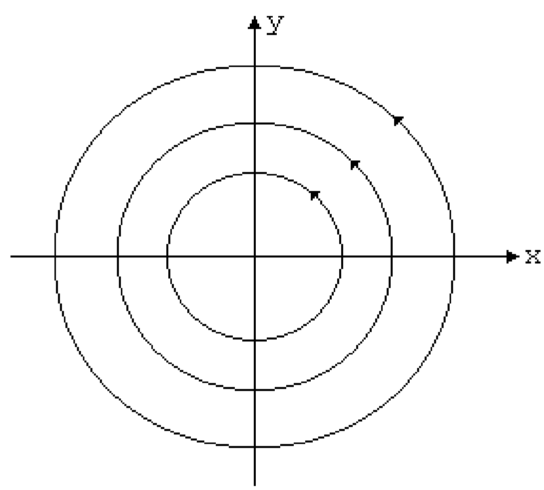


Figura 4

[2]Si el sistema no es autónomo las flechas en el espacio fase pueden invertirse al incrementar el parámetro. Analice por ejemplo $x' = -yt$, $y' = xt$ y considere el cambio de signo en t.

5.4 Campos Vectoriales

El problema de resolver el sistema autónomo

$$\left\{\begin{array}{l} x' = A(x,y) \\ y' = B(x,y) \end{array}\right\} \tag{8}$$

tiene una interpretación geométrica simple en términos de campo direccionales. La idea es fijarse en la función $F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ y notar que ésta define un vector en cada punto del plano donde A y B estén definidas. Así, la función F determina un campo vectorial en el plano xy.

Encontrar las parejas de funciones $(x(t), y(t))$ que satisfacen (8) es lo mismo que encontrar aquellas curvas lisas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con la propiedad de que si $(x(t), y(t))$ es un punto cualquiera de γ entonces

$$F(x(t), y(t)) = (x'(t), y'(t)).$$

Dicho de otra forma: resolver la ecuación diferencial (8) es encontrar la familia de curvas tangentes al campo vectorial determinado por dicha ecuación.

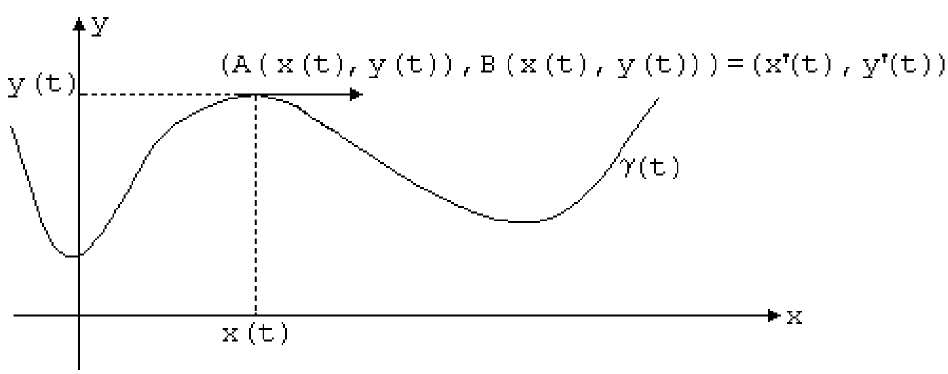


Figura 5

Nota 1: La función F también determina un campo de direcciones en aquella región del; plano donde sus funciones componentes, A y B no se anulan simultáneamente. Para esto basta considerar en cada punto del plano un segmento con pendiente B/A (o considerar el cociente A/B en aquellos puntos en los que A se anule). Entonces, el problema de resolver el sistema (8) está relacionado con el problema de encontrar la familia de curvas tangentes al campo direccional definido por F, en el sentido en que fue planteado en el capítulo III. La relación es la siguiente:

1) Al resolver (8) estamos buscando curvas tangentes al campo direccional definido por F pero que tengan además una parametrización tal que los vectores derivada coincidan en cada punto con los vectores del campo.

2) Al resolver la ecuación $-Bdx + Ady = 0$, que nos da las curvas tangentes al campo direccional definido por F, obtendremos las trayectorias en el espacio de fases del sistema (8).

Nota 2: Si la curva γ parametrizada como

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \forall t \in \mathrm{R},$$

es tal que $\gamma'(t) = F(\gamma(t))\ \forall t$, entonces

$$\forall c \in \mathrm{R}\ [\gamma(t + c)]' = F(\gamma(t + c)).$$

Esto quiere decir que las traslaciones en la dirección del eje t, de las gráficas de las soluciones del sistema (8) también son gráficas de soluciones de (8).

Nota 3: Para el sistema (8), si (x_0, y_0) es tal que

$$A(x_0, y_0) = B(x_0, y_0) = 0,$$

entonces

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

es solución.

Estas soluciones son llamadas soluciones de equilibrio, sus gráficas son rectas paralelas al eje y sus trayectorias en el espacio fase degeneran en puntos. Estos puntos son llamados puntos de equilibrio.

5.5 Teorema de Existencia y Unicidad

En esta sección presentaremos un teorema de existencia y unicidad para el sistema (7) y discutiremos algunas interpretaciones geométricas de él.

Teorema: Si $A(x, y, t)$ y $B(x, y, t)$, son continuas en una región $R \subset \mathrm{R}^3$ y (x_0, y_0, t_0) es un punto cualquiera de R entonces existe una solución $(x(t), y(t))$ del sistema (7) que cumple con

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0). \tag{9}$$

Si además[3], $A_x(x, y, t)$, $A_y(x, y, t)$, $B_x(x, y, t)$ y $B_y(x, y, t)$ son continuas en R, podemos afirmar que la solución de (7) que cumple (9) es única.

Geométricamente este resultado nos dice que si consideramos el espacio (x, y, t) (ver figura 2) y en él la región R donde se cumplen las hipótesis del teorema, entonces por cada punto de R pasa una y sólo una gráfica de solución del sistema (7).

Para el caso de los sistemas autónomos este teorema tiene consecuencias de carácter geométrico interesantes en el espacio fase.

Resultado 1: Las órbitas en el espacio de fases de un sistema autónomo no se traslapan. Esto es que: las proyecciones en el espacio de fases de las gráficas de las diferentes soluciones de un sistema autónomo son curvas que no se cortan en ningún punto. Si las curvas proyección de dos soluciones coinciden en un punto, entonces coinciden en todos sus puntos.

Demostración: Obviamente si $\varphi(t)$ es una solución y

$$F_\varphi = \{\varphi(t + c) \mid c \in \mathrm{R}\}$$

entonces a las gráficas de todas las soluciones que pertenecen a la familia F_φ les corresponde la misma proyección en el espacio de fases. Por otra parte si $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son soluciones tales que $F_{\varphi_1} \neq F_{\varphi_2}$ entonces $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ no se cortan en ningún punto, pues de lo contrario: $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = (x_0, y_0)$ y entonces considerando a $\varphi(t) = \varphi_2(t + t_2 - t_1)$ tendr?amos que $\varphi_1(t_1) = \varphi(t_1)$ pero como φ es solución, por el teorema de existencia y unicidad $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ $\forall t$ o lo que es lo mismo $\varphi_1(t) = \varphi_2(t + c)$ con $c = (t_2 - t_1)$, de donde $F_{\varphi_1} = F_{\varphi_2}$, contrario a lo que supusimos.

Resultado 2: La proyección en el espacio de fases de la gráfica de una solución del sistema autónomo, o no se corta o es cerrada.

