# CAOS Y RAZON
## Y al final fue el Caos ...

Santiago Ramírez*

**1.Tres propuestas de Bolzano**

A) la liberación de la semántica.

En sus *Wissenschaftlehre*, Bolzano muestra cómo es posible concebir al lenguaje como un conjunto de signos que no requieren de un correlato. Muestra que, en el lenguaje hay significantes que carecen de significado. Hay además verdades que no requieren de constatación semántica. En este sentido, va a ser posible, posteriormente, construir una matemática que no haga referencia a los objetos de un mundo "intacto".

Los ejemplos de Bolzano son extremadamente ingeniosos. La palabra "nada", por ejemplo, carece de objeto, no es la descripción de algo, es un significante que carece de significado.

B) la liberación de la intuición

En su trabajo *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, ...*[1] Bolzano empieza por plantear la necesidad de un nuevo tipo de evidencia que supere lo que califica como "intolerables ofensas en contra de método correcto"[2].

Aqui, el asunto es tratar de comprender de qué tratan las matemáticas: la ciencia en general, es el sistema de todos los juicios verdaderos, entre los que reinan conexiones objetivas independientes del hecho perfectamente contingente y accidental de que las conozcamos. Es por esto que, cuando trabajamos con sistemas formales, afirmamos que hay verdades que sirven de fundamento a otras. Poner estas relaciones de manifiesto es lo que llamamos demostrar. Apropiarnos en el conocimiento discursivo de estas relaciones de

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

[1]En *Historia Mathematica* ,7 (1980), pp. 156-185.

[2]op. cit., p...

manifiesto es lo que llamamos demostrar. Apropiarnos en el conocimiento discursivo de estas relaciones objetivas, independientes de toda subjetividad particular o histórica es el acto bolzaniano de creación matemática.

La primera de éstas "ofensas" es la que yace depender la demostración de una "verdad prestada de la geometría" [3] misma que, a su vez, requiere de una demostración "si queremos representar las verdades en la ciencia en el modo en que se conectan unas con otras, en su coherencia objetiva"[4]. En otras palabras Bolzano contrapone la coherencia objetiva a la génesis de la verdad otorgando la primacia a la primera: ésta es ya una primera característica cuyos efectos educativos, por ejemplo, son evidentes: en matemáticas importa la coherencia y el encadenamiento lógico de las verdades. La historia matemática consiste en mostrar el modo como esa coherencia se alcanza. De esta afirmación se desprenden dos hipótesis acerca de la historia de las matemáticas: en primer lugar, que se trata de la historia de un sentido que ya conocemos; en segundo lugar, una vez que se ha establecido este principio metodológico, es indudable que sin conocer el resultado conceptual de una historia, la historia misma carece de sentido. Así, el conocimiento de la historia de las matemáticas necesariamente depende del sentido de la historia y, este sentido, es un sentido eminentemente matemático.

En el caso que nos ocupa, hacemos la historia del infinito para mostrar cómo se alcanzó un estatuto epistemológico que no requiere de la evidencia geométrico o de la intuición del espacio; en particular, Bolzano sostiene que las verdades geométricas se refieren a mangnitudes en el espacio mientras que las matemáticas deben de enunciar verdades "válidas de igual modo para todas las cantidades, en el espacio o no"[5].

El segundo tipo de demostración objetable - según Bolzano - es el que recurre a los conceptos de tiempo y de movimiento "tan extra os a la matemática general como el concepto de espacio"[6].

Estas afirmaciones nos colocan de manera inmediata frente al problema de la experiencia matemática. Como se sabe, para Kant, toda experiencia es acerca de fenómenos en el espacio y en el tiempo. Independientemente de lo que pueda querer decir una magnitud fuera del espacio y del tiempo, la experiencia que de ellas se propone en la obra de Bolzano es, indudablemente, una experiencia no kantiana.

[3]op. cit., p...
[4]op. cit., p.161
[5]op. cit., p.160
[6]op. cit., p. 161

La historia popularizada de las matemáticas muestra que se originan en el estudio del espacio: el concepto de espacio ha podido ser concebido como el hilo conceptual conductor de las matemáticas. Sin embargo, a partir de Bolzano, las matemáticas se constituyen precisamente al abandonar la noción misma de espacio.

