

# ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y DINAMICA DE POBLACIONES \*

A.N.Sharkovskii

1981

La teoría moderna de las ecuaciones diferenciales nos brinda la posibilidad, en muchos casos, de estudiar los modelos planteados e incluso de llegar a determinadas conclusiones sobre la evolución de los sistemas involucrados.

El *uso* de las *ecuaciones diferenciales* es el *adecuado*, cuando tratamos con *procesos* en los que, en gran medida, se observa *continuidad* en el *tiempo* o en el *espacio*. Esta condición la cumplen *muchos procesos físicos, químicos y bioquímicos*. Sin embargo en los procesos biológicos, particularmente en los *sistemas ecológicos*, con frecuencia es necesario considerar adicionalmente *cierto retardo*, condicionado por el *tiempo de crecimiento de los individuos de la especie*, que entran en el sistema.

Esto último conduce a que, en los modelos matemáticos, en lugar de aparecer ecuaciones diferenciales se plantean ecuaciones diferо diferenciales, integro diferenciales o similares.

*Tales tipos de ecuaciones*, por regla general, son ya *entes matemáticos muy complicados para ser estudiados cualitativamente*, digamos por ejemplo problemas como el de la influencia de tales o cuales parámetros considerados en el modelo, o el estudio de la estabilidad del modelo mismo, etc. Además con frecuencia ocurre que dichos tipos de *ecuaciones sirven para obtener no resultados cualitativos, sino precisamente cuantitativos*, digamos por ejemplo el cálculo de determinadas soluciones bajo ciertos valores fijos de los parámetros y todo lo anterior bajo la hipótesis de que el modelo imita suficientemente bien al sistema biológico considerado.

---

\* Traducido por Guillermo Gómez A.

En el arsenal de la matemática, al lado de las ecuaciones de los tipos mencionados, se cuenta además con las *ecuaciones en diferencias*, en la mayoría de los casos, sustancialmente más simples para la investigación que las ecuaciones diferenciales o difero diferenciales, sin mención ya de otros tipos de ecuaciones mas complicadas.

Al estudiar los sistemas ecológicos, por ejemplo, al estudiar la dinámica de las poblaciones, donde lo discreto del desarrollo en el tiempo usualmente está a la vista, es natural también usar como modelos matemáticos a las ecuaciones en diferencias. Esto en primer lugar tiene relación con *poblaciones cuyas generaciones no se traslapan*.

Las *ecuaciones en diferencias* nos ofrecen muy amplias *posibilidades* para *deducciones cualitativas* acerca de cómo cambian las propiedades del sistema al variar los parámetros del modelo. Desgraciadamente los especialistas que utilizan como instrumento de trabajo el análisis matemático con frecuencia conocen insuficientemente la teoría de las ecuaciones en diferencias.

En los últimos años han aparecido trabajos tanto de biólogos como de matemáticos, en los cuales se consideran las ecuaciones en diferencias, generadas por modelos ecológicos sencillos. En estas ecuaciones se estudia el comportamiento asintótico de sus soluciones, se analizan las variaciones cualitativas a las que llevan los cambios en los parámetros de tales ecuaciones. En particular, en estos trabajos, se muestra que las *ecuaciones en diferencias de tipos extremadamente simples puede llegar a tener soluciones de comportamientos asintóticos muy complicados* (vease por ejemplo en [1]-[11] ). Estos y toda una serie de problemas suficientemente delicados de la teoría cualitativa de las ecuaciones en diferencias fueron estudiados por el autor a mediados de los años 60 en [12].

Las investigaciones consideradas sobre las ecuaciones en diferencias, fundamentalmente, contienen resultados que pueden ser ubicados en los trabajos arriba citados ([1]-[12]), o bien deducidos de ellos. En lo sucesivo trataremos sobre ciertos problemas de la teoría cualitativa de las ecuaciones en diferencias más simples y en particular trataremos:

1) Qué tan distintas son las propiedades, sobre todo las *propiedades oscilatorias*, de las soluciones de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, las cuales necesariamente deberán tomarse en cuenta al escoger o plantear

los modelos matemáticos.

2) El cómo influyen los *parámetros* de las ecuaciones en diferencias sobre las propiedades de sus soluciones (algunos aspectos de la teoría de bifurcaciones). Bajo qué condiciones las soluciones pueden tener un carácter oscilatorio simple o por el contrario complicado, particularmente para los modelos ecológicos más simples que describen la dinámica del tamaño de las poblaciones.

3) Qué es un " *atractor extraño*". En los últimos años este ente se ha vuelto muy popular entre físicos y matemáticos. El atractor extraño ha resultado ser un modelo de las oscilaciones estocásticas (en los modelos determinísticos). Tales atractores hacen en principio imposibles los pronósticos a largo plazo, en una serie de casos. Estos atractores aparecen incluso en los modelos ecológicos sencillos y conducen a que para ciertos valores de los parámetros el tamaño de la población con el tiempo se comporta de manera irregular, de manera *cuasialeatoria*, tomando en cuenta que dichos modelos no contienen parámetros aleatorios. Tales tipos de oscilaciones cuasialeatorias han sido observadas en condiciones de laboratorio múltiples veces. En cuanto a las poblaciones que se observan en la naturaleza, en particular las que habitan regiones templadas y frías, donde la diversidad de especies no es muy amplia, para ellas también son típicas las oscilaciones significativas de la población, incluso las muy irregulares (véase, por ejemplo [13]).

## 1 DISTINCION EN LAS PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

Como es sabido las soluciones de las ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

donde  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  pueden comportarse de la manera siguiente:

Si  $n = 1$ , entonces la ecuación anterior no tiene soluciones oscilatorias, cada *solución* resulta ser *constante*, o bien una función *monótona*, cuya gráfica si la función es acotada, nos describe la así llamada curva “*logística*”.

Las soluciones

$$x(t) = \text{const.}$$

corresponden a los ceros de la función  $F(x)$ .

Si  $a_1, a_2$  son dos ceros sucesivos de la función  $F(x)$ :

$F(a_1) = F(a_2) = 0$  y  $F(x) \neq 0, x \in (a_1, a_2)$ , entonces cuando  $x(0) \in (a_1, a_2)$  tendremos que

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} a_1 & , \text{ si } F(x) < 0 \\ a_2 & , \text{ si } F(x) > 0 \end{cases}$$

En particular para la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2; a, b > 0$$

cuya parte derecha se reduce a cero en

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{a}{b},$$

de manera que toda solución  $x(t)$  monótonamente converge a la solución  $\frac{a}{b}$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ , si  $x(0) > 0$  (véase Fig. 1).

Para  $n = 2$  la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n \tag{1}$$

puede tener además de soluciones monótonas y de equilibrio también *soluciones oscilatorias*, que incluye las periódicas. La búsqueda de soluciones periódicas no es un problema sencillo. Para casi todas la ecuaciones <sup>1</sup> los posibles tipos de soluciones quedan agotadas por las soluciones de equilibrio, las periódicas y las que asintóticamente se acercan a estas soluciones.

Para  $n = 3$  el espectro de posibles soluciones se amplía sustancialmente. Ahora las ecuaciones tipo (1) admiten soluciones correspondientes a las llamadas *trayectorias homoclínicas*, descubiertas en problemas de mecánica

Para  $n = 3$  el espectro de posibles soluciones se amplía sustancialmente. Ahora las ecuaciones tipo (1) admiten soluciones correspondientes a las llamadas *trayectorias homoclínicas*, descubiertas en problemas de mecánica

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, para las llamadas ecuaciones groseras o estructuralmente estables. Para  $n = 2$ , sabido es que, casi todas las ecuaciones son estructuralmente estables.