Para demostrar este resultado es suficiente demostrar que si la mencionada proyección se corta, entonces la solución es periódica[4].

Demostración: Llamémosle $\varphi(t)$ a la solución en consideración y supongamos que $\varphi(t^*) = \varphi(t^* + c)$ para algún t^*, entonces la función $\varphi_1(t) = \varphi(t + c)$ es una solución que cumple que $\varphi_1(t) = \varphi(t^*)$ y por el teorema de existencia y unicidad $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ $\forall t$, de ahí que $\varphi(t) = \varphi(t + c)$ $\forall t$.

[3] A_x denota parcial respecto a x.

[4] Obviamente, si la solución es periódica, la trayectoria es cerrada.

Observación: Hemos demostrado también que, para el sistema autó- nomo, si la trayectoria es cerrada entonces la correspondiente solución es periódica. ¿vale este resultado para un sistema no autónomo?.

5.6 Sistemas Lineales

Los sistemas conviene clasificarlos para su estudio, en lineales y no lineales, la razón es la siguiente: para los primeros es posible hacer un estudio de carácter general que permite obtener un conocimiento bastante completo de sus soluciones. Para los no lineales la situación es mucho más complicada y se conocen pocos resultados de carácter general.

Por un sistema lineal se entiende uno del tipo:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1(t)x_1 + b_1(t)x_2 + h_1(t) \\ x_2' &= a_2(t)x_1 + b_2(t)x_2 + h_2(t) \end{aligned} \tag{10}$$

El sistema (10) es llamado sistema no homogéneo y cuando

$$h_1(t) = h_2(t) = 0 \ \forall t,$$

se le llama homogéneo.

Para un sistema de este tipo se pueden demostrar los siguientes resultados:

A) Si $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$, son soluciones de (10) en el intervalo I, entonces $(c_1x_1(t) + c_2x_2(t), (c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, es solución para cualquier $t \in I$.

B) Si (X, Y) es la solución general del sistema no homogéneo $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0)$, la solución general del homogéneo y (x_p, y_p) una solución cualquiera del no homogéneo entonces

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (x_p + \mathrm{X}_0,\ y_p + \mathrm{Y}_0)$$

C) Definiendo el wronskiano de dos soluciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como

$$W((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

entonces $W((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) = 0$ para toda t en el dominio común de las soluciones o nunca se anula.

D) Si $W((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) \neq 0$ en el dominio común de estas soluciones entonces la solución general del homogéneo esta dada por:

$$(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0) = (c_1 x_1 + c_2 x_2,\ c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

las demostraciones de estos resultados son análogas a las presentadas en el capítulo IV para las ecuaciones lineales de orden dos.

5.7 Sistemas Homogéneos con Coeficientes Constantes

Estos sistemas son de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{array} \right\} \tag{11}$$

y obviamente $(0, 0)$ es una solución de equilibrio del sistema.

5.7.1 Sistemas Desacoplados

Para comenzar el estudio de estos sistemas consideremos el caso en que $b = c = 0$. Este caso es muy simple pues las ecuaciones del sistema se desacoplan y resulta la solución general

$$(x_1, x_2) = (Ae^{at}, Be^{dt}).$$

Para analizar las trayectorias en el espacio fase podemos eliminar el parámetro en las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{at} \\ x_2 &= Be^{dt} \end{aligned}$$

resultando que

$$x_2 = cx_1^{d/a},\ c = \frac{B}{A^{d/a}}$$

así, para cada valor de la constante c tenemos una trayectoría en el espacio de fases. La forma de estas curvas depende del valor de la razón d/a: si $d/a = 1$ son rectas; si $d/a > 0$ o $d/a < 0$ son especies de parábolas o hipérbolas respectivamente.

Para estudiar con más detalle estas posibilidades analizaremos unos ejemplos.

Caso 1: $a = d$. Para ilustrar el caso supongamos primero que a y d son mayores que cero y tomemos como ejemplo al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = 2x_2 \end{array} \right\}$$

que tiene la solución general

$$(x_1, x_2) = (Ae^{2t}, Be^{2t}) \tag{12}$$

Si $A = 0$, $B \neq 0$ tenemos dos trayectorias que yacen sobre el eje x_2, una que se mueve sobre la parte positiva de este hacia ∞ y otra que sobre la parte negativa se mueve a $-\infty$. Si $B = 0$, $A \neq 0$ tenemos la misma situación pero ahora sobre el eje x_1. Si A y B son distintos de cero entonces, eli- minando el parámetro en (12), tenemos que $x_2 = (B/A)x_1$ y las trayectorias se alejan del origen a lo largo de rectas como muestra la figura 6.

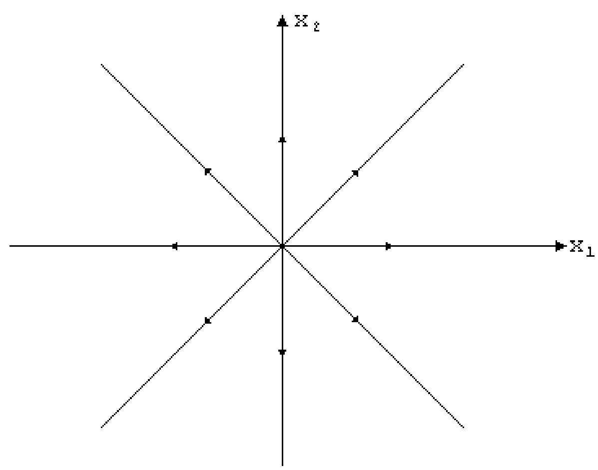


Figura 6

Nota 1: Los sistemas lineales con coeficientes constantes satisfacen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Como el origen es una solución entonces ninguna de las trayectorias rectilineas pasa por él.

Nota 2: Si a y d fueran negativos también se tendrían órbitas como en la figura (7), pero con el sentido de las flechar invertido.

Caso 2: a y d distintos y del mismo signo. Consideremos como ejemplo al sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1' = -x_1 \\ x_2' = -3x_2 \end{array} \right\}$$

que tiene la solución general

$$(x_1, x_2) = (Ae^{-t}, Be^{-3t}). \tag{13}$$

Si $A = 0$, $B \neq 0$, las trayectoriass se acercan al origen a lo largo del eje x_2 , si $B = 0$, $A \neq 0$, se acercan a lo largo del eje x_1 y si A y B son distintos de cero eliminando el parámetro en (13) obtenemos la ecuación $x_2 = (B/A^3)x_1^3$ que nos indica que las trayectorias se acercan al origen a lo largo de parábolas cúbicas como muestra la figura 7.

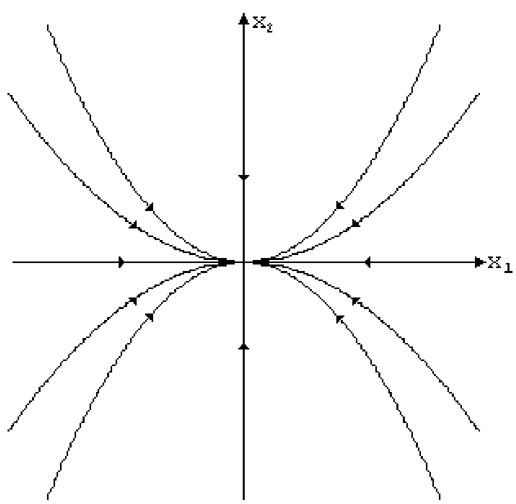


Figura 7

Nota: En el ejemplo $a/d > 1$ y tanto a como d son negativos: si $a/d < 1$ entonces la figura correspondiente quedaría como la figura 7 cambiando el eje x_1 por x_2 y viceversa; si a y d fueran positivos solo habría que invertir el sentido de las flechitas.