La prueba "geométrica" del teorema de Bolzano depende de la siguiente afirmación: "toda línea continua de curvatura simple cuya ordenadas son primero positiva y luego negativa (o viceversa) necesariamente intersecta al eje $x$ en punto que yace entre esas ordenadas"; esta "verdad" es evidente, se muestra y, por lo tanto, no requiere demostración[7].

Sin embargo, Bolzano asegura que la verdad geométrico que ha sido propuesta no es una de aquellas verdades simples que él llama proposiciones básicas (*Grundsatze*). Por el contrario es un teorema que debe ser demostrado por medio de una "derivación" a partir de verdades primeras. En una nota al pie de la página Bolzano asegura que de lo que se trata es de "seleccionar un conjunto de juicios y organizarlos de manera tal que sea claro cuáles son consecuencias". Estas afirmaciones son indudablemente un prolegómeno al método axiomático y a la estructuración del paraíso cantoriano que culminará con la visión hilbertiana. Para ello, sin embargo, y como Hilbert anota, hay que despejar los problemas - que no pasan inadvertidas para Bolzano - del infinito y del continuo.

## 2.El teorema de Bolzano

En efecto, un estudio minucioso del llamado "teorema de Bolzano" muestra en dónde reside el problema.

El teorema asegura que si tenemos una función continua $f : [a, b] \to R$ tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

El enunciado puede leerse como un teorema acerca de los valores posibles de la función continua (es decir como un teorema acerca de funciones continuas)[8]. Esta lectura despoja al enunciado de su originalidad pues la afirmación sustancial es acerca de una propiedad fundamental del intervalo $[a, b]$,

---

[7]Carlos Torres en su trabajo *Mostrar y demostrar* asegura que la demostración es necesaria en el momento en que una afirmación no es evidente, no se muestra. El ejemplo de Torres de tal necesidad es la afirmación acerca de la irracionalidad de 12. cf. Torres, C. y Falcón Vega, J.O., "*To show and to prove*", en *Mexican Essays in the Philosophy and History of Science*.

[8]El Teorema de Bolzano muestra, en particular, la necesidad de introducir el análisis $\varepsilon - \delta$ de Cauchy en lugar del "álgebra de derivadas" de Lagrange.

a saber, que $c \in [a,b]$. Una mejor manera de enunciarlo sería la siguiente:

Si tenemos una función continua $f : [a,b] \to R$, tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces el punto $c$ tal que $f(c) = 0$ pertenece al intervalo $[a,b]$.

Esta, como veremos es una propiedad fundamental de los intervalos de números reales, es la propiedad de ser continuos.

En cierto modo, el trabajo de Bolzano se inserta en la misma tendencia en que se inserta el trabajo de Lagrange acerca del cálculo:

Si, para Newton el concepto de derivada se puede reducir a un simbolismo para expresar conceptos físicos (la derivada se interpreta como la velocidad instantánea) y si para Leibniz los conceptos fundamentales se reducen a intuiciones geométricas (la derivada es la tangente a la curva y la integral es el área bajo la curva), para Lagrange, la derivada se concibe como un operador lineal y la integral como su inverso. Si bien la interpretación de Lagrange no es suficiente, muestra la misma tenedencia a recurrir o reducir conceptos matemáticos a nociones físicas o geométricas.

## 3.El paraíso de Cantor según Dedekind

A) La creación no geométrico de los números: del arte de contar al principio del continuo.

Richard Dedekind propone en *Stetiqkeit und irrationale Zahlen* ideas que desarrollan, en parte, el programa de Bolzano y que posteriormente reaparecen en el de Hilbert. Al constatar la carencia de una fundamentación científica para la aritmética, por razones pedagógicas, se habría recurrido a la geometría. Sin embargo, no se puede sostener que dicho procedimiento,. aceptable desde este otro punto de vista, sea propiamente matemático. La fundamentación debe ser, pide Dedekind, “perfectamente rigurosa y puramente aritmética”[9].