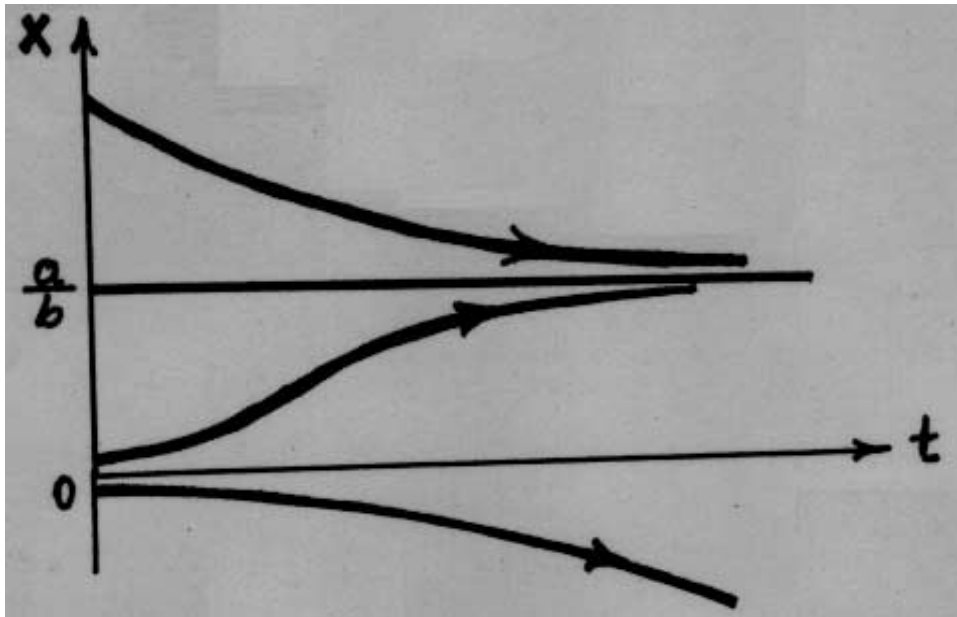


Fig. 1:

celeste por Poincaré. Estas trayectorias son tales que tanto para tiempos crecientes como decrecientes tienden a una misma trayectoria periódica (Fig. 2). La existencia de una tal trayectoria implica la existencia, en cualquier vecindad de ella, de un conjunto numerable de trayectorias periódicas, de períodos tan grandes como se quiera, y también implica la existencia de trayectorias con comportamientos “cuasi aleatorios”. Las trayectorias de este último tipo resultan ser inestables (pues casi todas las trayectorias cercanas se separan de ellas) y pueden pertenecer tanto a los conjuntos inestables como a los estables. Precisamente a tales conjuntos estables se les llamó *atractores extraños*. Más en detalle sobre estos atractores al final del folleto.

A diferencia de las ecuaciones diferenciales (ver ecuación (1)) las ecuaciones en diferencias correspondientes:

$$x(t+1) = F(x(t)) , \quad (2)$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ , incluso para  $n = 1$  admite ya todos los tipos de soluciones que poseen las ecuaciones diferenciales (1) para  $n = 1, 2, 3$  sobre las que hablamos arriba. Esto lo mostraremos a través de un ejemplo,

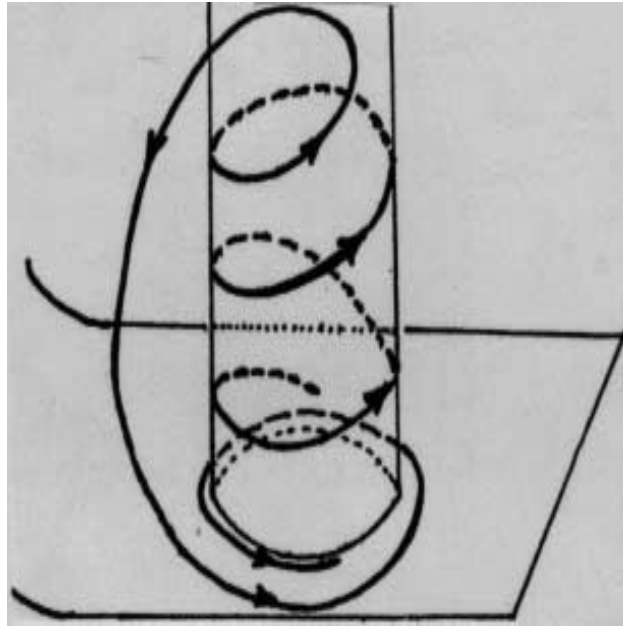


Fig. 2:

a través de la ecuación en diferencias no lineal de tipo más simple:

$$x(t + 1) = ax(t)(1 - bx(t)) \quad (3)$$

que resulta ser el modelo más sencillo que describe la dinámica del tamaño de una población con generaciones que no se traslapan, lo que con frecuencia ocurre entre los insectos, y con recursos acotados. El coeficiente  $a$  representa la tasa de reproducción.

Junto a la ecuación (3) en el modelaje de tales poblaciones es usada la ecuación

$$x(t + 1) = ax(t)e^{-bx(t)} \quad (4)$$

además de otra serie de ecuaciones en diferencias suficientemente simples (véase [5]). El análisis matemático de (4) puede realizarse de la misma forma como se realiza el análisis de (3). Las propiedades de las ecuaciones (3) y, por ejemplo (4), en sus rasgos esenciales coinciden.

Desde el punto de vista de las aplicaciones biológicas el modelo (3), en comparación con el modelo (4), tiene ciertas desventajas: En (4) la tasa de

reproducción  $a$  puede ser cualquiera, mientras que en (3) el coeficiente  $a$  tiene una cota superior, dado que  $0 \leq a \leq 4$  para que  $x(t) \geq 0$ , cualquiera que sea  $x(0) \in [0, \frac{1}{b}]$ .<sup>2</sup>

## 2 INFLUENCIA DE LOS PARAMETROS EN LAS PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES

Recurramos de nuevo a la ecuación (3). Con el fin de simplificar más aún el problema consideraremos que en la ecuación (3)  $b = 1$ , lo cual puede lograrse introduciendo la nueva función  $\bar{x} = bx$ , y ahora trataremos el problema de cómo cambiar las propiedades de las soluciones de la ecuación

$$x(t+1) = ax(t)[1-x(t)] \quad (5)$$

al variar el valor del parámetro  $a$ .

En otras palabras, estudiemos como cambia a lo largo del tiempo el tamaño de la población para diferentes valores del coeficiente de reproducción  $a$ , si usamos el modelo (5).

Recordemos primeramente algunos hechos y conceptos relacionados con las ecuaciones en diferencias necesarios en la consecución de nuestro análisis.

La ecuación en diferencias (ver ecuación (2)) define la siguiente transformación

$$q : x \longrightarrow F(x) \quad (6)$$

de  $\mathfrak{R}^n$  en  $\mathfrak{R}^n$ , que resulta cómodo usar al investigar las propiedades de las soluciones de la ecuación (2).

La solución  $x(t)$  de la ecuación en diferencias (ver ecuación (2)) que satisface la condición inicial  $x(0) = x_0$ , puede escribirse de la siguiente forma:

$$x(t) = q^t x_0, \quad t \in Z_0^+ = \{0, 1, 2, \dots\},$$

donde  $q^i = q(q^{i-1})$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ), con  $q^0 x \equiv x$ .

La solución del problema (2) con condición inicial queda dada por el conjunto de puntos

$$x_0, x_1 = qx_0, x_2 = q^2x_0, \dots, x_t = q^t x_0, \dots$$

---

<sup>2</sup>En efecto, si  $F(x) = ax(1-bx)$  y  $a, b > 0$ , entonces  $F(x) > 0$  para las  $x \in (0, \frac{1}{b})$ ;  $F(0) = F(\frac{1}{b}) = 0$  y  $\max F(x) = F(\frac{1}{2} \cdot b) = \frac{a}{4b}$ , por lo tanto  $F[0, \frac{1}{b}] \subseteq [0, \frac{1}{b}]$  sólo si  $a < 4$ .

al que se acostumbra llamar *trayectoria* (de la transformación  $q$ ) que pasa por el punto  $x_0$ .

Una trayectoria se llama *periódica*, o *ciclo de período  $m$* , si

$$q^m x_0 = x_0 \quad \text{y} \quad q^t x_0 \neq x_0 \quad (0 \leq t < m)$$

Una trayectoria periódica corresponde a una solución periódica.

La búsqueda de trayectorias periódicas de un período dado  $m$ , se reduce al problema de hallar las raíces de la ecuación

$$\underbrace{F(F(\dots F(x)\dots))}_{m \text{ veces}} = x$$

que es sustancialmente más simple que el problema de buscar las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales.

La trayectoria periódica

$$\gamma = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$$

se llama *atractora* (o *estable*), si existe una vecindad  $U$  de esta trayectoria, todos los puntos de la cual son atraídos hacia  $\gamma$ , esto es, cualquiera que sea  $x' \in U$  y para cualquier vecindad  $U'$  de la trayectoria  $\gamma$  existe un  $t'$  tal que  $q^t x' \in U'$  para  $t > t'$ .