Caso 3:. a y d y de signos contrarios. Consideremos el ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1' = x_1 \\ x_2' = -3x_2 \end{array} \right\}$$

de solución general

$$(x_1, x_2) = (Ae^t, Be^{-3t})$$

Analizando los casos con condiciones iniciales sobre los ejes (A o B igual a cero) vemos que: sobre la parte positiva del eje x_1 las trayectorias tienden a ∞ y sobre la negativa a $-\infty$; sobre el eje x_2 las trayectorias tienden a cero. Si A y B son distintas de cero, de la ecuación $x_2 = (B/A^{-3})x_1^{-3}$ tenemos, como muestra la figura 8, que las trayectorias tienen forma hiperbólica.

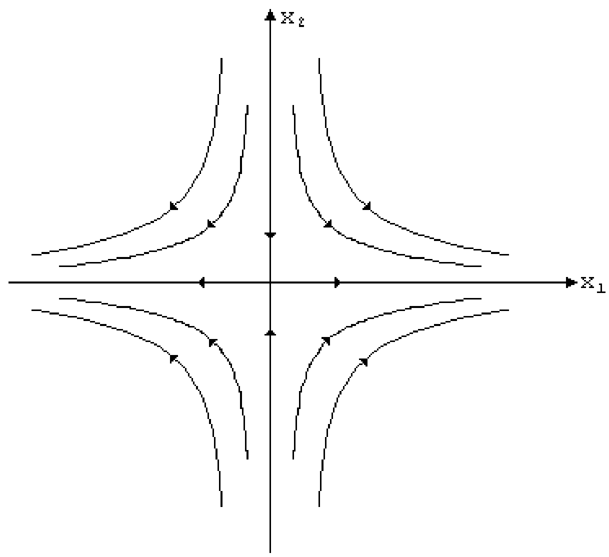


Figura 8

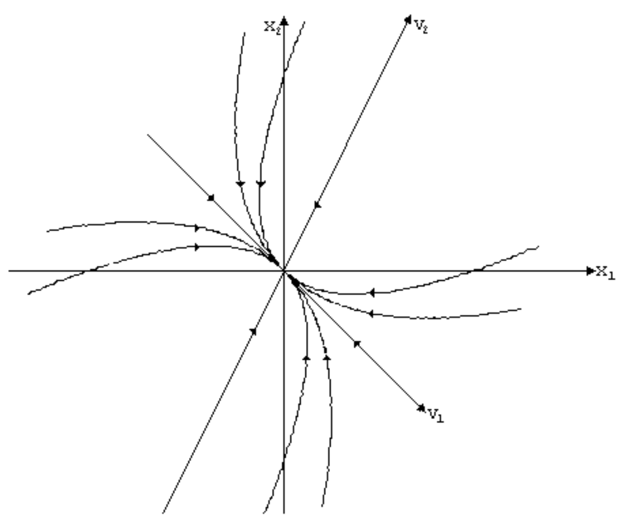


Figura 9

Sistemas Interactuantes

Si en el sistema (11) tenemos que $b^2 + c^2 \neq 0$ entonces por el método de eliminación de variable lo podemos reducir a una ecuación equivalente de orden dos.

Suponiendo que $b \neq 0$ y despejando x_2 de la primera ecuación de (11) tenemos

$$x_2 = \frac{x_1' - ax_1}{b}, \; x_2' = \frac{x_1'' - ax_1'}{b}. \tag{14}$$

Sustituyendo (14) en la segunda ecuación del sistema obtenemos la ecuación

$$x_1'' - (a + b)x_1' + (ad - bc)x_1 = 0.$$

Esta es una ecuación lineal de 2o. orden con coeficientes constantes y podemos aplicar los métodos del capítulo IV para resolverla. Una vez encontrada $x_1(t)$ encontramos a $x_2(t)$ usando las ecuaciones (14).

Así resulta que podemos tener tres casos dependiendo del tipo de raíces del polinomio característico:

$$r^2 - (a - b)r + (ad - bc) = 0.$$

I) Raíces reales y distintas. Si r_1 y r_2 son estas raíces tenemos que la solución general de (11) resulta:

$$(x_1, x_2) = (Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \; \frac{A(r_1 - a)e^{r_1 t}}{b} + \frac{B(r_2 - a)e^{r_2 t}}{b})$$

II) Raíz múltiple. Si r es la raíz la solución general es:

$$(x_1, x_2) = (A + Bt)e^{rt}, \; (A + Bt)e^{rt}\frac{(r - a)}{b} + \frac{B}{b}e^{rt})$$

III) Raíces complejas. Si las raíces son $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ entonces

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \;\; = \;\; & (e^{\alpha t}(A_1 \cos\beta t + A_2 \; sen\beta t), \; \frac{e^{\alpha t}}{b}(A_1 \cos\beta t + A_2 \; sen\beta t)(\alpha\text{-}1) \\ & + \beta(A_2 \cos\beta t + A_1 \; sen\beta t))\end{aligned}$$

A continuación analizaremos por separado estos tres casos para encontrar la forma de las trayectorias en el espacio de fases.

I) Reescribiendo la solución general como

$$(x_1, x_2) = A(1, \frac{(r_1 - a)}{b})e^{r_1 t} + B(1, \frac{(r_2 - a)}{b})e^{r_2 t}$$

vemos que conviene considerar nuevos ejes de coordenadas determinados por los vectores[5]:

$$v_1 = (1, \frac{(r_1 - a)}{b}), \ v_2 = (1, \frac{(r_2 - a)}{b})$$

pues, en estos ejes la solución toma una forma muy sencilla. Si llamamos $(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ a la solución de (11) en estos ejes resulta que

$$(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) = (Ae^{r_1 t}, Be^{r_2 t})$$

y usando los resultados de (II) y (III) de (A) tenemos que las trayectorias en el espacio fase son como muestran las figuras 8 y 9.

Puede ocurrir que ϑ_1 y ϑ_2 no sean ortogonales y en este caso, aunque cualitativamente las trayectorias siguen siendo las mismas, sufren alguna deformación. Ver figuras 9 y 10.

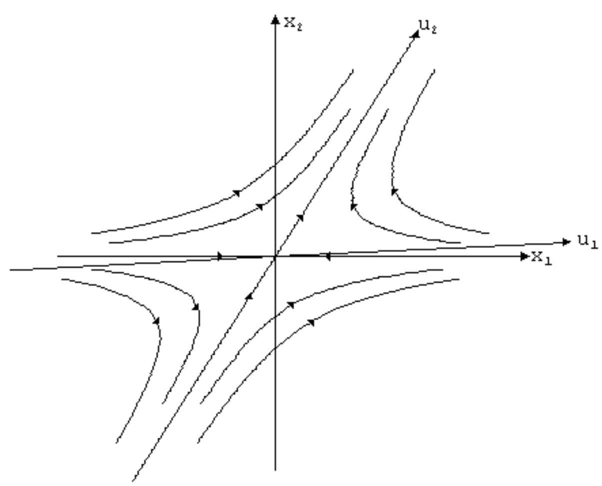


Figura 10

II) Reescribiendo la solución general como

$$(x_1, x_2) = (A + Bt), \ (1, \frac{(r - a)}{b}e^{rt} + B(0, \frac{1}{b})e^{rt}$$

[5]Note que v_1 y v_2 no son paralelos.

tenemos que respecto a los ejes determinados por los vectores

$$v_1 = (1, \frac{(r_1 - a)}{b}), \; v_2 = (0, \frac{1}{b})$$

la solución es

$$(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) = ((A + Bt)e^{rt}, Be^{rt})$$

Para analizar las trayectorias supondremos primero que v_1 y v_2 son ortogonales (esto ocurre cuando con $a = d$ y $c = 0$) y que $r = -\lambda$, $\lambda > 0$, los casos restantes los consideraremos más adelante.

