ALGUNOS RESULTADOS SOBRE CONVERGENCIA EN ESPACIOS DE BANACH

Francisco Marcos López García

1996

Contenido

Introducción

En el análisis matemático una parte importante de los espacios estudiados resultan ser espacios de Banach. En las aplicaciones se trata a menudo de extraer subsucesiones convergentes de sucesiones dadas y nuestro trabajo trata de dar condiciones para que esto sea posible.

Para la lectura de este trabajo basta un curso básico de análisis funcional. Es decir, conocer los teoremas de *Hahn-Banach*, el teorema de la función abierta, el teorema de *Banach-Steinhauss* y el teorema de la gráfica cerrada.

El trabajo aquí presentado, está dividido en seis capítulos:

En el primer capítulo trabajamos con compacidad en espacios vectoriales normados.

Empezamos por considerar la estructura isomorfa de los espacios vectoriales normados con la misma dimensión finita (Teorema 1.1.1). Posteriormente, a partir del lema básico de *F. Riesz* (lema 1.2.1), concluiremos que para que cada sucesión acotada en un espacio vectorial normado X tenga una subsucesión convergente es necesario y suficiente que X sea de dimensión finita (Teorema 1.3.1).

Finalmente se dá una breve introducción a los operadores compactos y una mejora del lema de *Riesz.*

Como se aprecia en el estudio de la compacidad en espacios vectoriales normados, la topología inducida por la norma contiene demasiados abiertos para permitir la aplicación de principios de extracción de subsucesiones. Este hecho nos conduce a considerar topologías más débiles en el espacio vectorial normado de tal manera que estas están más relacionadas con la estructura lineal del espacio y con la busqueda de principios de extracción de subsucesiones. Así, en el capítulo 2 se introducen las topologías débil y débil*.

En espacios vectoriales normados de dimensión finita se puede probar que las tres topologías son equivalentes, por lo que en adelante sólo se manejan espacios vectoriales normados de dimensión infinita.

La topología débil se puede definir en todo espacio vectorial normado, el espacio vectorial con esta topología resulta ser un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff (Teorema 2.1.1 y sección 2.2).

Probamos enseguida que el espacio vectorial con la topología débil no es metrizable (Teorema 2.2.3), por lo que la topología débil esta estrictamente contenida en la topología inducida por la norma. El resultado más relevante de esta sección es el siguiente: si $K \subset X$ es un conjunto convexo entonces $\overline{K} = \overline{K^w}$ (Teorema 2.2.2).

La topología débil* sólo se define en espacios duales, aunque esto último es compensado por el hecho de que la bola cerrada unitaria en X^* es w^*-compacta. (Teorema de Banach-Alaoglu 2.3.2). Otro resultado bastante importante es que X es w^*-denso en X^{**}. (Teorema de Goldstine 2.3.1).

En una última sección se dan mas caracterizaciones de los operadores compactos en terminos de la topología débil*.

Es un hecho conocido que en espacios métricos los conceptos de compacidad y compacidad por sucesiones son equivalentes. En el capítulo 3 se aborda el problema de la equivalencia de dichos conceptos en la topologías débil y débil*.

Aunque el espacio vectorial con la topología débil no es metrizable, el teorema de *Eberlein-Šmulian* afirma que dichos conceptos son equivalentes (Teorema 3.1.1).

Respecto a la topología débil* tenemos lo siguiente: si $K \subset \mathrm{X}^*$ es w^*-compacto por sucesiones entonces $\overline{K^{w^*}}$ es w^*-compacto (Teorema 3.2.1). Con un ejemplo se muestra que el inverso no es verdadero en general.

En el caso en que X es separable tenemos que si $K \subset \mathrm{X}^*$ es w^*-compacto entonces K es metrizable respecto a la topología débil* (Teorema 3.2.3).

En el capítulo 4 se define la "integral de Bochner" de una función con rango contenido en un espacio de Banach. Dicha teoría se desarrolla de manera análoga a la integral de Lebesgue. Se introduce el concepto de función μ-medible y se prueba un importante teorema de Pettis que caracteriza este tipo de funciones (Teorema 4.1.1). Otro teorema fundamental es la caracterización de Bochner de las funciones Bochner-integrables (Teorema 4.1.2), la cual reduce en gran medida el trabajo ya que se consideran integrales de Lebesgue.