La aritmética, a su vez, es - por más complicaciones que se le introduzcan - una consecuencia del acto simple de contar que, en su desarrollo, se enfrenta a la necesidad de llevar a cabo ciertas operaciones; la imposibilidad de llevarlas a cabo ha requerido de actos creativos (la noción de resta obliga a la creación de los números negativos, la división requiere de los números racionales, etc.). Es decir, frente a la imposibilidad de un acto, el matemático lejos de resignarse, procede a crear los objetos necesarios que permitan que un acto deje de ser imposible. El matemático es, así, un creador de posibilidades.

[9]Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, ed. Dover, p. 2.

Esta explicación da cuenta, así, de la invención, "por la mente humana"[10], de los números negativos, de los racionales, de los reales, etc.

Pero la creación nos reserva sorpresas. Así, se introduce una idea que resuelve una imposibilidad y en el nuevo objeto, a su vez, se presentan ciertas características que plantean nuevos problemas. En el caso que nos ocupa, los números racionales, que han sido creados para lograr la cerradura del conjunto de números frente a las cuatro operaciones fundamentales, presenta otras propiedades, quizá más importantes que aquellas que originalmente se buscaba que tuvieran. Los racionales, en efecto, además de satisfacer las necesidades operacionales que les dieron origen, forman un "dominio bien arreglado que se extiende hacia el infinito en dos direcciones opuestas"[11].

B) ¿Qué es la historia de las matemáticas?

El esquema de Dedekind es peculiarmente ilustrativo:

Partimos de un acto, de un acto tan simple como sumar o multiplicar números naturales. Estos actos generan otros nuevos que, en el ámbito en donde se llevan a cabo resultan "imposibles" o, por lo menos, carecen de sentido, tales como los de restar o dividir.

Para que tengan sentido, transformamos al acto en "acto demandante", en un acto que demanda un sentido y buscamos ese "sentido demandado".

En el caso de la resta y de los números naturales, se inventan los números enteros (incluído el cero): los números enteros, entonces nos proveen del sentido de que carecíamos. Permanece, sin embargo, el otro acto (el acto de dividir); es un acto que sigue sin tener sentido, tanto en los naturales como en los enteros. Nuevamente, procedemos a crear un ámbito en donde el acto operatorio tenga sentido y, así, se inventan los números racionales.

Sin embargo, el ámbito creado no satisface solamente las necesidades que nos condujeron a la creación. Se descubre un nuevo sentido (por ejemplo, las relaciones de orden: $a > b$ si $b-a < 0$; dados $a > b$, existe $c$ tal que $a > c > b$, de hecho, $c - (a+b)/2$) que demanda un acto: el sentido, inicialmente "demandado" por un acto se transforma en sentido "demandante", que reclama un acto, el "acto demandado". Cada cual se torna en su contrario y se genera una "dialéctica" muy peculiar que elimina la unidimensionalidad de la historia de las matemáticas introduciendo dos ejes de desarrollo - uno, en la dirección de los actos y otro en la dirección del sentido - que se entrecruzan y

[10] op. cit., p. 4

[11] op. cit., p. 5

en ocasiones permiten, incluso, el retroceso, la simultaneidad del descubrimiento por vías diferentes o la permanencia aparentemente marginal de un acto o de un sentido. La historia de las matemáticas, es en este sentido, es una historia en dos dimensiones.

C) La revancha de la geometría

Sin embargo, estas propiedades parecen reintroducir aquello que originalmente queríamos evitar: "recurrir a las intuiciones y a las características geométricas del objeto. La intención original, hacer que la aritmética se sostenga por sí misma parece haber fracasado y parecería se requieren, en la aritmética, nuevamente, ideas extranjeras"[12].

Cediendo al punto de vista geométrico, aparece una característica de la recta que tendrá una relevancia inusitada, a saber, que no todos los puntos de la recta geométrica corresponden a números racionales; de hecho, hay una infinidad de puntos con esta propiedad[13].

Así, hay otra característica de la recta geométrica tan importante como la anterior:

Todo punto $\rho$ de la recta geométrica posee la propiedad de producir una separación en la recta de manera tal que todo punto es una de las partes está a la izquierda de todo punto en la otra.