En este caso tenemos también que $\vartheta_1(0) = A$ y $\vartheta_2(0) = B$. Si la condición inicial está sobre el eje ϑ_1 ($B = 0$) tenemos dos trayectorias que se acercan al origen a lo largo del semieje positivo de ϑ_1 o del negativo dependiendo respectivamente de que $A > 0$ ó $A < 0$. Si la condición inicial está sobre la parte positiva del eje ϑ_2 ($A = 0$, $B > 0$) tenemos $\vartheta_1 = Bte^{-\lambda t}$, $\vartheta_2 = Bte^{-\lambda t}$ de donde podemos ver que:

(1) $\vartheta_2(t) > 0 \; \forall t.$

(2) $\vartheta_1(t) > 0 \; \forall t, \; \vartheta_1(t) < 0 \; \forall t < 0.$

(3) A partir del punto $(\vartheta_1(0), \; \vartheta_2(0)) = (0, \; B),$ a medida que $t \to \infty$, $\vartheta_2 \to 0$.

(4) $\frac{d\vartheta_1}{dt} = Be^{-\lambda t}(1 - \lambda t)$ de donde

$$d\vartheta_1/dt > 0 \Leftrightarrow \lambda t < 1$$

y

$$d\vartheta_1/dt < 0 \Leftrightarrow \lambda t > 1$$

esto indica que, mientras t aumenta de 0 a $t = 1/\lambda$, ϑ_1 aumenta y, a partir de $t = 1/\lambda$, ϑ_1 disminuye.

(5) $\frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{d\vartheta_2/dt}{d\vartheta_1/dt} = \frac{-\lambda}{(1-\lambda t)}$,entonces

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = 0$$

por valores positivos y

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = 0$$

por valores negativos.

Estas ecuaciones nos llevan a la conclución de que las curvas en el semiplano superior son como muestra la figura 11. En esta figura se han dibujado también las trayectorias en el semiplano inferior cuyas características resultan de un análisis semejante al hecho anteriormente. En la figura 12 aparecen las curvas correspondientes al caso en que $r > 0$.

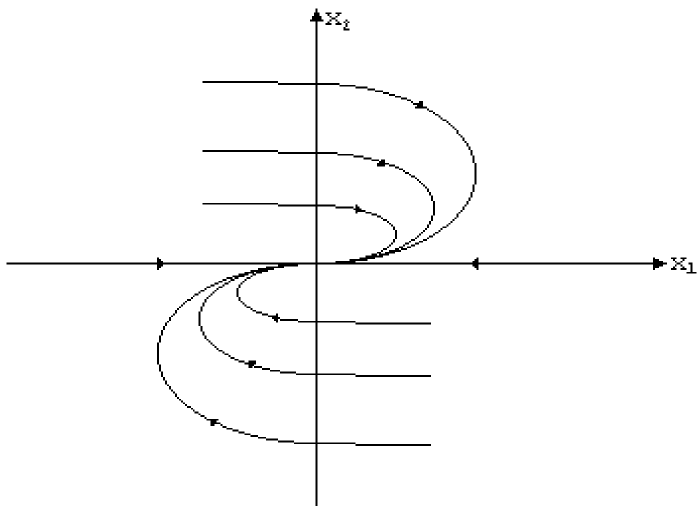


Figura 11

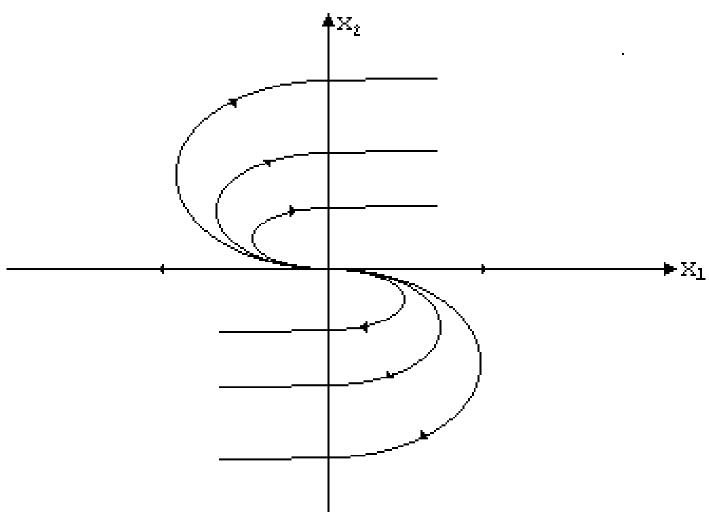


Figura 12

En la figura 13 aparecen estas curvas cuando ϑ_1 y ϑ_2 no son orto- gonales.

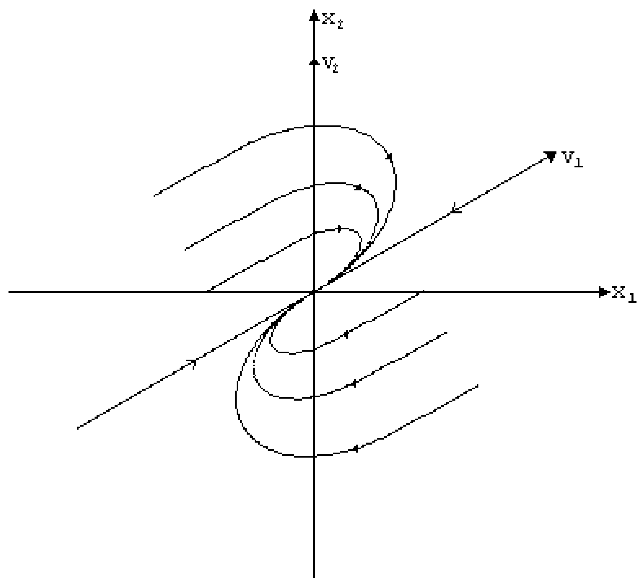


Figura 13

III) Reescribiendo la solución general para este caso como

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= (A_1 \cos\beta t + A_2\ sen\beta t)e^{\alpha t}(1,\ \frac{\alpha - a}{b}) + \\ &\quad (A_2 \cos\beta t - A\ sen\beta t)e^{\alpha t}(0,\ \frac{\beta}{b})\end{aligned}$$

y considerando los ejes determinados por

$$v_1 = (1,\ \frac{\alpha - a}{b}),\ v_2 = (0,\ \frac{\beta}{b})$$

tenemos que

$$(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) = ((A_1 \cos\beta t + A_2 sen\beta t)e^{\alpha t},\ (A_2 \cos\beta t - A_1\ sen\beta t)e^{\alpha t})$$

y que

$$\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = (A_1^2 + A_2^2)e^{2\alpha t}. \tag{15}$$

Consideremos ahora dos casos:

a) Raíces Imaginarias ($\alpha = 0$). La ecuación (15) nos dice que la trayectoria con condiciones iniciales

$$(\vartheta_1(0), \vartheta_2(0)) = (A_1, A_2),$$

se mueve sobre el círculo de radio $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ con centro en el origen.