La trayectoria  $\gamma$  es *atractora*, si los *números característicos*

$$\lambda_1(\gamma), \lambda_2(\gamma), \dots, \lambda_n(\gamma)$$

de la matriz de la parte lineal de la transformación

$$x \longrightarrow F(F(F(\dots F(x)\dots))) ,$$

en  $x = x_0$  y en valor absoluto, son menores que 1.

En particular, para  $n = 1$  la trayectoria periódica es atractora, si

$$\left| \frac{d}{dx} F(F(\dots F(x)\dots)) \Big|_{x=x_0} \right| = \left| F'(x_0) \dots F'(x_{m-1}) \right| < 1$$

La trayectoria periódica  $\gamma$  se llama *repulsora*, si existe una vecindad  $U$  de la trayectoria  $\gamma$ , cuyos puntos, excepto los de la misma trayectoria  $\gamma$ , abandonan la vecindad  $U$ , es decir, para cualquier punto  $x' \in U$ , no perteneciente a la trayectoria  $\gamma$ , existe un  $t' > 0$ , tal que:  $q^{t'} x' \notin U$ .



La trayectoria  $\gamma$  es *repulsora*, si

$$|\lambda_i(\gamma)| > 1, (i = 1, 2, \dots, n).$$

A la ecuación en diferencias (ver ecuación (5)) para  $0 \leq a \leq 4$ , le corresponde la transformación del segmento  $I = [0, 1]$  en sí mismo

$$q : x \longrightarrow ax(1 - x), \quad (7)$$

por lo tanto, si  $x(0) = x_0 \in I$ , entonces para  $t > 0$  tendremos también que

$$x(t) = q^t x_0 \in I$$

Lo anterior no obsta para que el comportamiento de  $x(t)$ , cuando  $t \longrightarrow \infty$  y diferentes valores de  $a$ , pueda ser sustancialmente distinto.

• Para  $0 \leq a \leq 1$  la transformación (7) tiene un único punto fijo  $x = 0$  sobre  $I = [0, 1]$ . Además este punto fijo es *atractor*:

$q^i x \longrightarrow 0$  para cualquier  $x \in (0, 1)$  e  $i \longrightarrow \infty$ , puesto que para  $x \in (0, 1)$ :  $F(x) < x$ , véase Fig.3;

o sea que cualquiera que sea  $x(0) = x_0$  del  $(0, 1)$ :  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

La interpretación biológica de este resultado es inmediata: si el coeficiente de reproducción no es mayor que 1, entonces el tamaño de la población tiende a extinguirse.

• Para  $a > 1$  el punto fijo  $x = 0$  de la transformación (ver ecuación (7)) resulta ser repulsor y sobre el intervalo  $I$  aparece un nuevo punto fijo adicional

$$x = \alpha_1 = 1 - \frac{1}{a}$$

Dado que

$$\frac{dF}{dx} = a(1 - 2x)$$

entonces

$$\lambda(\alpha_1) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=\alpha_1} = 2 - a$$

y consecuentemente el punto  $x = \alpha_1$ , cuando  $1 < a < 3$ , resulta ser un punto *atractor*. Para cualquier  $x_0 \in (0, 1)$ :

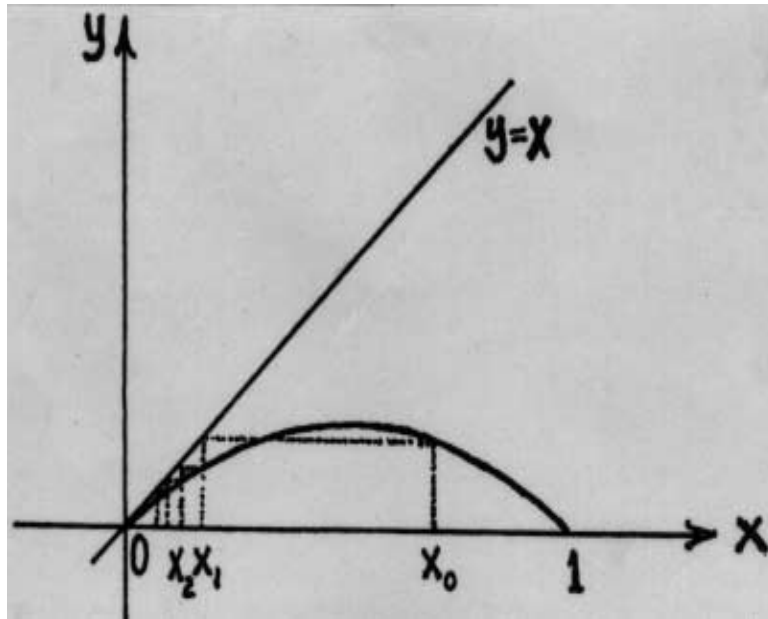


Fig. 3:

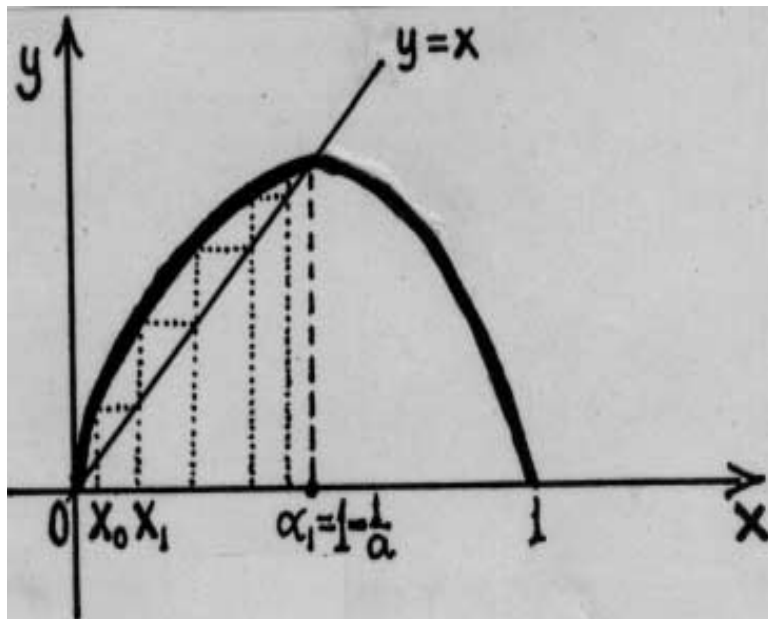


Fig. 4:

$$q^i x_0 \longrightarrow \alpha_1$$

(véase Fig.4).

- Si  $1 < a < 2$ , entonces tendremos que

$$\lambda(\alpha_1) > 0$$

y la trayectoria  $q^i x_0$  se acerca a  $\alpha_1$  oscilando alrededor del mismo valor  $\alpha_1$ , tomando sucesivamente valores mayores y menores que  $\alpha_1$ .

Si  $x(t)$  representa el tamaño de una población, lo antedicho significa que, para  $a > 1$  el tamaño de la población crece incluso cuando al inicio dicho tamaño sea pequeño, y con el tiempo, si  $1 < a < 3$  el tamaño de la población se estabiliza y tiende a  $\alpha_1$ .

El paso del parámetro a través del valor  $a = 3$  genera una nueva bifurcación: el punto fijo  $x = \alpha_1$  pasa de ser un punto atractor a ser un punto repulsor y de él nace un ciclo de período 2, formado por los puntos

$$\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}$$

- Este ciclo es atractor para

$$3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3.449...^3$$

(véase la Fig. 5)

La trayectoria  $q^i x_0$  es atraída por el ciclo

$$\{\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}\}$$

para cualquiera que sea

$x_0 \in I \setminus \{0, 1\}$ , y el conjunto numerable de puntos que llegan a  $\alpha_1$

Obsérvese que la sucesión  $q^{2i} x_0$  tiende a uno de los puntos del ciclo, mientras que la sucesión  $q^{2i+1} x_0$  tiende al otro. Véase Fig. 6.