Con esta herramienta a la mano se prueban dos resultados:

1.- El teorema de *Orlicz-Pettis*: Si $\sum x_n$ es una serie formal tal que todas sus subseries son w-convergentes entonces todas sus subseries son convergentes (en norma). (Teorema 4.2.1)

2.- Un teorema de *Krein-Šmulian*: Si $K \subset X$ es w-compacto entonces $\overline{co}K$ es w-compacto (Teorema 4.3.1).

En el capítulo 5 se introducen las nociones de base de Schauder y de sucesión básica. Se da enseguida una caracterización de las sucesiones básicas, como una aplicación de lo anterior se muestra una base de Schauder para el espacio $L_p[0,1)$ $1 \leq p < \infty$.

Se prueba además que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene al menos una sucesión básica (Corolario 5.0.1).

Con la teoría de este capítulo se da otra prueba del teorema de *Orlicz-Pettis.*

Es un hecho conocido que para que una serie de escalares sea absolutamente convergente es necesario y suficiente que la serie sea incondicionalmente convergente. En el capítulo 6 se trata de ver bajo que condiciones el resultado se da en espacios vectoriales normados. La respuesta la da el teorema de *Dvoretsky-Rogers*: toda serie incondicionalmente convergente en X es absolutamente convergente si sólo si X es finito dimensional (Teorema 6.0.10).

Para probar lo anterior, se desarrolla la teoría de operadores absolutamente p-sumables que es además, de interés independiente.

CAPITULO 1

Compacidad en espacios de Banach

En este capítulo trataremos el concepto de compacidad en espacios vectoriales normados. Empezaremos por considerar la estructura isomórfica de los espacios vectoriales normados de dimensión finita. Es decir, probaremos que todos los espacios vectoriales normados sobre el mismo campo y con la misma dimensión finita son isomorfos. En seguida, probaremos un lema básico de *F. Riesz* y concluiremos a partir de él que a fin de que cada sucesión acotada en el espacio vectorial normado X tenga una subsucesión convergente *(Propiedad de Bolzano-Weierstrass)* es necesario y suficiente que X sea de dimensión finita.

1.1 Espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema 1.1.1 ***Si*** X ***y*** Y ***son espacios vectoriales normados sobre el mismo campo con la misma dimensión finita, entonces son isomorfos.***

Prueba:

Supongamos que $\dim X = n$, basta probar que X es isomorfo a l_2^n,donde $l_2^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \,|a_i \in K\}$ con la siguiente norma:

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}$$

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de Hamel normalizada para X.

Definimos el operador $I : l_2^n \to X$ como sigue:

$$I\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Claramente dicho operador es lineal y de la unicidad de la representación de cada elemento $x \in X$ en terminos de la base, se sigue que el operador es inyectivo. Dado que el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de Hamel se concluye que es suprayectivo.

Asi, I es un isomorfismo lineal de l_2^n sobre X. Además para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in l_2^n$ se cumple

$$\begin{aligned} \|I(a_1, \ldots, a_n)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| \, \|x_i\| \\ &\leq n \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= n \, \|(a_1, \ldots, a_n)\| \end{aligned}$$

Por tanto, I es un operador lineal acotado. Resta probar que I^{-1} es continuo.

Definamos la función $f : S_{l_2^n} \to K$ como sigue:

$$f((a_1, \ldots, a_n)) = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$$

La función anterior es continua, ya que $f = \|\cdot\| \circ I|_{S_{l_2^n}}$. Dado que $S_{l_2^n}$ es un subconjunto compacto de K^n, entonces la función f alcanza su valor mínimo $m \geq 0$. Es decir, existe $(b_1, \ldots, b_n) \in S_{l_2^n}$ tal que

$$m = f((b_1, \ldots, b_n)) \leq f((a_1, \ldots, a_n))$$

para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in S_{l_2^n}$.

Si $m = 0$ entonces $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$ y como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de Hamel para X se sigue que $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Una contradicción,ya que $(b_1, \ldots, b_n) \in S_{l_2^n}$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 < m &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \\ &= \|I(a_1, \ldots, a_n)\| \end{aligned}$$

para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in S_{l_2^n}$.

De donde se sigue que

$$m \, \|(a_1, \ldots, a_n)\| \leq \|I(a_1, \ldots, a_n)\|$$

para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in l_2^n$.

De este modo, $\left\|I^{-1}x\right\| \leq \frac{1}{m}\|x\|$ para todo $x \in X$. Así I^{-1} es continuo. $\square$

Nota: En adelante, un isomorfismo debe entenderse como un isomorfismo homeomórfico.