En la figura 14 aparecen las figuras cuando los ejes ϑ_1 y ϑ_2 son ortogonales y en la figura 15 cuando no lo son. Los sentidos en que se recorren las curvas en estas figuras fueron tomados arbitrariamente, pero estos se pueden encontrar en cada caso directamente del sistema de ecuaciones, ana- lizando los signos de dx_1/dt o de dx_2/dt en las diferentes regiones del plano.

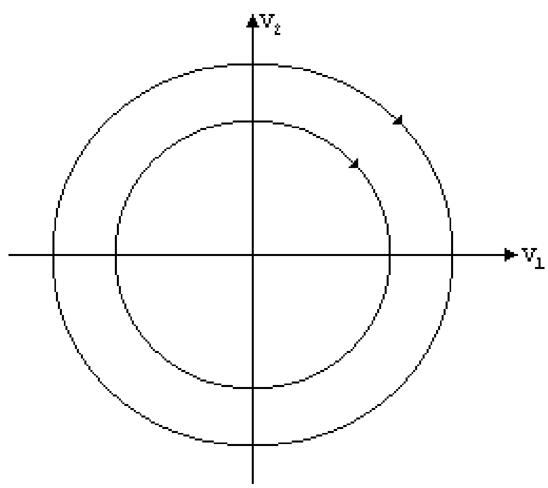


Figura 14

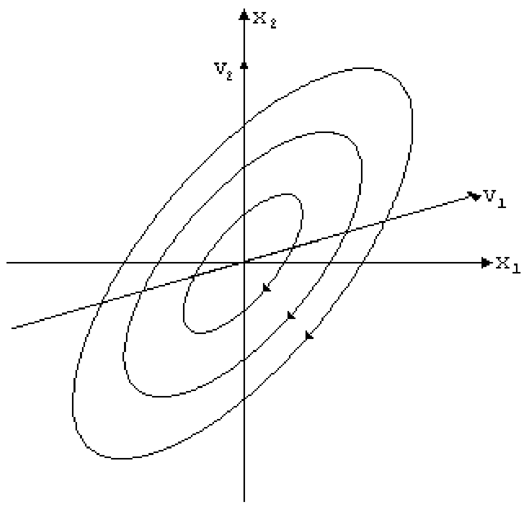


Figura 15

En la figura 15 hemos dibujado estas curvas para el caso en que los ejes ϑ_1 y ϑ_2 no son ortogonales.

b) Parte real distinta de cero. Naturalmente en este caso tendremos espirales que entran o salen del origen dependiendo de que α sea negativo o positivo respectivamente. En la figura 16 mostramos curvas correspondientes al caso en que $\alpha < 0$ y v_1 es ortogonal a v_2. En la figura 17 aparecen curvas para un caso de no ortogonalidad con $\alpha < 0$.

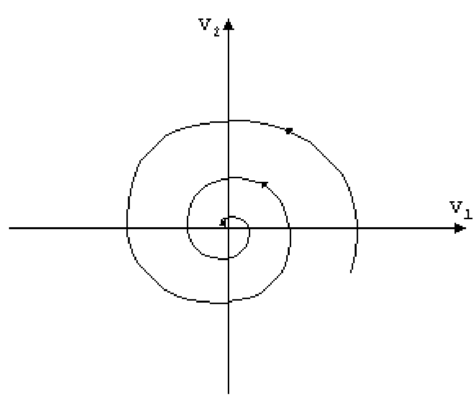


Figura 16

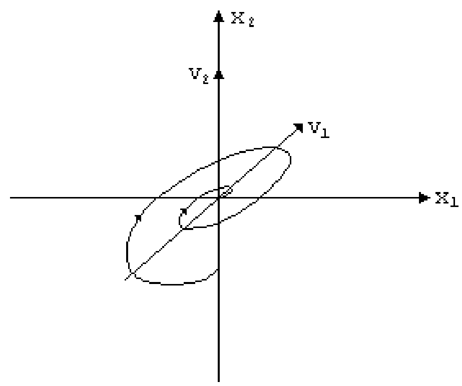


Figura 17

5.8 Clasificación de los Puntos Críticos

Los resultados de la sección anterior nos permiten ver quelos sistemas del tipo (11) se pueden clasificar de acuerdo al tipo de raíces que tenga la ecuación[6]

$$r^2 - (a + d)r + (ad - bc) = 0. \tag{16}$$

Esta clasificación nos da escencialmente seis tipos de comportamientos distintos (cualitativamente hablando) para las trayectorias del sistema (11) alrededor del punto de equilibrio en el origen. Decimos, alrededor del origen porque, "en lo pequeño", si consideramos la vecindad de un punto del espacio fase que no sea de equilibrio, tenemos que las trayectorias son paralelas y es fundamentalmente la estructura de éstas alrededor de los puntos de equilibrio lo que determina el comportamiento global de las trayectorias.

A continuación y a manera de resumen mencionaremos estos seis grupos y los nombres que reciben los puntos de equilibrio en cada caso.

I) Raíces iguales

a) Si $b = c = 0$ entonces tenemos la situación mostrada en la situación mostrada en la figura 18 y el origen se dice que es un punto estrella.

b) Si $b^2 + c^2 \neq 0$ entonces se dice que el punto es un nodo impropio. Figura 19.

[6]Como recurso nemotécnico note que si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ entonces la ecuación (16) se puede escribir como $r^2 -$ traza(A) + det$(A) = 0$.

II) Raíces de signo opuesto. En este caso tenemos un punto silla. Figura 20.

III) Distintas del mismo signo. Es el caso de un punto tipo nodo. Figura 21.

IV) Complejas con parte real distinta de cero. Tenemos un punto tipo foco. Figura 22.

V) Imaginarias. Es el caso de un centro. Figura 23.