---

<sup>3</sup>Los puntos  $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$  quedan definidos como raíces de la ecuación  $F(F(x)) = x$ , diferentes de las raíces de la ecuación  $F(x) = x$ ; para los puntos  $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$  obtenemos la ecuación:  $a^2 x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$ ;  $\lambda(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}) = \frac{dF}{dx}|_{\alpha_2^{(1)}} \cdot \frac{dF}{dx}|_{\alpha_2^{(2)}} = a^2(1 - 2\alpha_2^{(1)})(1 - 2\alpha_2^{(2)}) = a^2[1 - 2(\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}) + 4 + 2a - a^2]$ ;  $|\lambda(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)})| < 1$ , si  $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ .

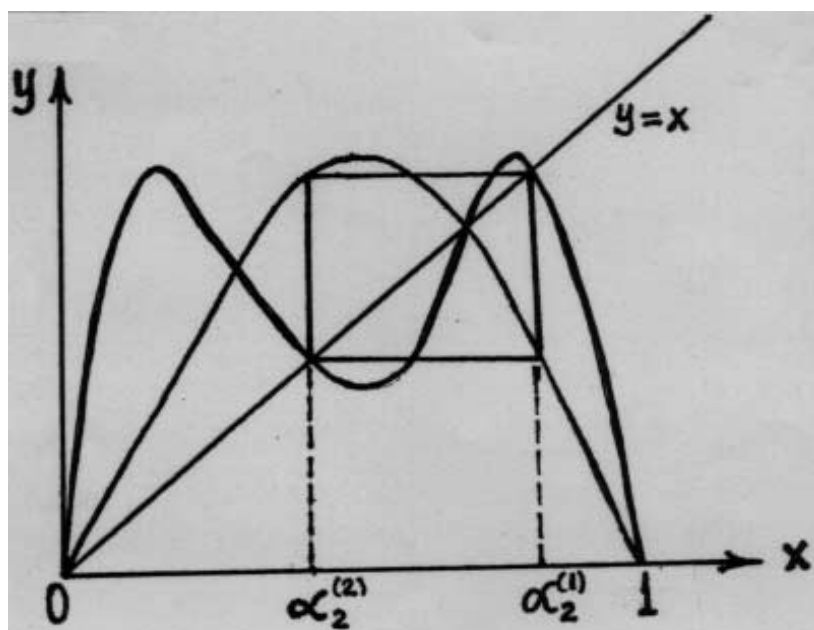


Fig. 5:

La interpretación biológica de lo arriba mencionado se reduce a que si el coeficiente de reproducción <sup>4</sup> satisface la condición:

$$3 < a < 3.449\dots$$

el tamaño de la población, con el tiempo, ya no se estabilizará y empezará a tener oscilaciones de período 2.

- Al pasar el valor del parámetro a través de  $a = 1 + \sqrt{6}$  ocurre la siguiente bifurcación: El ciclo  $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$  de atractor se transforma en repulsor y bajo estas condiciones nace un ciclo atractor de período 4.

- Si luego aumentamos el valor de la tasa de crecimiento  $a$ , entonces el ciclo de período 4 también se convierte en repulsor y de él nace un ciclo atractor de período 8.

La sucesiva duplicación de los períodos en los ciclos atractores al crecer el valor del parámetro  $a$  ocurre hasta el valor

$$a = a^* = 3.57\dots$$

---

<sup>4</sup>o tasa intrínseca de crecimiento.

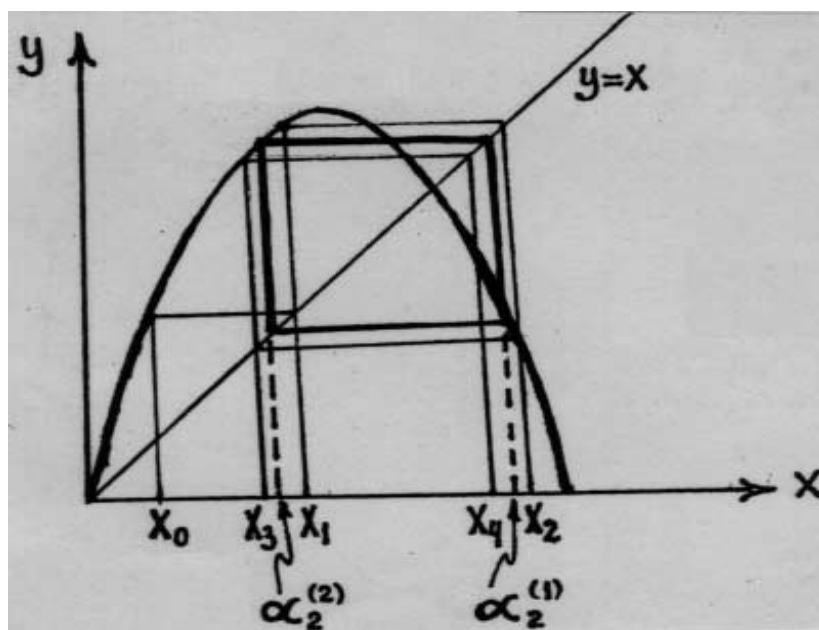


Fig. 6:

- Para  $a = a^*$  la transformación (ver ecuación (7)) tiene ciclos de períodos  $2^i (i = 0, 1, 2, \dots)$  y todos ellos son repulsivos, además no posee ciclos de otros períodos.

Las trayectorias

$$\{q^i x_0\}_{i=0}^{\infty}$$

son atraídas por un *conjunto de Cantor perfecto y denso en ninguna parte*, para casi todos los puntos  $x_0 \in I$ . Este conjunto consiste de un continuo de trayectorias, cada una de las cuales es densa en este mismo conjunto; una de tales trayectorias es la que pasa por  $x = \frac{1}{2}$ .

- Si continuamos aumentando el valor del coeficiente  $a$  comenzará la aparición de nuevos ciclos incluso de períodos distintos a

$$2^i (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Así por ejemplo para  $a = 3.83$  la transformación (ver ecuación (7)) posee ciclos de todos los períodos enteros.

Bajo estas condiciones, la aparición de nuevos ciclos ocurre de dos maneras diferentes: como lo descrito arriba, esto es cuando un ciclo atractor se convierte en repulsor y éste genera un nuevo ciclo atractor de período doble, o bien aparece “de la nada”, es decir nace un ciclo que simultáneamente es atractor y repulsor, el cual inmediatamente se disocia en dos ciclos, del mismo período uno de los cuales es atractor y el otro repulsor (en particular, éstos aparecen como resultado de la acumulación de ciclos de períodos tan grandes como se quiera).

Sin embargo, si para  $a < a^*$  los ciclos definen el comportamiento asintótico de todas las trayectorias de la transformación (ver ecuación (7)) en el sentido de que para  $t \rightarrow +\infty$ , cada trayectoria tiende a alguno de los ciclos y solamente a uno, en cambio para  $a > a^*$  la situación cambia.

- Cuando  $a \geq a^*$  para la misma transformación (7) ya existen trayectorias que no son ciclos atractores. Tales trayectorias, para las  $a$  pertenecientes a un cierto conjunto abierto y denso del intervalo  $[a^*, 4]$ , son muy pocas: La medida del conjunto de puntos  $a$  correspondientes a estas trayectorias es igual a cero. A su vez existen un continuo de valores del parámetro  $a$ , para los cuales casi todas las trayectorias no serán atraídas por ciclos.<sup>5</sup>

Aquí podemos separar las dos situaciones, que en cierto sentido, son las más simples.

Con una de estas situaciones ya nos enfrentamos al ver el caso

$$a = a^* = 3.57\dots$$

Existe un conjunto numerable  $A^*$  de valores del parámetro  $a \in [0, 4]$  formado por puntos límite de aquellos valores bajo los cuales ocurre la sucesiva duplicación de períodos de ciclos atractores.

Un tal valor límite además de  $a^*$  es, por ejemplo  $a_3^* \simeq 3.85$ . Para  $a = 3.83$ , como ya fue señalado hay un ciclo atractor de período 3 y al aumentar el valor del parámetro hasta  $a_3^*$  son generados sucesivamente ciclos atractores de períodos:

$$3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, \dots$$

Para  $a = a_3^*$ ; ya no existe ningún ciclo atractor.