Corolario 1.1.1 *Los espacios vectoriales normados de dimensión finita son completos.*

Prueba:

Sea X un espacio vectorial normado con $\dim X = n$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de Hamel normalizada para X.

Consideremos a $I : l_2^n \to X$, el isomorfismo del teorema anterior y sea $(y_m) \subset X$ una sucesión de Cauchy, entonces dado que

$$\left\|I^{-1}x - I^{-1}y\right\| \leq \left\|I^{-1}\right\| \|x - y\|$$

para todo $x, y \in X$, se sigue que $\left(I^{-1}y_m\right)$ es una sucesión de Cauchy en l_2^n.

Es un hecho conocido que l_2^n es un espacio de Banach, (K^n con la métrica usual). Por tanto, existe $(b_1, \ldots, b_n) \in l_2^n$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} I^{-1}y_m = (b_1, \ldots, b_n)$.

Dado que I es continuo, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} y_m &= \lim_{m\to\infty} II^{-1}y_m = I(b_1, \ldots, b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = x \in X \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.1.2 *Si Y es un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial normado X, entonces Y es un subespacio cerrado de X.*

Prueba:

El corolario anterior implica que Y es un subespacio completo, pero todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.$\square$

1.2 El lema de F. Riesz.

Lema 1.2.1 *(Riesz F.,1918) Sea Y un subespacio cerrado propio del espacio vectorial normado X y $0 < \theta < 1$, entonces existe $x_\theta \in S_X$ tal que $\|x_\theta - y\| > \theta$ para todo $y \in Y$.*

Prueba:

Sea $x \in X \backslash Y$ y $0 < \theta < 1$ fijo.

Dado que Y es cerrado entonces $d = \inf\{\|x-y\| \,|y \in Y\} > 0$.

Cómo $0 < \theta < 1$ entonces $\frac{1}{\theta} > 1$ y por tanto $\frac{d}{\theta} > d$, de donde se sigue que existe $z \in Y$ tal que $0 < \|x-z\| < \frac{d}{\theta}$.

Sea $x_\theta = \frac{x-z}{\|x-z\|} \in S_X$.

Si $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_\theta - y\| &= \left\| \tfrac{x-z}{\|x-z\|} - y \right\| \\ &= \tfrac{1}{\|x-z\|} \|x - (z + \|x-z\| y)\| \\ &\geq \tfrac{d}{\|x-z\|} > \tfrac{\theta}{d} d = \theta \end{aligned}$$

□

El siguiente ejemplo muestra que el resultado anterior no es válido si $\theta = 1$.

Sean $X = \{x \in C[0,1] \,|x(0) = 0\}, Y = \left\{x \in X| \int_0^1 x(t)\, dt = 0\right\}$.

Claramente X y Y son subespacios vectoriales de $C[0,1]$ y Y es un subespacio propio de X.

Recordamos en este punto que $(C[0,1], \|\cdot\|_{\max})$ es un espacio de Banach.

Afirmamos que $X \subset C[0,1]$ es cerrado. En consecuencia X es un espacio de Banach.

Esto es fácil. Sea $x \in \bar{X}$ entonces existe $(x_n) \subset X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\max} = 0$$

pero la convergencia uniforme implica convergencia puntual entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(0) = x(0) = 0$$

Dado que $(x_n) \subset X$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\max} = 0$ entonces $x \in C[0,1]$. Se sigue que $x \in X$.

Afirmamos también que $Y \subset C[0,1]$ es cerrado.

Sea $y \in \bar{Y}$, entonces existe $(y_n) \subset Y$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\|_{\max} = 0$. Así, $y \in \bar{Y} \subset X$ y además tenemos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 y_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} y_n(t)\, dt = \int_0^1 y(t)\, dt$$

Por tanto, $y \in Y$.

Probaremos que no existe $x \in S_X$ tal que $d(x, Y) \geq 1$.

Supongamos que existe $x_1 \in X\backslash Y$ tal que $\|x_1\| = 1$ y $\|x_1 - y\| \geq 1$ para todo $y \in Y$.