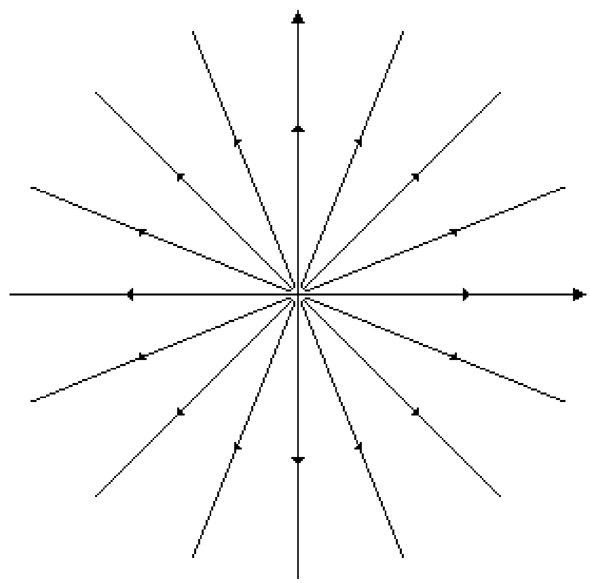


Figura 18

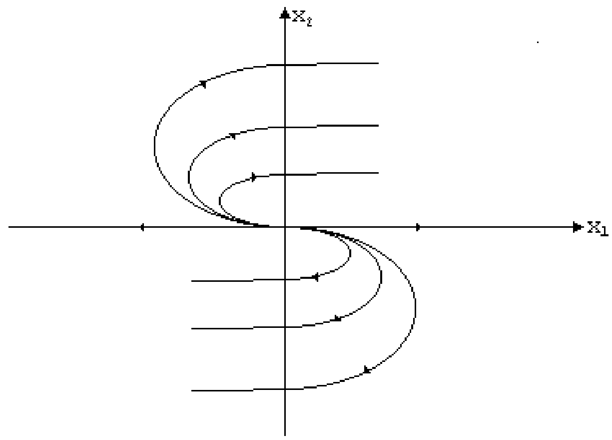


Figura 19

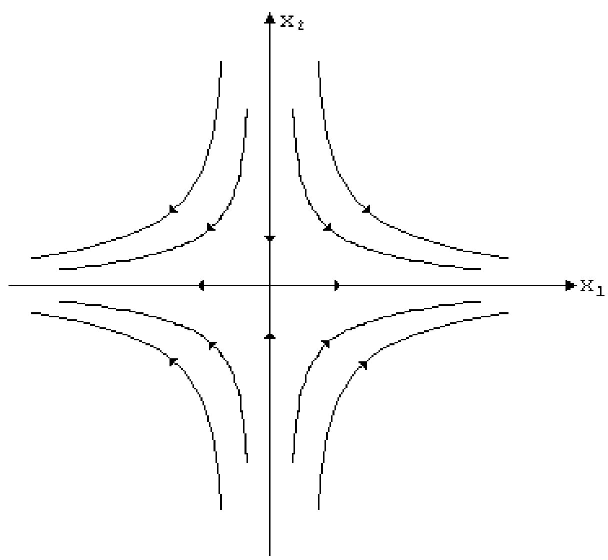


Figura 20

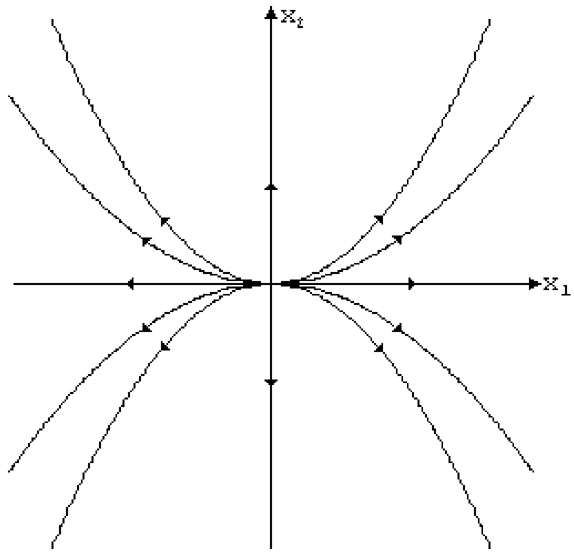


Figura 21

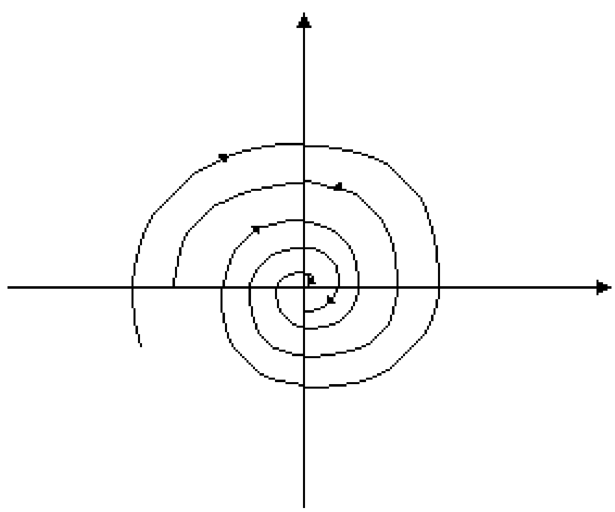


Figura 22

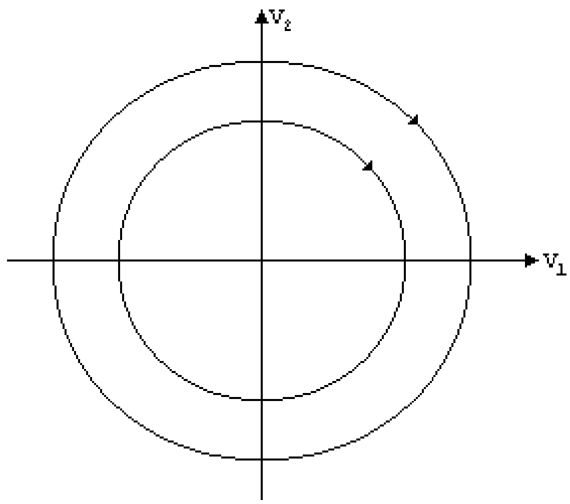


Figura 23

5.8.1 La Noción de Estabilidad de las Soluciones

Desde el punto de vista de las aplicaciones, cuando el sistema de ecuaciones en estudio corresponde a algún sistema físico[7], cada solución del sistema de ecuaciones representa una posible forma de comportamiento para el sistema físico.

En muchas ocasiones se tiene especial interés en una forma específica de comportamiento del sistema, esto es, en el comportamiento de acuerdo a alguna solución particular. Pensemos con más detalle lo que esto significa:

a) Teóricamente para lograr que el sistema de desenvuelva de acuerdo a alguna solución deseada, basta establecer la condición inicial adecuada, sin embargo, en la práctica, no es posible poner exactamente al sistema físico en un estado dado, entre otras cosas, porque esto implica mediciones y éstas siempre involucran algún error.

b) Teóricamente también tenemos que, si el sistema evoluciona de acuerdo a alguna solución entonces su comportamiento se mantendrá regido por ésta, pero, como los modelos no toman en cuenta todos los factores que intervienen en el problema, en la práctica pueden aparecer perturbaciones que hagan que el sistema, al transcurrir el tiempo, cambie de una solución a otra.

[7]Físico no de la física sino en la aceptación más general de la palabra, es decir un sistema dinámico cualquiera.

Por estas razones, si estamos fijándonos en el comportamiento a través de una solución y_1, es interesante saber qué diferencia de comportamiento se obtiene si, en lugar de evolucionar a lo largo de y_1, el sistema evoluciona a lo largo de y_2; una solución que en algún momento se encontraba cerca de y_1. Este tipo de estudio constituye lo que se conoce como estudio de la estabilidad de la solución y_1.

En las aplicaciones las soluciones de equilibrio son de particular importancia pues representan auténticos estados de equilibrio del sistema en los cuales no se produce cambio alguno.

Si consideramos por ejemplo la solución de equilibrio en el origen para los sistemas de las figuras 19 y 22, podemos notar que: aunque el sistema no se encuentre inicialmente en el punto de equilibio $(0, 0)$, al transcurrir el tiempo, el estado del sistema se acerca asintóticamente a este punto. Esto indica que este estado de equilibrio es estable, en el sentido de que: si el sistema está en su estado de equilibrio y sufre una perturbación que lo haga evolucionar a través de otra solución, entonces el sistema "responde" tratando de regresar a la situación original.

Para los sistemas de las figuras 18, 20, y 21 la situación sería de inestabilidad y en la figura 23 tendríamos que el origen representa un estado de equilibrio indiferente en el sentido de que: si el sistema tiene una condición inicial $(x_0,\ y_0)$ a una distancia dada del origen, entonces guarda al evolucionar esta distancia. Los equilibrios de las figuras 19 y 21 son llamados puntos atractores y representan situaciones de estabilidad.

5.8.2 Estabilidad Estructural

En esta sección introduciremos la noción de estabilidad estructural.