Esta propiedad produce el principio de continuidad:

"Si todos los puntos en la recta pertenecen a una de dos clases de manera tal que los puntos de la primera clase están a la izquierda de los puntos de la otra, existe uno y solo un punto que produce esta división..."[14]

Dedekind, tras esta concesión que muestra cual es el sentido que se busca (y que es una ofensa, en el sentido de Bolzano pues la idea de recta nunca se definió claramente y se recurre, además a nociones vagas tales como "derecha", "izquierda", "en medio", etc.), abandona la geometría y define:

Consideremos una separación cualquiera del conjunto de números racionales en dos clases $A_1$, $A_2$, de manera tal que solo posean la característica de que todo número $a_1 \in A_1$ es menor que todo número $a_2 \in A_2$. Un *corte*(*Schnitt*) es la pareja $(A_1, A_2)$; se puede demostrar que hay una infinidad de cortes

[12] loc. cit.

[13] Esta propiedad es bien conocida desde la introducción de los números irracionales: hay en efecto, una magnitud irracional (la hipotenusa de un triángulo rectángulo equilátero cuyo cateto vale 1) que no corresponde a un número de los que hasta entonces se conocían.

[14] op. cit., p. 11

que no corresponden a números racionales. Cuando esto suceda, "creamos un (número) nuevo, un número irracional $\alpha$"[15] .

La reunión de los números racionales e irracionales da lugar a los números reales que tiene las siguientes propiedades:

1.Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \rho$ entonces $\alpha < \rho$.

2.Si $\alpha$ y $\mu$ son dos números diferentes, existe una infinidad de números $\beta$ entre $\alpha$ y $\mu$.

3.Se pueden introducir las operaciones clásicas preservando las propiedades de las operaciones entre números racionales.

4.Se comprueba el principio de continuidad y, por último, se demuestra el siguiente teorema,

"Si una magnitud $x$ crece continuamente pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite". Este teorema permite establecer un vínculo entre el principio de continuidad y el análisis infinitesimal.

De la construcción, que no ha requerido de ningún argumento geométrico, resulta, además y de manera evidente, que la recta geométrica es un modelo de los números reales.

El objeto ha sido creado sin recurrir a ninguna experiencia espacial o temporal. Hemos visto al poder creativo en acción.

D) ¿ Qué es la finitud?

Cuando Dedekind escribe *Was sind und was sollen die Zahlen?* puede, ya, proponer una concepción de número: "enteramente independientes de las nociones o intuiciones de espacio y tiempo, (los) considero como el resultado inmediato de las leyes del pensamiento... como creaciones libres de la mente humana"[16] y le permite hacer suya la consigna de Dirichlet: "todo teorema de álgebra o de análisis avanzado... se puede expresar como un teorema acerca de números naturales"[17].

El problema que le preocupa ahora es el de lo finito y lo infinito:

La inf initud, inicia Dedekind, es una propiedad, enunciada por Bolzano; sin embargo, Bolzano solamente la propone como paradoja. Dedekind propone una *definición* que se apoyará sobre los conceptos de transformación y de similitud:

---

[15]op. cit., p. 15
[16]op. cit., p. 31
[17]op. cit., p. 35

*Definición 61*: "Un sistema $S$ es infinito cuando es similar a una parte propia de sí mismo; en el caso contrario, se dice que $S$ es un sistema finito"[18]

En el prefacio a la segunda edición se desembaraza de las nociones de transformación y de similitud y propone la segunda definición de finitud:

*Definición* (prefacio a la segunda edición): "Un sistema[19] $S$ es finito cuando puede transformarse en sí mismo (36) de manera que ninguna parte propia (6) de $S$ se transforme en sí misma; en el caso contrario, $S$ se llama sistema infinito"[20].

La construcción requiere de una reconsideración acerca de los que son los objetos matemáticos; para Dedekind,

a)una cosa es un objeto de nuestro pensamiento,

b)para facilitar el modo de hablar de las cosas, las designamos con símbolos,

c)una cosa está completamente determinada por todo aquello que puede decirse o pensarse acerca de ella,

d)dos cosas, $a\&b$ son iguales si todo lo que se puede pensar de la primera $(a)$ se puede pensar de la segunda $(b)$ y cuando todo lo que es verdadero para $b$ es verdadero para $a$. Escribimos, en este caso $a = b$.

e)cuando diferentes cosas pueden pensarse desde un mismo punto de vista, es decir, cuando las podemos

asociar mentalmente, construímos el sistema $S$.