Cuando  $a \in A^*$  casi todos los puntos  $x \in I$  son atraídos por un *conjunto de Cantor* (esto es, por un conjunto perfecto y denso en ninguna parte), que

---

<sup>5</sup>La medida de Lebesgue de tales valores del parámetro  $a$  es positiva como fue demostrado por Yákovson M.V. en “Absolutely continuous invariant measures for one parameter families of one dimensional maps”. COMMUN.MATH.PHYS.,1981,P.39-48.

no contiene ciclos y que resulta ser la cerradura de la trayectoria que pasa por

$$x = \frac{1}{2}.$$

La segunda situación que es adecuado separar también se realiza para un conjunto numerable  $A^{**}$  de valores del parámetro  $a$ , en particular para los valores  $a = 4$  y  $a = a^{**} = 3.678\dots$

El conjunto  $A^{**}$  de valores del parámetro  $a$ , está formado por aquéllos y sólo aquéllos valores de  $a$  para los cuales existe un entero  $k$  (para cada  $a$  el suyo) tal que el punto  $q^k \frac{1}{2}$  es periódico y pertenece a un ciclo repulsor.

Cuando  $a \in A^{**}$  un conjunto  $J$  resulta ser *atractor* si está formado de un número finito de intervalos cerrados  $J_1, \dots, J_m$ , los cuales transitan unos en otros (“encicladados”) bajo la transformación (ver ecuación (7)).

Las trayectorias  $\{q^i x\}_{i=0}^{\infty}$  son densas sobre todo  $J$ , para casi todas las  $x \in J$ . Al mismo tiempo sobre el conjunto  $J$  (a diferencia del caso anterior) aparecen densamente en todos los puntos periódicos. Casi todos los puntos de  $I$  son atraídos por el conjunto  $J$ , esto es para casi cada punto  $x \in I$  existe un  $i_x$  tal que  $q^{i_x} x \in J$  y la trayectoria  $\{q^i x\}_{i=i_x}^{\infty}$  es densa sobre  $J$ .

Para  $a = 4 : J = I = [0, 1]$ , cuando  $a = a^{**}$  el conjunto  $J$  está también formado por un solo intervalo

$$J^{**} = \left[ \frac{a^2(4-a)}{16}, \frac{a}{4} \right] = [0.27\dots, 0.91\dots]$$

(véase Fig. 7)

Señalemos que la transformación (ver ecuación (7)) *tiene no más de un ciclo atractor*, para cualquier  $a$ , como fue mostrado ya desde Jullia en [14]. Si tenemos un ciclo atractor, entonces, como ya se mencionó, casi todos los puntos  $x \in I$  son atraídos por dicho ciclo.

Por lo arriba visto, para aquellos valores de  $a$ ,  $a \in [0, 4]$ , en los que no existen ciclos atractores, casi todos los puntos  $x \in I$  son atraídos por un cierto *conjunto atractor indescomponible* (este conjunto contiene una trayectoria densa en sí misma). Lo mismo ocurre para los  $a \in A^* \cap A^{**}$  (ahora el conjunto atractor es la llamada  $\omega$  prolongación del punto  $x = \frac{1}{2}$ ; por definición la  $\omega$  prolongación de un punto  $x$  es igual a

$$\bigcap q^i \left\{ \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{i > 0} \overline{q^i U_\delta(x)} \right\}$$

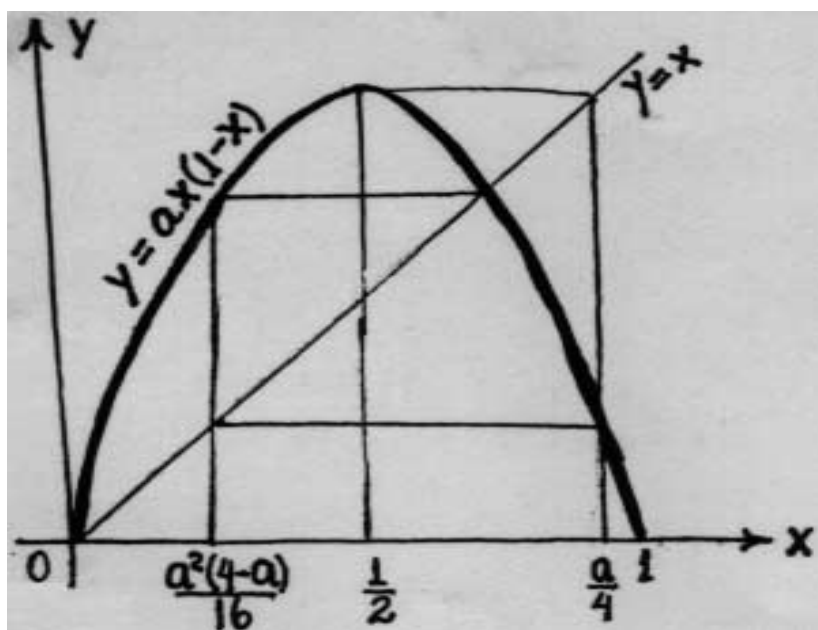


Fig. 7:

donde  $U_\delta(x)$  es una vecindad de radio  $\delta$  del punto  $x$  ).

¿Qué conclusiones, de todo lo dicho, podemos sacar sobre la dinámica del tamaño de la población si como modelo usamos la ecuación (5)?

Para los valores del parámetro  $a > 3$  , el tamaño de la población con el tiempo no se estabiliza, sino que empezará a oscilar.

Para ciertos valores del coeficiente a las oscilaciones mencionadas tendrán períodos no muy grandes, por ejemplo:

con período 2 para  $3 < a < 3.44\dots$

con período 3 para  $3.828 < a < 3.845$ , etc.

Para otros valores del parámetro a el período de las oscilaciones de equilibrio puede ser muy grande, como por ejemplo cerca del valor  $a = 3.57$  y en este caso las oscilaciones se parecerán a las no regulares.

Finalmente existen valores del parámetro a cuando las oscilaciones del tamaño de la población revisten un carácter estocástico (cuasialeatorio); por ejemplo, para

$$a = a^{**} = 3.678\dots$$

el tamaño de la población  $x(t)$  oscilará entre



0.27...      y      0.91...

y en este caso *sólo se puede hablar de la probabilidad con la que  $x(t)$  tomará tales o cuales valores del intervalo (0.27..., 0.91...) cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

De este modo, hemos visto como un *modelo en diferencias* completamente *simple* permite *describir oscilaciones* de carácter *muy diverso*.

Análogos resultados son también válidos para la ecuación en diferencias (ver ecuación (4)).

En particular la transformación

$$x \longrightarrow axe^{bx}$$

correspondiente a la ecuación en diferencias (4)/como en otras tantas transformaciones usadas en los modelos ecológicos/ posee a lo más un ciclo atractor para cualesquiera que sean los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  (véase [10] y [15]).

Algunas *propiedades* de la ecuación en diferencias (ver ecuación (5)) a las que nos hemos referido no son privativas de ella, sino que por lo contrario se cumplen para cualquier ecuación en diferencias tipo (ver ecuación (2)) cuando  $n = 1$ .

Si la transformación

$$x \longrightarrow F(x) \tag{8}$$

es *continua*, entonces a partir de que la misma transformación (8) *tiene un ciclo de período  $m$  se sigue* que tendrá también *ciclos* de cualquier *período* posterior a  $m$  en el conjunto de los números naturales ordenados [16] de la siguiente forma:

$$3, 5, 7, 9, \dots, 3.2, 5.2, 7.2, 9.2, \dots, 3.2^2, 5.2^2, 7.2^2, 9.2^2, \dots, 2^3, 2^2, 2, 1 .$$

*Existen trayectorias* de la transformación (8) que *no son atraídas por los ciclos, si y sólo si* el conjunto formado por los puntos de los *ciclos no es cerrado* [17].

*En particular tales trayectorias existen si la transformación tiene un ciclo de período distinto de  $2^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) /en este caso el conjunto de puntos de los ciclos no sólo no es cerrado, sino que no es un conjunto tipo  $G_\delta$ , esto es, no es representable como *intersección* de conjuntos *abiertos*/ (véase [17]).*

Además la *entropía topológica* de la transformación (8) *es positiva, si posee un ciclo de período distinto a  $2^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) / véase [18] y [19]/.*

### 3 ATRACTORES EXTRAÑOS

En los últimos años ha sido puesta mucha atención, por parte de físicos y matemáticos que trabajan con ecuaciones en diferencias y diferenciales, sobre los conjuntos atractores de las soluciones de tales ecuaciones que a su vez no resulten ser variedades en el sentido topológico.