Si tenemos dos sistemas como

$$\left\{\begin{matrix} x' = A(x,\ y) \\ y' = B(x,\ y) \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} x' = A(x,\ y) + t_1(x,\ y) \\ y' = B(x,\ y) + t_2(x,\ y) \end{matrix}\right\}$$

y $t_1(x, y)$, $t_2(x, y)$ son muy pequeñas en cierta región R del plano entonces podemos decir que, en R, las ecuaciones son muy parecidas. ?'Serán parecidas las soluciones?

Este un problema difícil desde su misma formulación pues, ?'qué quiere decir precisamente que los sistemas son parecidos? y ?'que quiere decir que las soluciones son parecidas?

Por otra parte el problema es importante pues:

a) cuando estamos ante la imposibilidad de resolver cierto sistema podríamos recurrir a un sistema “parecido”, pero más fácil de trabajar, que tenga soluciones “parecidas”, para obtener información del primero.

b) desde el punto de vista de las aplicaciones, cuando decimos que un sistema de ecuaciones representa la ley de comportamiento de un sistema físico, sabemos que hemos hecho ciertas aproximaciones que no corresponden estrictamente a la realidad y podría ocurrir que el modelo que se ha construido es tal que los resultados que obtenemos en él se vean modificados radicalmente, por poco que se modifique el sistema de ecuaciones.

Por el momento no entremos con mucho detalle y poniéndonos en el papel del buen entendedor al que pocas palabras bastan aceptemos que:

1) Los sistemas son parecidos en una región R significa que

$$\begin{array}{ll} A(x,y) + t_1(x,y) \simeq A(x,y) & \\ B(x,y) + t_2(x,y) \simeq B(x,y) & \quad \forall (x,y) \in R \end{array}$$

2) Que las soluciones son parecidas significa que cualitativamente son las mismas, entendiendo por esto cosas como que: si para un sistema las trayectorias son espirales, para el otro son también espirales; si para uno son elipses, para el otro también son elipses.

Con este acuerdo podemos decir que: un sistema es estructuralmente estable si pequeños cambios en él no cambian el comportamiento cua- litativo de sus soluciones.

Si tomamos como ejemplo un sistema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{array} \right\} \tag{17}$$

y consideramos una perturbación de la forma

$$t_1(x,y) = \alpha x, \ t_2(x,y) = \beta x$$

entonces si α y β son pequeños entonces el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (\lambda + \alpha)x \\ y' = (\lambda + \beta)y \end{array} \right\} \tag{18}$$

será parecido a (17).

Para el sistema (17) sabemos que las trayectorias en el espacio fase son rectilíneas como muestra la figura 18, sin embargo para el sistema (18), por pequeños que sean y , basta que sean distintos para que las trayectorias ya no sean rectas y tomen la forma que muestra la figura 21. Este razonamiento nos lleva a concluir que el sistema (17) no es estructuralmente estable.

Se puede verificar, haciendo razonamientos semejantes, que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = ax \\ y' = cx + ay \end{array} \right\} a, c \neq 0$$

tampoco es estructuralmente estable. Para éste resulta que perturbaciones, por pequeñas que sean, pueden provocar cambios de la situación de la figura 19 a la de la 21.

Lo mismo se puede verificar par un sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array} \right\}$$

tal que las raíces de (16) son imaginarias. En este caso se pueden encontrar perturbaciones, tan pequeñas como se quiera, que hacen que las raíces de (16) tengan parte real distinta de cero y esto se traduce en un cambio de la situación en la figura 23 a la de la figura 22.

Se puede demostrar, pero esto es mucho más complicado, que para el sistema lineal (11), los casos restantes son estructuralmente estables.

5.9 Introducción al Estudio de los Sistemas no Lineales: Tres Problemas Clásicos

En esta sección se hará una discusión introductoria al concepto de estabilidad de las soluciones de equilibrio de un sistema dinámico y se presentarán tres ejemplos: uno de Mecánica, otro de Neurobiología y otro de Dinámica de Poblaciones. El análisis de estos sistemas requiere de una combinación de métodos analíticos y simulaciones numéricas. Estas últimas pueden en la actualidad ser llevadas a cabo de una forma interactiva y con el recurso de una amable interfaz gráfica, gracias a la disponibilidad de sistemas de software como el sistema INTEGRA que ha sido desarrollado en el Laboratorio de Dinámica no Lineal de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

5.9.1 El Péndulo

El péndulo es el ejemplo clásico de sistema dinámico. Actualmente, el estudio de las diferentes formas en que puede moverse cuando está sujeto a la acción de forzamientos, constituye una rica área de investigación.

Consideremos primero la dinámica de este sistema cuando oscila sujeto, exclusivamente, a la acción constante de la fuerza de gravedad. Bajo estas condiciones un péndulo, con un brazo rígido de longiud l que puede girar 360 grados alrededor de un eje, obedece la ecuación

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0 \qquad (*1)$$

donde el parámetro g representa la aceleración de la gravedad y β el coeficiente de fricción de la masa del péndulo con el aire.

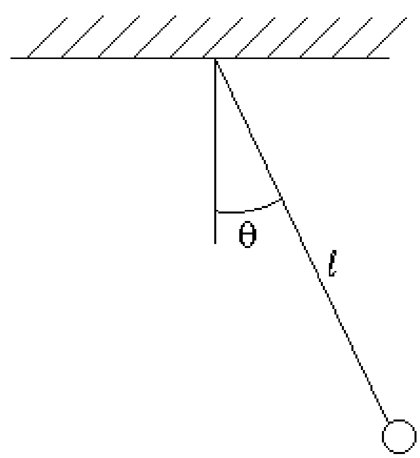


Figura 24

Si denotamos por ω la velocidad angular del péndulo entonces la ecuación (*1) es equivalente al sistema de primer órden

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -k \ \text{sen}\theta - \beta\omega \end{aligned} \qquad (*2)$$

donde $k = g/l$. En el caso en que el péndulo esté sujeto, además a la acción de una fuerza externa, $f(t)$, su movimiento queda gobernado por el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -k \ \text{sen}\theta - \beta\omega + f(t). \end{aligned} \qquad (*3)$$

Para estudiar la dinámica del sistema (*3) es muy poco lo que se puede hacer analíticamente y su exploración tiene que hacerse fundamentalmente por medio de simulaciones numéricas. Cuando no hay fricción (β = 0), el retrato de fases del sistema (*2) puede obtenerse sin tener que recurrir a cálculos numéricos. Esto es porque entonces es un sistema conservativo es decir, que la función energía dada por

$$E(0,\omega) = \frac{l^2\omega^2}{2} + k(1-\cos\theta)$$

se mantiene constante durante el movimiento del péndulo. En este caso, las órbitas del sistema en el espacio de fases están dadas por las curvas de nivel de esta función. En consecuencia las órbitas del sistema están dadas por la familia de curvas que se obtienen de la expresión

$$\omega = \pm\frac{1}{l}\sqrt{2(E-k(1-\cos\theta)}$$

variando la constante E. Para dibujar estas curvas se puede recurrir a diversos métodos cualitativos, pero es un buen ejercicio verificar por integración numérica directa que éstas deben tener la forma que muestra la figura 25. Es también un buen ejercicio el identificar cada tipo de órbita en el espacio de fases, con el movimiento correspondiente del péndulo.