Tomemos $x \in X\backslash Y$ arbitrario. Sea $c = \frac{\int_0^1 x_1(t)dt}{\int_0^1 x(t)dt}$, entonces:

$$\int_0^1 (x_1(t) - cx(t))\, dt = \int_0^1 x_1(t)\, dt - c\int_0^1 x(t)\, dt = 0$$

Así, $x_1 - cx \in Y$ y por tanto, $\|x_1 - (x_1 - cx)\| = \|cx\| = |c|\,\|x\| \geq 1$.
de donde se sigue que,

$$\left|\int_0^1 x(t)\, dt\right| \leq \left|\int_0^1 x_1(t)\, dt\right| \|x\|_{\max} \tag{1.2.1}$$

para todo $x \in X\backslash Y$.

Definimos $(y_n) \subset C[0,1]$ como sigue:

$$y_n(t) = \begin{cases} nt & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Claramente $\quad y_n(0) = 0, \quad y_n \in C[0,1], n = 1, \ldots$ entonces $\quad y_n \in X, n = 1, \ldots$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_n(t)\, dt &= \int_0^{\frac{1}{n}} nt\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 dt \\ &= \frac{nt^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n}} + 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Por tanto, $y_n \in X\backslash Y$, $n = 1, \ldots$ Además, es claro que $\|y_n\|_{\max} = 1$, para todo $n \in N$.

De 1.2.1 se sigue que

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \left|\int_0^1 x_1(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 |x_1(t)|\, dt \leq 1$$

para todo $n \in N$, por tanto $\left|\int_0^1 x_1(t)\, dt\right| = 1$.

Dado que $x_1 \in C[0,1]$ y $x_1(0) = 0$, se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $0 \leq |x_1(t)| < \frac{1}{2}$ si $0 \leq t < \delta$ entonces:

$$\begin{aligned} 1 = \left|\int_0^1 x_1(t)\, dt\right| &\leq \int_0^1 |x_1(t)|\, dt \\ &= \int_0^\delta |x_1(t)|\, dt + \int_\delta^1 |x_1(t)|\, dt \\ &< \frac{1}{2}\delta + \int_\delta^1 dt = 1 - \frac{1}{2}\delta \end{aligned}$$

Lo cual no es posible.

De todo lo anterior se concluye que no existe tal $x \in X$.$\square$

1.3 Compacidad.

Teorema 1.3.1 *(Riesz F.)* ***Sea X un espacio vectorial normado. Cada subconjunto cerrado y acotado de X es compacto*** *(Propiedad de Heine-Borel)* ***si y sólo si X es de dimensión finita.***

Prueba:

Necesidad.

Supongamos que X es de dimensión infinita.

S_X es un conjunto cerrado y acotado, probaremos enseguida que no es compacto.

Afirmamos que existe $(x_n) \subset S_X$ tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ si $m \neq n$. Esto último implica que S_X no es compacto por sucesiones. Lo cual es suficiente ya que en espacios métricos compacidad por sucesiones es equivalente a compacidad, se sigue que S_X no es compacto.

Construiremos la sucesión antes mencionada por inducción.

Sea $x_1 \in S_X$. Por el corolario 1.1.2 $\langle x_1 \rangle$ es un subespacio cerrado propio de X.

Entonces por el lema de Riesz, existe $x_2 \in S_X$ tal que $\|\alpha x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$ para todo $\alpha \in K$. En particular $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$.

Supongamos que se han construido $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ tal que $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ si $1 \leq i < j \leq n$.

Por el corolario 1.1.2 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ es un subespacio cerrado propio de X.

Usando nuevamente el lema de Riesz, hallamos $x_{n+1} \in S_X$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - x_{n+1} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $\alpha_i \in K, i = 1, \ldots, n$.

En particular $\|x_i - x_{n+1}\| \geq \frac{1}{2}, i = 1, \ldots, n$.

Entonces (x_n) es la sucesión deseada.

Suficiencia.

Supongamos que $\dim X = n$. Por el teorema 1.1.1 X es isomorfo a l_2^n, i.e. existe un operador lineal bicontinuo $I : X \to l_2^n$.

Si $K \subset X$ es cerrado y acotado, entonces $I(K) \subset l_2^n$ es cerrado y acotado, por tanto compacto. Así,$K = I^{-1}I(K)$ es compacto.□

Presentamos a continuacion otra prueba de la necesidad.

Supongamos que si $K \subset X$ es cerrado y acotado entonces K es compacto. Se sigue entonces que B_X es compacto. Por tanto, existen $x_1, \ldots, x_n \in B_X$ tal que $B_X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2}B_X\right)$.

Sea $Y = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, por el corolario 1.1.2, Y es cerrado. Es un hecho conocido que X/Y es un espacio de Banach.