*Ruelle y Takens* [20] los llamaron *atractores extraños*. El interés a estos atractores está particularmente relacionado con la esperanza de *clarificar*, finalmente, el *mecanismo* a través del cual aparecen las *oscilaciones turbulentas*.

El atractor más conocido es el así llamado *atractor de Lorenz* por primera vez detectado por el conocido *meteorólogo* Edward Lorenz [21] al *analizar numérica-mente* el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}x &= -x + y, \\y &= rx - y - xz, \\z &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{9}$$

que *aparece* al investigar el *movimiento convectivo* de la capa de un *líquido calentado* por debajo.

No obstante el gran número de trabajos dedicados al atractor de Lorenz, la *demonstración matemática* de la *existencia* de un *atractor extraño* en el sistema (9) que sólo contiene dos términos no lineales (cuadráticos) hasta el momento *no se conoce*.

Es más fácil explicar qué es un atractor extraño y qué relación puede tener con los modelos ecológicos a través de las ecuaciones en diferencias.

Uno de los atractores extraños más simples es el solenoide de Smale Van Dan Sing [22] y [23], el cual se construye para una transformación que manda el interior del toro en sí mismo.

Aquí daremos un ejemplo de atractor extraño para un sistema de ecuaciones en diferencias de segundo orden relacionado con los modelos que nos ocupan.

La *definición formal* de un atractor extraño puede ser dada de la manera siguiente:<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>En este trabajo usaremos el término suficientemente reconocido de “atractor extraño” aunque nos parece más adecuado el nombre de “atractor mezclador” el cual refleja más fielmente el contenido de este concepto.

Sea

$$\begin{aligned} q &: X \longrightarrow X \\ q &: X \longrightarrow F(X) \end{aligned}$$

una transformación del espacio “fase”  $X$  en sí mismo (definida, por ejemplo, mediante las soluciones de una ecuación diferencial o en diferencias) Sea  $\Lambda$  un conjunto invariante ( $q\Lambda = \Lambda$ ) y cerrado en  $X$ .

Al conjunto  $\Lambda$ , que no se reduce a un punto, lo llamaremos *atractor extraño* de la transformación  $q$ , si:

i) Existe una vecindad  $U$  del conjunto  $\Lambda$  tal que

$$U \supset qU \supset q^2U \supset \dots \quad \text{y} \quad \bigcap_{i \geq 0} q^i U = \Lambda$$

ii) Para cualquier conjunto  $V \subset \Lambda$ , abierto en  $\Lambda$ , y cualquier cubierta abierta finita  $\Sigma = \{\sigma_j\}$  del conjunto  $\Lambda$ , existen  $K = K(V, \Sigma)$  y  $m \geq 1$  que dependerá sólo de  $\Lambda$ , tales que para todas las  $j$ :

$$q^k \left( \bigcup_{i=0}^{m-1} q^i V \right) \cap \sigma_j \neq \emptyset$$

El atractor extraño  $\Lambda$ , expresándose figuradamente, se caracteriza porque una “gota” que cubre a todo  $\Lambda$  con el tiempo se contrae a solo  $\Lambda$ , mientras que una “gota” caída dentro de  $\Lambda$  con el tiempo se dilata a todo  $\Lambda$ .

La condición ii) implica que sobre  $\Lambda$  tiene lugar una mezcla desordenada de tipo topológico: Para cualquier par de conjuntos abiertos  $V_1$  y  $V_2$  en  $\Lambda$  existe un  $k$  tal que

$$q^k V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$$

y es por esto que existen trayectorias densas en  $\Lambda$ .

De la mencionada definición se desprende que los *atractores extraños* también *existen* en *espacios de dimensión 1*, por ejemplo véase la ecuación (5).

En efecto cuando  $a \in A^{**}(a \neq 4)$ , no es difícil darse cuenta que *tales atractores resultan ser* los conjuntos

$$J = \bigcup_{s=1}^m J_s$$

donde  $J_1, J_2, \dots, J_m$  son intervalos que la transformación  $q$  “encicla” (véase arriba):

- 1) existe un conjunto abierto  $U \supset J$  y una  $n = n(U)$  tales que  $q^n U = J$ .
- 2) para cualquier conjunto abierto (por ejemplo para un intervalo)  $V \subset J$

existe una  $k = k(V)$  tal que  $q^k \left( \bigcup_{i=0}^{m-1} q^i V \right) = J$ .

Cuando  $a = a^{**} = 3.678\dots$  el atractor extraño resulta ser el intervalo

$$J^{**} = (0.27\dots, 0.91\dots);$$

como vecindad  $U$  podemos tomar cualquier intervalo  $(c, d) \in J^{**}$  tal que  $[c, d] \subset (0, 1)$ .

Tanto para la ecuación (5) como para cualquier otra ecuación en diferencias con  $n = 1$ <sup>7</sup>, *no existen atractores extraños distintos de la unión de un número finito de intervalos*. Por lo tanto los atractores extraños en el sentido topológico, para  $n = 1$ , no resultan ser “extraños”.

La definición de atractor extraño en términos de la teoría ergódica está dada en (24).

Para *percibir* que tan complicada puede resultar la estructura de un conjunto atractor hay que recurrir a las ecuaciones en diferencias con  $n \geq 2$ .

El modelo ecológico (5) pudimos haberlo completado con un “depredador” y analizar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t+1) = ax(t)[1-x(t)] \\ y(t+1) = by(t)[g(x(t)) - y(t)] \end{cases} \quad (10)$$

Aquí, en este sistema, se supone que el “depredador” *no ejerce una influencia sustancial* sobre el tamaño de la población de “presas”, la función  $g(x)$  caracteriza la *reserva de “alimento”*. Un tal sistema puede poseer atractores extraños, por ejemplo, para  $a = 3.678\dots$  es de comportamiento complicado, sin embargo proponer *una descripción visual de un tal conjunto atractor no es un problema sencillo*. Por esto *en lugar del sistema (10) consideremos un sistema* para el cual no es difícil mostrar como se ve un atractor extraño (incluso en el sentido topológico). Precisemos: el sistema siguiente

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) \\ y(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{10}y(t) \end{cases} \quad (11)$$

---

<sup>7</sup>significa  $x \in \mathfrak{R}^n$ , con  $n = 1$

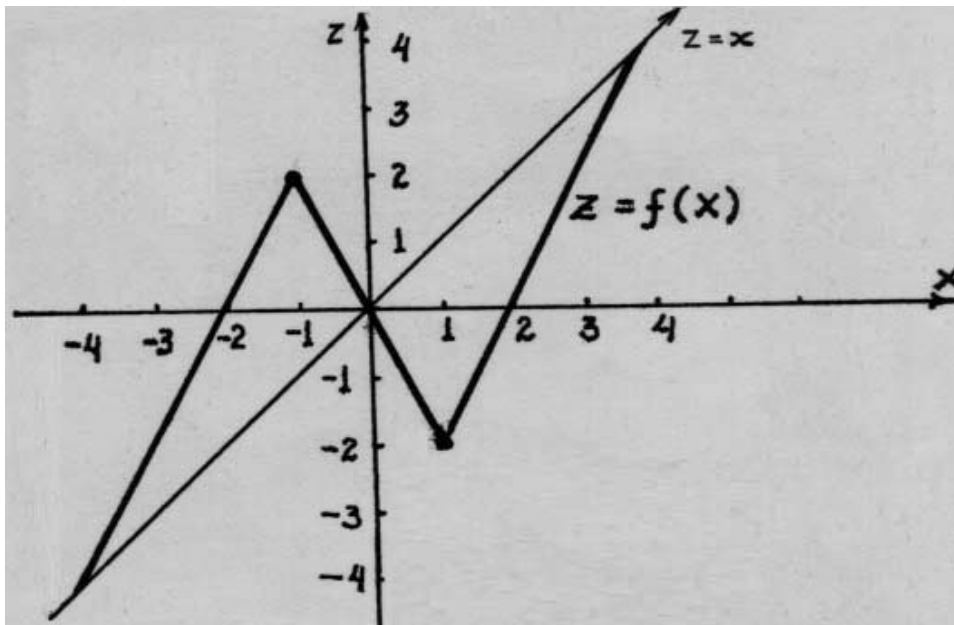


Fig. 8:

con

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < -1 \\ -2x, & |x| \leq 1 \\ 2x - 4, & x > 1 \end{cases}$$

el cual contiene sólo funciones seccionalmente lineales nos brinda tal posibilidad.