Todavía no se alcanza el formalismo de Hilbert y, ciertamente, hay una metafísica tenza que se cuela en la obra de Dedekind. Cuestiones como "verdad" y "def inición" todavía nos remiten a categorías meta-matemáticas. Esto debe quedar pendiente, por el momento, pues el problema matemático que se presenta no es elemental. Se trata de establecer la equivalencia entre ambas definiciones. La demostración de su equivalencia tiene consecuencias interesantes.

Las ideas fundamentales de Dedekind, entonces pueden resumiese en las siguientes:

1. Los objetos matemáticos son el resultado de una creación de la mente humana y no requieren de la facultad de la experiencia en el sentido kantiano. En ello, Dedekind se revela como un seguidor de las ideas de Bolzano.

2. La aritmética es la rama fundamental de las matemáticas. Toda la matemática tiene que estar en condiciones de reducirse a aritmética simple,

[18]op. cit., p. 63

[19]Dedekind usa la designación "sistema" para lo que nosotros conocemos como "conjunto".

[20]op. cit., p. 42

entendida ésta como una actividad quese origina en el proceso de contar, mismo que se fundamenta, a su vez, en el carácter simbólico de los objetos.

3. La imposibilidad - la paradoja - no marca un límite para las posibilidades del pensamiento matemático, más bien, son el desafio para la creación. Las matemáticas se desarrollan en la medida en que sean capaces de superar sus propias paradojas para dar lugar a nuevos objetos y nuevas teorías. La genesis matemática, así, puede contemplarse como un proceso que se inicia en lo imposible para proponer, desde ahí, el concepto que supera la imposibilidad y desde donde se generan las teorías. Esto, en todo caso, es mucho más cercano a una historia matemática de las matemáticas y establece características específicas de un posible concepto de experiencia matemática.

## 4. La razón, hoy

La forma específica de racionalidad que ha caracterizado buena parte de lo que hemos llamado “modernidad”, consiste en suponer una *reductibilidad*, tanto de los fenómenos como de la subjetividad. Como viejos alquimistas, los “epistemólogos” se han consagrado a buscar tenazmente la piedra filosofal que permitiría establecer criterios que servirían de garantía para la verdad.

En este empeño reduccionista, se ha tomado la infinita riqueza del universo para reducirla a lo que se ha querido creer que es esencial, fundamental o simple; se han buscado las “últimas instancias” desde donde todo podría ser comprendido y explicado y en donde la vieja batalla del hombre por conocer sería reducida, a su vez, a un algoritmo mecánicamente reiterable.

Métodos, claves y criterios para alcanzar la verdad han querido simplificar al mundo y han desvirtuado, en nombre de toda clase de causas, buena parte de las dificultades de los grandes sistemas del pensamiento humano. Es posible, incluso, que esta voluntad de simplificación ya sea parte de la naturaleza del hombre de nuestro tiempo.

En nuestros días, una nueva variedad de racionalismo parece ocupar ese sitio privilegiado desde donde se puede juzgar y predecir el comportamiento de las colectividades y de los individuos. Las fuerzas del mercado, imponen hoy su criterio eficientista y pragmático de racionalidad como solución única a la totalidad de los problemas sociales y económicos.

Nuestros tiempos, desde 1980, han estado marcados por una racionalidad específica: la de los nuevos conservadores: después de todo, la derrota de la Viena Roja fue más grave de lo que jamás supusimos. Las fuerzas del mercado, en nuestros días, imponen su racionalidad y proveen las soluciones a los problemas socíales y económicos que en otra época supusimos humanos.

Patrocinado por Robert Nozick y F. A. Hayek, Sir Karl Popper, por ejemplo, acepta la invitación de la *Heritage Foundation* o del *Instituto de Asuntos Económicos* y del *Instituto Adam Smith*,en Inglaterra, o del *Instituto de Economía de Kiel* o del *Club de l'Horloge* en Francia y Margaret Thatcher, cabeza visible de esta nueva racionalidad sostenía, en enero de 1988, que "la economía es el método; el objetivo es cambiar el alma"[21].