Consideremos la función canónica $\varphi : X \to X/Y$. Sabemos que φ es un operador lineal continuo tal que $\|\varphi\| = 1$.

Sea $x \in B_X$, entonces existe $y \in B_X$ tal que $x = x_i + \frac{1}{2}y$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Así, $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(y)$, lo anterior implica que $\varphi(B_X) \subset \frac{1}{2}\varphi(B_X)$.

Tomemos $\varphi(x) \in \varphi(B_X)$ arbitrario, entonces existe $x_1 \in B_X$ tal que $\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x_1)$. Asimismo existe $x_2 \in B_X$ tal que $\varphi(x_1) = \frac{1}{2}\varphi(x_2)$ y así sucesivamente ...

Entonces existe $x_n \in B_X$ tal que $\varphi(x) = \frac{1}{2^n}\varphi(x_n)$, de donde se sigue que

$$\|\varphi(x)\| = \frac{1}{2^n}\|\varphi(x_n)\| \leq \frac{1}{2^n}\|x_n\| = \frac{1}{2^n}$$

dado que $n \in N$ es arbitrario entonces $\varphi(x) = 0$.

De lo anterior se concluye que $\varphi(B_X) = \{0\}$ y por tanto X/Y es de dimensión cero, $Y = X$. □

Corolario 1.3.1 *Si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita, entonces S_X no es compacto. En particular, B_X no es compacto.*

Prueba:

Ver la prueba de la necesidad del teorema anterior. □

Definición 1.3.1 *Sea M un espacio topológico. Un subconjunto K de M se llama relativamente compacto si $\overline{K}$ es un conjunto compacto.*

Lema 1.3.1 *Sea M un espacio métrico. $K \subset M$ es relativamente compacto si y sólo si cada sucesión $(x_n) \subset K$, tiene una subsucesión convergente $\left(x_{n_j}\right)$. (Notese que no afirmamos que el punto límite esté en K).*

Ver [Ba;pag. 70]

Ejemplos :

1) **Compacidad relativa en** $C(K)$.

Sea (K,d) cualquier espacio métrico compacto, denotemos por $C(K) = (C(K), \|\cdot\|_{\max})$ el espacio de Banach de las funciones continuas definidas en K y con valores en K, con la norma uniforme.

Definición 1.3.2 $\mathrm{F} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ *se llama equicontinuo, si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x_1, x_2 \in K$ *y* $d(x_1, x_2) < \delta$ *entonces* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ *para toda función* $f \in \mathrm{F}$.

Teorema 1.3.2 *(Arzela-Ascóli)* ***Sea*** $\mathrm{F} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ ***acotado. Entonces*** F ***es relativamente compacto si y sólo si*** F ***es equicontinuo.***

Prueba:

Necesidad.

Sea $\varepsilon > 0$ dado.

Si F es relativamente compacto entonces existen $f_1, \ldots, f_n \in \bar{\mathrm{F}}$ tal que

$$\mathrm{F} \subset \bar{\mathrm{F}} \subset \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(\mathrm{f_i} + \frac{\varepsilon}{3} \mathrm{B}_{\mathrm{C(K)}} \right)$$

Dado que K es compacto, cada función $f_i, i = 1, \ldots, n$ es uniformemente continua en K.

Así, existen $\delta_i > 0$ $i = 1, \ldots, n$ tal que si $x_1, x_2 \in K$ y $d(x_1, x_2) < \delta_i$ entonces

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Sea $\delta = \min\limits_{1 \le i \le n} \delta_i$.

Tomemos $f \in \mathrm{F}$ arbitrario, entonces $f \in f_i + \frac{\varepsilon}{3} B_{C(K)}$ para algún $i = 1, \ldots, n$, por tanto

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\le |f(x_1) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + |f_i(x_2) - f(x_2)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $x_1, x_2 \in K$ y $d(x_1, x_2) < \delta$.

De lo anterior se sigue que F es equicontinuo.

Suficiencia.

F es equicontinuo.

Recordamos que todo espacio métrico compacto es separable, es decir existe $D \subset K$ numerable tal que $\bar{D} = K$.

Supongamos por un momento lo siguiente:

i) Si $D \subset K$ es un conjunto denso numerable y $(f_n) \subset$ F, entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge puntualmente en D.

ii) Cualquier sucesión equicontinua que converge puntualmente en $S \subset K$, converge uniformemente en $\bar{S}$.