Al sistema (11) le corresponde la transformación

$$q: \begin{cases} x \longrightarrow f(x) \\ y \longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}y \end{cases} \quad (12)$$

Para la transformación  $x \longrightarrow f(x)$  el intervalo  $[-2, 2]$  es un atractor extraño que atrae a los puntos del intervalo  $(-4, 4)$ . El atractor extraño de la transformación (12), representada por  $q$ , está situado en el cuadrado

$$M = \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\}$$

y su construcción es suficientemente complicada. Este atractor jala a todos los puntos del cuadrado  $M$  y para explicarse qué es lo que representa hay

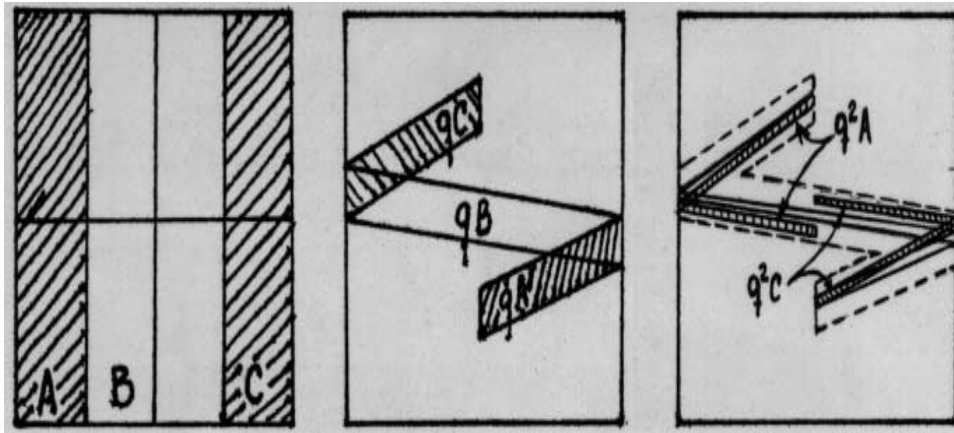


Fig. 9:

que estudiar las imágenes de  $M$  bajo la transformación  $q$ , dada por (12), esto es analizar

$$M, qM, q^2M, \dots$$

La aplicación de la transformación  $q$  nos lleva a la contracción, a lo largo del eje  $y$ , en 10 veces y a la distensión, a lo largo del eje  $x$ , en 2 veces.  
 $M \supset qM \supset q^2M \supset \dots$

*El atractor*

$$\Lambda = \bigcap_{i \geq 0} q^i M$$

resulta ser un *conjunto conexo*, pero localmente inconexo en cada punto (todo subconjunto abierto suficientemente pequeño resulta ser un conjunto inconexo).

El corte de  $\Lambda$  mediante la recta  $x = \alpha$ , para cualquier  $\alpha \in [-2, 2]$  nos genera el conjunto de Cantor (conjunto perfecto y denso en ninguna parte).

Puesto que, para cada  $i \geq 0$ , el área  $q^{i+1}M$  es al menos 5 veces menor que el área  $q^iM$ , entonces la medida (de Lebesgue) de  $\Lambda$  es igual a cero.

*Las ecuaciones diferenciales y en diferencias que poseen atractores extraños son los modelos matemáticos de los procesos y fenómenos que admiten oscilaciones estocásticas.*

La existencia de tales ecuaciones hace que en una serie de casos en principio sea imposible el pronóstico a largo plazo. El “efecto de la mariposa”

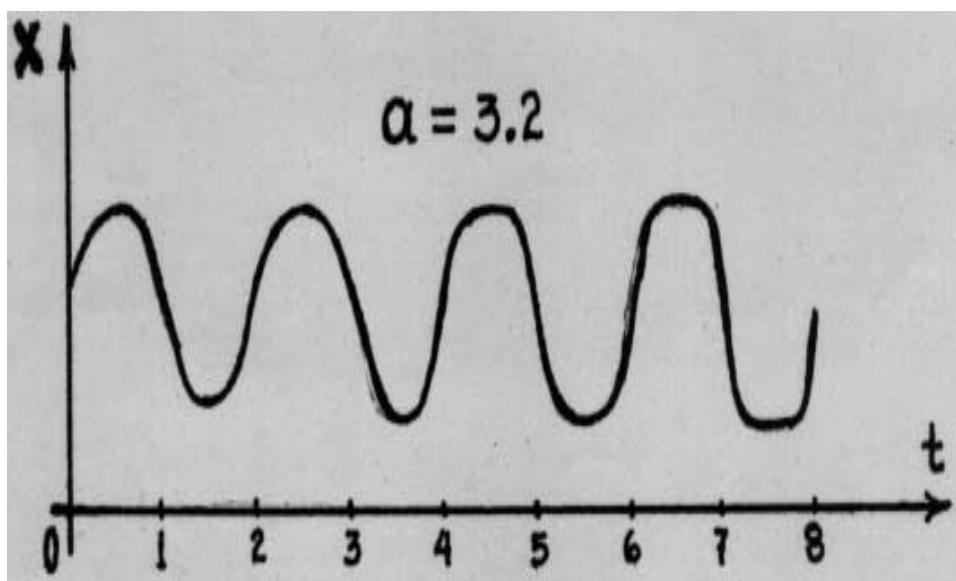


Fig. 10:

así llamó E. Lorenz a tal situación (el más breve parpadeo de una mariposa en cierto paraje africano puede conducir a que dentro de medio año habrá un día soleado en lugar de lluvia, que ocurriría si la tal mariposa no llegara a parpadear sus alas).

Los *atractores extraños* nos dan también la *posibilidad* de *modelar* las *oscilaciones turbulentas*, las cuales son *oscilaciones de los medios continuos*. Una *representación* de cómo *aparecen* y se desarrollan las *oscilaciones turbulentas* podemos obtenerla mediante las *ecuaciones en diferencias* si suponemos que *t* *varía continuamente* y no en forma discreta (tales ecuaciones en diferencias surgen, por ejemplo, en los problemas con valores en la frontera para las ecuaciones en derivadas parciales) (25).

Ya desde la ecuación no lineal más simple (ver ecuación (5)) puede observarse, al variar el parámetro  $a$ , cómo aparecen las oscilaciones “turbulentas” y cómo, al crecer  $a$ , el carácter de estas oscilaciones cambia.

Para  $a > 3$  todas las soluciones  $x(t)$  (continuas y acotadas) de la ecuación (5) resultan oscilatorias (con excepción de dos de ellas  $x(t) \equiv 0$  y  $x(t) \equiv 1 - \frac{1}{a}$  (véase la Fig. 10)).

Para  $a > 1 + \sqrt{6} = 3.449\dots$  cuando la transformación (ver ecuación (7)) admite un ciclo de período 4, existen los puntos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}$  que

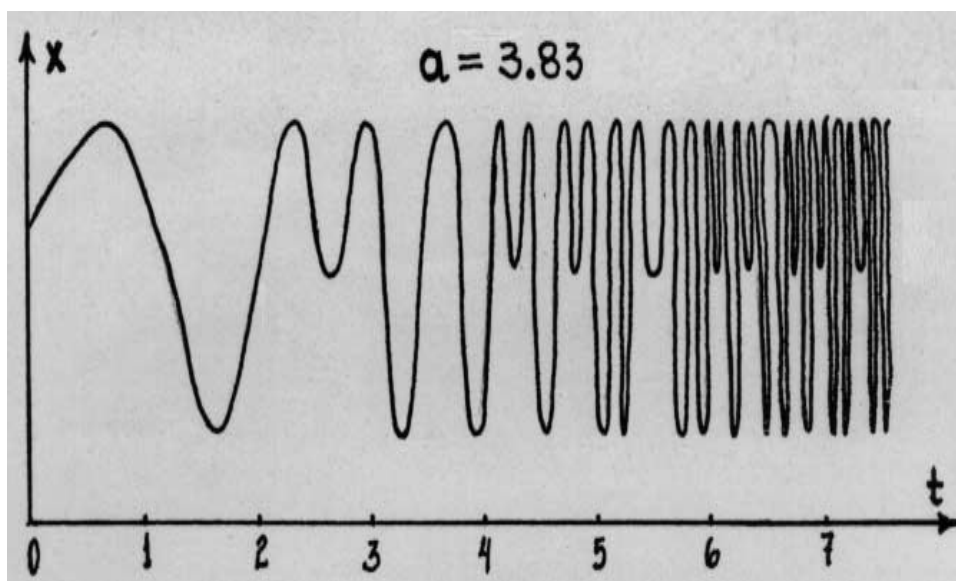


Fig. 11:

forman un ciclo repulsor de la transformación (7) y existe también  $d > 0$  (dependiente de  $a$ ), tales que para cada solución no constante de la ecuación (5) se puede mostrar una función periódica (dependiente de  $x(t)$ ), constante a trozos (de período  $\frac{2m}{K}$ , con  $K$  entero impar) con valores iguales a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}$ .