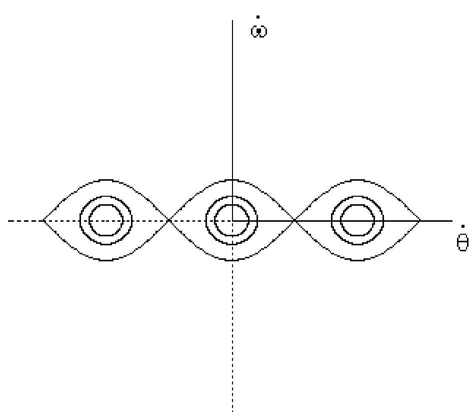


Figura 2. Orbitas del péndulo en el espacio de fases, obtenidas con el analizador INTEGRA, para el caso conservativo (β = 0, k = @)

Cuando estudiamos el oscilador armónico (sección 5.2), vimos que este sistema tiene una frecuencia característica de oscilación a la que están sujetos todos sus movimientos. Generalmente se consideran estas oscilaciones armónicas como una aproximación a las oscilaciones de amplitud pequeña del péndulo. Esta aproximación está motivada por el hecho de que, para ángulos pequeños la función k senθ está bien aproximada por su parte lineal: $k\theta$. En la figura 25 puede observarse que alrededor del punto de equilibrio $(\theta_{eq}, \omega_{eq}) = (0, 0)$ aparece una familia de curvas cerradas que confirman la validez de la aproximación. Sin embargo, al hacer las simulaciones numéricas, se observa que estas órbitas cerradas del pédulo, a diferencia de las órbitas cerradas del oscilador armónico, corresponden todas ellas a movimientos de frecuencias distintas. A medida que las oscilaciones son de amplitud mayor su periodo es mayor y este tiende a infinito cuando la condición inicial θ_0 se acerca al valor $\theta = \pi$. Esto quiere decir que para el péndulo, a diferencia del oscilador armónico, no existe una frecuencia que sea característica de todas las oscilaciones. Por otra parte, en el límite en el que θ_0 tiende al valor $\theta = 0$, el periodo de las oscilaciones del péndulo tiende al valor $2\pi/\sqrt{k}$ que es el período de las oscilaciones li- neales correspondientes. También puede demostrarse usando métodos de la teoría de perturbaciones que la función $T(\theta_0)$, que nos da el período de las oscilaciones del péndulo en función de la amplitud θ_0 de la oscilación, es una función que tiene una gráfica tangente a la recta $T = 2\pi/\sqrt{k}$. Esto puede interpretarse como que las oscilaciones pequeñas del péndulo tienen una frecuencia característica en el límite $\theta_0 \to 0$.

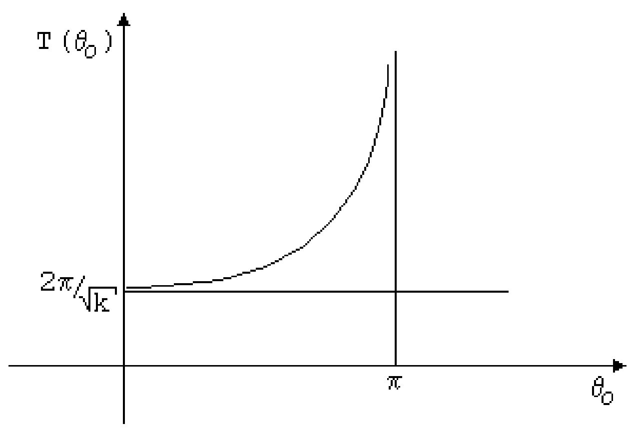


Figura 26

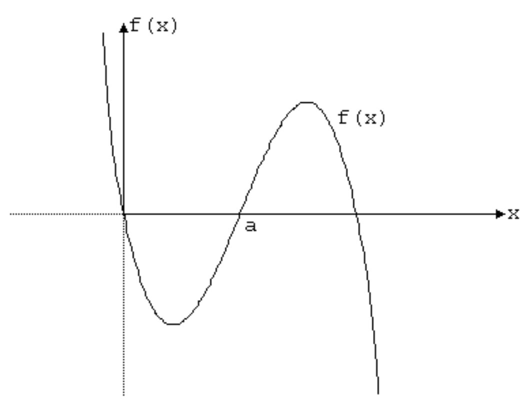
5.9.2 La Ecuación de Van der Pol como Modelo de un Nervio

Una característica distintiva de las células nerviosas es su actividad eléctrica. La capacidad que tiene estas células para producir y propagar impulsos eléctricos se debe a la ocurrencia de varios procesos no lineales, de orígen físico-químico, que tienen que ver con la forma en que la membrana celular manifiesta una permeabilidad selectiva a los diferentes iones del medio intra y extracelular.

En esta sección nos ocuparemos de un modelo que sirve para ayudar a entender la dinámica de los procesos involucrados en la producción de impulsos nerviosos. El modelo, estudiado independientemente por R. FitzHugh y K. Nagumo, está dado por el sistema

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -f(v) - \omega + I(t) \\ \dot{\omega} &= b(x - \gamma\omega). \end{aligned} \tag{FHN}$$

Aquí la variable de estado $v(t)$ representa la diferencia de potencial eléctrico a través de la membrana celular, $\omega(t)$ es una variable de recuperación del sistema, $I(t)$ representa una corriente externa proveniente de otra célula o aplicada por el experimentador y tanto b como γ son constantes positivas. La función $f(x)$ es la responsable de la no linealidad del sistema y se considera de tipo cúbico con una región de pendiente negativa. Aquí supondremos que $f(x) = x(x-a)(x-1)$, siendo a otra constante positiva del sistema.



Gráfica de f(x)=x(x-a)(x-1) con a=0.5.

Figura 27

El sistema de FitzHugh-Nagumo tiene una estructura similar al famoso sistema de van der Pol. Ambos sistemas son equivalentes a una ecuación de segundo orden del tipo

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + g(x) = h(t)$$

que es conocida como la ecuación de Lienard.

Al cambiar los valores de los parámetros del sistema FHN se pueden observar distintos comportamientos de interés biológico. En uno de ellos, como se muestra en la figura 28 A y B, el sistema muestra un comportamiento excitable mientras que en la figura 28 C y D, se observa que el sistema obedece a un régimen periódico caracterizado por la producción repetida de impulsos.

Figura 28. A. Curvas ceroclinas y órbitas en el espacio de fases de la ecuación FHN. B. Curso temporal del voltaje. C. Gráfica hecha con INTEGRA usando el método de Runge-Kutta con $h = 0.5$ cuando $I = 0$, C y

D muestran la dinámica oscilatoria que se produce al aplicar una corriente constante I = 1, a = 0.2, b = .001 y γ = 5.2.

Estos impulsos son conocidos como potenciales de acción entre los neurofisiólogos. La presencia de un potencial umbral para la excitación y la transición del régimen excitable al régimen oscilatorio que muestra el modelo FHN al aplicar una corriente constante I, coincide con las observaciones experimentales:

> (1) Cuando el voltaje de reposo de la membrana celular es perturbado, pero sin que vaya más allá de un voltaje umbral v_μ después de un breve lapso se relaja a su valor original;
>
> (2) Cuando la perturbación del voltaje a través de la membrana rebasa el valor de umbral v_u , se produce un potencial de acción y después de un lapso del orden de milisegundos el voltaje de la membrana recupera a su valor de reposo;
>
> (3) Cuando, en lugar de una perturbación instantánea del voltaje a través de la membrana, se aplica una corriente constante para sostener la perturbación, se observa que la membrana responde produciendo una serie periódica de potenciales de acción. Estos se producen con una frecuencia que crece con la intensidad de la corriente aplicada.