Con lo anterior se sigue fácilmente el resultado. Sea $(f_n) \subset$ F arbitraria. Basta probar que dicha sucesión tiene una subsucesión convergente (en la norma uniforme), de donde se sigue que F $\subset$C (K) es relativamente compacto. (Lema 1.3.1)

Por i) (f_n) tiene una subsucesión $\left(f_{n_j}\right)$ que converge puntualmente en D. Por ii) $\left(f_{n_j}\right)$ converge uniformemente en $\bar{D} = K$.

Solo resta probar i) y ii).

Prueba de i).

Supongamos que $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Dado que F $\subset$C (K) es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|f\|_{\max} \leq M, \text{para toda } \ f \in \text{F}.$$

Así, $|f_i(x_1)| \leq \|f_i\|_{\max} \leq M$, $i = 1, \ldots$. Por el teorema de *Bolzano-Weierstrass,* la sucesión $(f_i(x_1))$ admite una subsucesión $(f_{1i}(x_1))_{i=1}^{\infty}$ convergente.

Nuevamente $|f_{1i}(x_2)| \leq \|f_{1i}\|_{\max} \leq M$, $i = 1, \ldots$. Entonces la sucesión $(f_{1i}(x_2))_{i=1}^{\infty}$ admite una subsucesión $(f_{2i}(x_2))_{i=1}^{\infty}$ convergente.

Continuamos el proceso anterior ...

Afirmamos que (f_{nn}) es la subsucesión de (f_n) que satisface lo requerido. Esto es claro, ya que para cada j, $(f_{nn}(x_j))_n$ es tarde o temprano una subsucesión de la sucesión convergente $(f_{ji}(x_j))_{i=1}^{\infty}$.

Prueba de ii).

Sea (f_n) una sucesión equicontinua que converge puntualmente en $S \subset K$, probaremos que converge uniformemente en $\bar{S}$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_1, x_2) < \delta$ entonces $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon$ para cada $i \in N$.

Dado que K es compacto y $\bar{S} \subset K$ se sigue que $\bar{S}$ es compacto. Por tanto, existen $x_1, \ldots, x_m \in S$ tal que $\bar{S} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_\delta(x_i)$.

Por hipótesis las sucesiones $(f_n(x_i))_{n=1}^{\infty}$ son convergentes para cada

$i = 1, \ldots, m$, entonces existen $N_i \in N$, $i = 1, \ldots, m$ tal que

$$|f_p(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad p \geq n \geq N_i$$

Sea $P = \max\limits_{1 \leq i \leq m} N_i$.

Tomemos $x \in \bar{S}$ arbitrario, entonces $d(x, x_i) < \delta$ para algún $i = 1, \ldots, m$. Así,

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_n(x)| &\leq |f_p(x) - f_p(x_i)| + |f_p(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

si $p \geq n \geq P$. Se sigue que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy para cada $x \in \bar{S}$. Sea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$.

De 1.3.2 se sigue que $\|f - f_n\|_{\max} \leq 3\varepsilon$ si $n \geq P$. $\square$

2) **Compacidad relativa en l_p $(1 \leq p < \infty)$.**

Teorema 1.3.3 ***Para cualquier p fijo,*** $1 \leq p < \infty$, ***sea*** $F \subset l_p$ ***un conjunto acotado. Entonces*** F ***es relativamente compacto si y sólo si*** $\lim\limits_n \sum\limits_{i=n}^{\infty} |x_i|^p = 0$ ***uniformemente para*** $x = (x_i) \in F$.

Prueba:

Necesidad.

Dado que $F \subset l_p$ es relativamente compacto entonces existen $x_1, \ldots, x_m \in l_p$ tal que

$$F \subset \overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{2} B_{l_p} \right)$$

Del hecho de que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_i(j)|^p < \infty, i = 1, \ldots, m$ se sigue que existen $N_i \in N$ tal que

$$\sum_{j=n}^{\infty} |x_i(j)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \quad ,\text{si} \quad n \geq N_i \ i = 1, \ldots, m$$

Sea $P = \max\limits_{1 \leq i \leq m} N_i$.

Tomemos $x = (x_j) \in F$ arbitrario, entonces $\|x - x_i\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún $i = 1, \ldots, m$. Así, escribiendo $x_j = x_j - x_i(j) + x_i(j)$ y usando la desigualdad de Minkowski tenemos,

$$\left(\sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=n}^{\infty} |x_j - x_i(j)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=n}^{\infty} |x_i(j)|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq P.$$

Dado que P no depende de $x \in F$, se sigue el resultado.