El propósito es escalofriante: los valores derivados de la iniciativa, de la competencia y del mercado constituirán la nueva ética del nuevo orden. Los nuevos conservadores vislumbran a nivel global, también un nuevo orden moral.

Este proceso es parte de un proyecto globaliante cuyos fundamentos estarían sustentados en:

1. El capitalismo popular,
2. La contracción del Estado y su fortalecimiento autoritario,
3. El tradicionalismo.
4. El renacimiento del nacionalismo

### 4. Las matemáticas, hoy,

Concebimos a las matemáticas como un ámbito privilegiado en donde se juega, desde el punto de vista filosófico, el concepto de razón; esta concepción de las matemáticas va a sugerir una nueva forma de racionalidad que se inauguran a partir de una forma de razonamiento que rompe con el viejo esquema lineal de la razón cartesiano.

Para Descartes, "todo el método reside en la puesta en orden y en la disposición de los objetos hacia los que es necesario dirigir la atención del espíritu para descubrir la verdad. Y los observaremos fielmente si reducimos gradualmente las proposiciones complejas y oscuras a proposiciones más simples y si, a continuación, partiendo de la intuición de las más simples de todas, intentamos elevarnos por los mismos grados hasta el conocimiento de todas las demás"[22].

Desde esta posición, es posible pensar en la posibilidad de un análisis de los fenómenos en el que cada característica del fenómeno complejo se deba a alguno de los elementos simples, claros y distintos en que el problema se descompone. Este tipo de pensamiento se sustenta en un principio de

[21] *Observer*, 3 de enero, 1988.

[22] Descartes, Regla V, en *Regles pour la direction de l'esiprit*, AT, X, 379. cfr. también, Reglas III, IIV & VI.

superposición, característica distintiva de los sistemas lineales por medio de la cual afirmamos, por ejemplo, que la suma de soluciones vuelve a ser solución.

Por el contrario, los sistemas no-lineales no admiten un principio de superposición. Es decir, si, por ejemplo, dos estados de un sistema lineal pueden ser alcanzados, también se puede alcanzar cualquier combinación lineal no trivial de ellos: si $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son soluciones de la ecuación que describe al sistema lineal, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ también es una solución y, por lo tanto, generamos un subespacio del espacio fase que es el subespacio de estados posibles. En el caso lineal, además, este subespacio se puede parametrizar por medio de una colección finita de parámetros finitos y, con ello, todas las técnicas del álgebra lineal se pueden aplicar. En el caso no-lineal, no hay garantía de esta posibilidad de parametrización finita aún cuando hubiera alguna acerca de la posibilidad de aplicar el principio de superposición.

A) Una matemática no-lineal

Un conjunto de técnicas novedosas han permitido, recientemente, franquear el obstáculo de la no-linearidad.

En efecto, los problemas no lineales eran hasta hace poco aquellos que presentaban características aleatorias e irregulares y aparentemente se comportaban de manera incomprensible en contraste con los problemas lineales, regulares y ordenados. En algunos casos, la no linealidad se concebía, como un accidente que era posible eliminar por medio de aproximaciones manipulables: los éxitos de esta "exclusión" de lo no lineal fueron asombrosos. En tal virtud, el problema de la no linearidad ni siquiera se consideraba como tal: su presencia no modificaba los comportamientos "ideales" y consistentes por medio de los que el mundo era explicado y por medio de los que era posible reconstruirlo y modificarlo. En la linealidad se atrapaba la esencia del mundo y, en todo caso, el problema de la no linearidad sólo mostraba uno más de los límites de la razón; la no linearidad funcionaba de la misma manera en que funcionaba el infinito antes de Hilbert: como límite subjetivo de lo que podía ser pensado. La no linearidad, como el azar para Aristóteles, era la medida de nuestra ignorancia.