Respecto de tal función la  $x(t)$  oscila con amplitud  $\geq d$  y frecuencias crecientes sin cota alguna en el intervalo  $[t, t + 1]$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Cuando  $a \rightarrow a^*$ ,  $m \rightarrow \infty$  y  $d \rightarrow 0$ ; para  $a > a^* = 3.678\dots$ ,  $m = 0$  la  $x(t)$  oscila (respecto de  $x = 1 - \frac{1}{a}$ ) tomando valores desde  $\frac{a^2(4-a)}{4}$  hasta  $\frac{a}{4}$  (véase la Fig. 11).

La “turbulencia más desarrollada” tiene lugar en aquellos valores del parámetro  $a$ , donde la ecuación (5) admite un atractor extraño. En este caso junto con  $t$  crece indefinidamente la frecuencia de las oscilaciones (con amplitud  $\geq d$  en el intervalo  $[t, t + h]$  cualquiera que sea  $h > 0$ ), véase la Fig. 12.

En este trabajo sólo hemos tocado algunos aspectos de la teoría de las ecuaciones en diferencias y su relación con algunos problemas de la biología teórica. Sin embargo ya los pocos resultados que fueron aquí presentados permiten sacar la siguiente conclusión: Las ecuaciones en diferencias junto



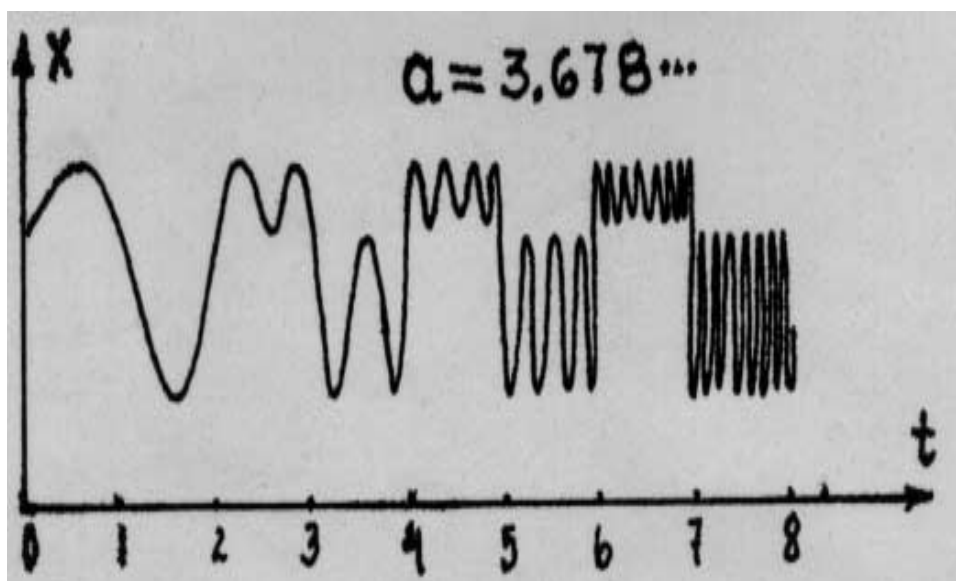


Fig. 12:

con las ecuaciones diferenciales (y con las diferо diferenciales en las que no nos detuvimos) resultan ser un buen instrumento en la investigación no sólo en problemas físicos y técnicos, sino también en los problemas biológicos complejos.

#### REFERENCIAS

1. GUCKENHEIMER J., OSTER G., IPAKTCHI A.; The dynamics of density dependent population models, J. MATH. BIOLOGY, 1977, 4, 101-147.
2. GUCKENHEIMER J.; On the bifurcation of maps of the interval, INVENT. MATH. 1977, 33, 165-178.
3. HOPPENSTEADT F.G., HYMAN J.M.; Periodic solutions of a logistic difference equation, SIAM J. APPL. MATH., 1977, 32, No. 1, 73-81.
4. LEE T.Y., YORKE J.A.; Period three implies chaos, AMER. MATH. MONTHLY, 1975, 82, 985-992.
5. MAY R.M., OSTER G.F., Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models, THE AMER. NATUR., 1976, 110, No. 974, 573-599.
6. MAY R.M., Simple mathematical models with very complicated dynamics, NATURE, 1976, 261, No. 5560, 459-467.
7. MAY R.M., Bifurcations and dynamic complexity in ecological systems, ANN. N.Y. ACAD. SCI., 1979, 316, 517-529.
8. MIRA M.C., Etude d'un modèle de croissance d'une population biologique en l'absence de recouvrement de générations, C.R. ACAD. CS. Parts Serie A, 1976, 282, 1441-1444.
9. MYRBERG P.J., Iteration der reellen polynome zweiten grades II, ANN. ACAD. SCI. FENN., Serie A, 1963, 336, 1-18.
10. YAKOBSON M.V., "Acerca de las propiedades de los sistemas dinámicos generados por la transformación  $x \rightarrow Axe^{-\beta x}$ " En el libro "Modelación de Comunidades Biológicas" Vladivostok, 1975, 141-162 (en ruso).
11. YAKOBSON M.V., "Propiedades topológicas y métricas de los endomorfismos unidimensionales" DOKL. AKAD. NAUK URSS, 1978, 243, No. 4, 866-869.
12. SHARKOVSKII A.N., "Acerca de los conjuntos  $\alpha$  límite de sistemas dinámicos discretos", Autorefer. Disert. Dokt. Fis. Mat. Nauk, Kiev, Inst. Mat. 1967.
13. LEK D., "Tamaños de las poblaciones animales y su regulación en la naturaleza".
14. JULIA G. Memoire sur L'iteration des fonctions rationnelles, J.MATH. PURES APPL 1918, 4, 47-245.
15. SINGER D., Stable orbits and bifurcation of maps of the interval, SIAM J. APPL. MATH. 1978, 35, No. 2, 260-267.
16. SHARKOVSKII A.N., "Coexistencia de ciclos de una transf. cont. de la recta en sí misma", COM. INT. YKR. MATH. ZHUR. 1964, 16, No.

1, 61-71.

17. SHARKOVSKII A.N., "Sobre ciclos y estructura de una transformación continua" YKR. MAT. ZHUR. 1965, 17, No. 3, 104-111 (en ruso).

18. BOWEN R., FRANKS J., The periodic points of maps of the disk and the interval, TOPOLOGY 1976, 15, 337-342.

19. STEFAN P., A theorem of Sharkovskii on the existence of period orbits of continuous endomorphisms of the real line, COMM. MATH. PHYS., 1971, 54, 237-248.

20. RUELLE D., TAKENS F., On the nature of turbulence COMM. MATH. PHYS. 1971, 20, 167-192.

21. LORENZ E., Deterministic non periodic flows, J. ATMOS. SCI., 1963, 20, 130-141.

22. RABINOVICH. M.I., "Autooscilaciones Estocásticas y Turbulencia" USP. FIS. NAUK, 1978, 125, No. 1, 123-168 (en ruso).

23. SMALE S. "Sistemas Dinámicos Diferenciables".

24. SINAI Y.P. "Estocacidad de los Sistemas Dinámicos" En el libro: "Ondas no Lineales" Nauka 1979, 192-212 (en ruso).

25. SHARKOVSKII A.N. "Oscilaciones descritas por ecuaciones autónomas en diferencias y por ecuaciones difero diferenciales" En el libro: Proc. VIII Inter. Conf. on nonlinear Oscil. Praga, 1979, V. II, 1073-1078.