Suficiencia.

Por ser $F \subset l_p$ acotado entonces existe $M \geq 0$ tal que $\|x\|_{l_p} \leq M$ para todo $x \in F$.

Sea $(x_n) \subset F$ arbitraria, para probar que F es relativamente compacto tenemos que mostrar que (x_n) admite una subsucesión convergente en l_p.

Escribamos $x_n = (x_n(i))_{i=1}^{\infty}$ entonces $|x_n(1)| \leq \|x_n\|_{l_p} \leq M$, $n = 1, 2, \ldots$ por el teorema de *Bolzano-Weierstrass* existe (x_{n1}) una subsucesión de (x_n) tal que $(x_{n1}(1))_{n=1}^{\infty}$ converge.

Nuevamente $|x_{n1}(2)| \leq \|x_{n1}\| \leq M$ $n = 1, 2, \ldots$,entonces existe (x_{n2}) una subsucesión de (x_{n1}) tal que $(x_{n2}(2))_{n=1}^{\infty}$ converge.

Y continuamos con el proceso...

Consideremos a la sucesión $(x_{nn}) \subset F$. (x_{nn}) es una subsucesión de (x_n) que satisface que $(x_{nn}(i))_{n=1}^{\infty}$ converge para cada i.

Sea $\varepsilon > 0$ dado.Por hipótesis existe $P \in N$ tal que

$$\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq P, \text{ para cada } \ x \in F$$

En particular se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=P+1}^{\infty} |x_{mm}(i) - x_{nn}(i)|^p < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad m \quad \text{y} \quad n.$$

Dado que $(x_{nn}(i))_{n=1}^{\infty}$ converge para $i = 1, \ldots, P$ entonces

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{P} |x_{mm}(i) - x_{nn}(i)|^p = 0$$

Así,existe $P_1 \in N$ tal que

$$\sum_{i=1}^{P} |x_{mm}(i) - x_{nn}(i)|^p < \varepsilon \text{ si } \ m, n \geq P_1$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|x_{mm} - x_{nn}\|_p^p &= \sum_{i=1}^{P} |x_{mm}(i) - x_{nn}(i)|^p + \sum_{i=P+1}^{\infty} |x_{mm}(i) - x_{nn}(i)|^p < 2\varepsilon \\ & \quad \text{si} \quad m, n \geq P_1 \end{aligned}$$

Se sigue entonces que $\lim_{m,n\to\infty} \|x_{mm} - x_{nn}\|_p^p = 0$.

Por tanto, (x_{nn}) es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $l_p, 1 \leq p < \infty$ y es entonces convergente.$\square$

1.4 Operadores compactos entre espacios de Banach.

Sean X y Yespacios de Banach.

Definición 1.4.1 *Un operador lineal $T : X \to Y$ es llamado* ***compacto*** *si TB_X es relativamente compacto, i.e si $\overline{TB_X}$ es compacto.*

A continuación enunciamos dos lemas que serán de gran utilidad.

Lema 1.4.1 *Sea M un espacio métrico completo. $K \subset M$ es totalmente acotado si y sólo si es relativamente compacto.*

Ver [Ba;pag. 70].

Lema 1.4.2 *$K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \subset X$ relativamente compacto tal que $K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon$.*

Prueba:

Necesidad. Basta poner $K_\varepsilon = K$.

Suficiencia.

Dado que X es un espacio métrico completo, basta probar que K es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis existe $K_\varepsilon \subset X$ relativamente compacto tal que $K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon$.

Dado que $\overline{K_\varepsilon}$ es compacto existen $k_1, \ldots, k_n \in \overline{K_\varepsilon}$ tal que

$$\overline{K_\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (k_i + \varepsilon B_X) = \varepsilon B_X + \{k_1, \ldots, k_n\}$$

Por tanto,

$$K \subset \varepsilon B_X + (\varepsilon B_X + \{k_1, \ldots, k_n\}) = 2\varepsilon B_X + \{k_1, \ldots, k_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} (k_i + 2\varepsilon B_X)$$

Lo anterior implica que K es totalmente acotado.$\square$

Teorema 1.4.1 $T : X \to Y$ ***es un operador compacto si y sólo si para cada sucesión acotada*** $(x_n) \subset X, (Tx_n)$ ***tiene una subsucesión convergente.***

Prueba:

Necesidad.