B) Un mundo no-ordenado

Dentro de los límites de tal racionalidad, el mundo era un mundo laplaciano perfectamente predecible: es decir, a pesar de las sospechas de Poincaré[23],

[23] "Una causa muy pequeña pasa desapercibida y determina un efecto considerable que no podemos pasar por alto. Decimos que el efecto se debe al azar. Si conociéramos

condiciones iniciales similares producían estados finales similares. Este era el tipo de premisa racional por medio de la cual se introducían, en la racionalidad dominante, dos principios acerca de la naturaleza misma de la ciencia: la posibilidad de predecir los efectos desde las condiciones iniciales y el principio de la determinabilidad: El mundo era un sistema determinable y las perturbaciones (como causas) tenían efectos proporcionales a su magnitud: a grandes perturbaciones, grandes alteraciones: a pequeas modificaciones de las condiciones iniciales, peque os efectos en el resultado f inal.

Además, el mundo seguía siendo cósmico; a pesar de Koyré, nunca se le dejó de concebir como tal.

Sin embargo, esta concepción desaparece en cuanto la paradoja de Smale acerca de la convergencia de las situaciones caóticas e inestables a situaciones ordenadas y estables fue desmentida. Nuestra intuición acerca del desorden era errónea: el desorden perdura.

C) Un vector no-bachelardiano.

Por otra parte, si bien debemos resignarnos a la imposibilidad de predecir los efectos a partir de las causas, la "herradura de Smale" impide que la razón funcione a la inversa; es decir, tampoco permite desentra ar, ante un fenómeno dado, sus orígenes o, conocidos los efectos, encontrar las causas.

Además, la herradura de Smale puede caracterizarse, matemáticamente, como un conjunto con las siguientes:

a) hay una infinidad numerable de puntos periódicos de período arbitrario.

b) hay una infinidad no-numerable de órbitas no periódicas.

c) hay una órbita densa.

Es un sistema, en fin, sensiblemente dependiente de las condiciones iniciales.

Estas propiedades van a configurar lo que llamaremos un sistema caótico, por el momento, apuntemos que, si bien Bachelard sostenía que la ciencia de su tiempo mostraba que el "vector epistemológico" apuntaba de lo racional

exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, podríamos predecir la situación de ese universo en momentos ulteriores. Pero incluso si las leyes de la naturaleza ya no tuvieran ningún secreto, solo podríamos conocer la situación inicial de manera aproximada. si ello nos permitiera predecir la situación subsecuente con la misma aproximación, podríamos decir que el fenómeno ha sido predicho y que está gobernado por las leyes. Pero no es así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final. Un pequeño error en el primero produce un error enorme en el segundo. La predicción es imposible y tenemos los fenómenos fortuitos". Poincaré, *Ciencia y método*.

hacia lo real, de lo racional hacia lo experimental, de los efectos hacia las causas, el ejemplo que acabamos de mostrar cancela la posibilidad de hablar siquiera, de direcciones epistemológicas.

D) La revolución de la razón

Esta posibilidad de atacar los problemas no-lineales se debe a tres fenómenos que forman parte de la coyuntura actual:

l) La aparición de computadoras que permiten abordar problemas previamente inaccesibles y de maneras previamente inconcebibles[24].

Así, aparece una nueva modalidad de la experiencia que hace surgir una nueva manera de hacer matemáticas: aparece la "matemática experimental" en donde, en cierto sentido y gracias a las computadoras, lo finito se hace pequeo.

2) La observación de la conservación de propiedades o características universales en los problemas no-lineales. Esto va a permitir que la razón adquiera un carácter multidisciplinario y universal: es posible pensar de la misma manera muchas más cosas de las que sospechábamos. Un ejemplo notable de esto es la aparición de la constante de Feigenbaum o de simetrías en los "atractores".

3) El desarrollo de métodos analíticos nuevos: ciertos problemas demandaban nuevos métodos. Al construirse estos métodos, originalmente diseñados para resolver problemas antiguos, la sorpresa fue impresionante. Su alcance era mucho mayor de lo que se esperaba. Nuevamente, la ciencia fue la ocasión de asombro.

En particular, este proceso de manifiesta de manera muy clara en el caso del quehacer matemático que había producido una "galería de monstruos" entre los que destacaban los conjuntos de Cantor, la dimensión de Hausdorff y los conjuntos de Julia. Se trataba de resultados de "actos" matemáticos que carecían de sentido[25]. Este les fue dado cuando nuestra intuición deja de ser lineal para encontrarse en condiciones de tratar los problemas que hoy se agrupan en la "teoría de la complejidad".

## 6.Caos

Consideremos un sistema dinámico tal que:

[24] Von Neumann, *Collected Works*, vol. V, 1-32.

[25] Nuevamente, en este punto, estamos introduciendo la "dialéctica" de Cavallés, única dialéctica posible, entre sentido y acto, entre "demandado" y "demandante".

1) tenga un conjunto numnerable de trayectorias periódicas,

2) Tenga un número no numerable de trayectorias no periódicas,

3) casi toda trayectoria sea inestable.

Para definir los conceptos más importantes, consideramos un conjunto $f$ de funciones continuas $f$ definidas en el intervalo unitario y dependientes de un parámetro discreto $k$.

Antes de proceder a una formalización del fenómeno del caos, se dan dos ejemplos (el Teorema de Feigenbaum demuestra que lo que sucede en estos ejemplos es paradigmático):

1) el mapeo logístico,

2) el coseno recurrente.

Una comparación entre estas dos situaciones, algebraicamente distantes, *muestra* una cierta regularidad.

En el espíritu de Bolzano-Dedekind, un sistema es caótico si:

i) $f$ es sensiblemente dependiente de las condicones iniciales en $k$,

Un sistema dinámico dado por la función $f$ tenga comportamiento caótico es que el sistema sea sensiblemente dependiente de las condiciones iniciales en $k$: i.e. existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $x \in k$ y para toda vecindad $u$ de $x$, existe $y \in u$ y $t > 0$ tal que$[f(t,x) - f(t,y)] > \varepsilon$. En otras palabras, para todo punto $x \in k$, hay al menos un punto cercano a $x$ que diverge de $x$.

ii)$f$ es topológicamente transitiva en $k$,

Decimos que un conjunto invariante cerrado $A$ es topológicamente transitivo sí para dos abiertos cualesquiera $u$ & $V \subset A$, $fn(u) \cap V f \emptyset$

iii)las órbitas periódicas son densas en $k$.

### 6.Etica, y razón

Esta racionalidad, ha producido beneficios indudables: hoy podemos dormir tranquilos y respirar con tranquilidad pues ya no se cierne sobre nuestras cabezas el peligro de una guerra nuclear que acabase con todo de manera repentina; hoy los hombres emprendedores o empresarios cuentan con las garantías necesarias para poder disfrutar de los beneficios del capitalismo multinacional que ha derrumbado las barreras de las naciones.

A cambio, enfrentamos una muerte lenta, a largo plazo, heredable; la muerte de la naturaleza a la que en nuestra divina razón no hemos logrado entender y cuya inminencia no nos alarma. Sin embargo, lo que si debe alarmarnos es la vida cotidiana. Los problemas globales entre las naciones, el comercio internacional $GATT$ y anexas han encontrado las vías de solución racional. Lo que sigue sin encontrar solución son los problemas particulares, Irlanda del Norte, el País Vasco, la Madre Rusia, todos aquellos conflictos que creímos olvidados. Eso sí, ya no habrá guerra nuclear. Moriremos solos sin necesidad de ningún prodigio tecnológico.

La nueva visión de la ciencia, permite comprender que los efectos de la muerte de un hombre en cualquier lugar del mundo pueden ser terriblemente desproporcionados, esta nueva ciencia nos muestra que, como querían los poetas, nuestro corazón sea fusilado cada mañana, cada vez que un hombre muere fusilado en algún lugar cuyo nombre no podemos pronunciar, esta nueva ciencia nos muestra que en cada ni o que se van durmiendo hasta morir de hambre en algún lugar de Africa, muere algo nuestro. Esta nueva ciencia nos confronta, en fin, con la dimensión ética.

Esa dimensión ética, que no es racional en el sentido moderno, pero que nos permite seguir pensando que, a pesar de la falta de democracia y de respeto a los derechos humanos, a la disidencia, al pluralismo, incluso a la libertad, Cuba es moralmente superior al resto de América Latina. En cierto modo incomprensible, seguimos pensando, en algún sitio de ese espíritu que Margaret Thatcher intenta cambiar, que hay algo que está mal, y que esta muy mal. Solo que hoy la ciencia nos permite expresar ese malestar: con la aparición de la complejidad no podemos ignorar la dimensión ética del pensamiento.