Sea $(x_n) \subset X$ tal que $\|x_n\| \leq M$, $n = 1, \ldots$, entonces $\{\frac{x_n}{M}\} \subset B_X$. Dado que $\{T\left(\frac{x_n}{M}\right)\} \subset TB_X$ y $\overline{TB_X}$ es compacto se sigue que $\left(T\left(\frac{x_n}{M}\right)\right)_n$ tiene una subsucesión convergente. Por ser T lineal, (Tx_n) tiene una subsucesión convergente.

Suficiencia.

Sea $(Tx_n)_n \subset TB_X$ arbitraria, por hipótesis existe una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)$ tal que $\left(Tx_{n_j}\right)$ converge. Del lema 1.3.1 se sigue que TB_X es relativamente compacto.□

Teorema 1.4.2 ***Sea $T : X \to Y$ un operador compacto,entonces T es un operador acotado. Es más, los operadores compactos de X en Y forman un subespacio cerrado del espacio de los operadores lineales acotados y en particular, constituyen un espacio de Banach.***

Prueba:

Dado que T es un operador compacto, entonces $\overline{TB_X}$ es compacto. Por ser Y un espacio métrico entonces $\overline{TB_X}$ es acotado. Así, TB_X es acotado y por tanto T es un operador acotado.

Sean $T, S : X \to Y$ operadores compactos.

Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión acotada y $\lambda, \mu \in K$ arbitrarios.

Por el teorema 1.4.1 (Tx_n) tiene una subsucesión convergente $\left(Tx_{n_j}\right)$.Por el mismo teorema,$\left(Sx_{n_j}\right)$ tiene una subsucesión convergente $\left(Sx_{n_{j_l}}\right)$.

Así, $\left((\lambda T + \mu S)\left(x_{n_{j_l}}\right)\right)$ es una sucesión convergente. Nuevamente, por el teorema 1.4.1, el operador $\lambda T + \mu S$ es compacto.

Probaremos que el subespacio de los operadores compactos de X en Y, es un subconjunto cerrado del espacio de los operadores lineales acotados.

Sea (T_n) una sucesión de operadores compactos,$T_n : X \to Y$ y $T : X \to Y$ un operador acotado tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existe $P \in N$ tal que

$$\|(T_P - T)(x)\| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in B_X$$

Así,$Tx \in T_P x + \varepsilon B_Y$ para todo $x \in B_X$. Por tanto $TB_X \subset T_P B_X + \varepsilon B_Y$. Entonces como $T_P B_X$ es relativamente compacto y usando el lema 1.4.2, se sigue que TB_X es relativamente compacto.

Por definición, T es un operador compacto.$\square$

Consideremos los siguientes resultados:

i) Si $e : X \to Y$ es un encaje compacto isomórfico de X sobre $e(X)$ entonces $\dim X < \infty$.

ii) Si $M \subset X$ es un subespacio cerrado y si $\varphi : X \to X/M$ el operador canónico es compacto, entonces $\dim \varphi(X) < \infty$.

iii) Si $T : X \to Y$ es un operador compacto y $S : Y \to Z$ es un operador acotado, entonces $S \circ T$ es un operador compacto.

iv) Si $T : X \to Y$ es un operador acotado y $S : Y \to Z$ es un operador compacto, entonces $S \circ T$ es un operador compacto.

v) Si X es un espacio vectorial de dimensión infinita, entonces el operador $I : X \to X$ dado por $Ix = x$, no es compacto.

Prueba:

i) Por ser e un encaje de X sobre $e(X)$, entonces $e(B_X) \subset e(X)$ es cerrado. Dado que e es un operador compacto entonces $\overline{e(B_X)} = e(B_X)$ es compacto. Por tanto $e^{-1}(e(B_X)) = B_X$ es compacto en X. Del corolario 1.3.1 se sigue que $\dim X < \infty$.

ii) Por ser M un subespacio cerrado, se sigue que X/M es un espacio de Banach. El operador canónico $\varphi : X \to X/M$, es una función abierta (de hecho $B^{\circ}_{X/M} = \varphi(B^{\circ}_X)$).

Por hipótesis $\overline{\varphi(B_X)}$ es compacto en X/M. Ahora,

$$B^{\circ}_{\varphi(X)} \subset B^{\circ}_{X/M} = \varphi(B^{\circ}_X) \subset \varphi(B_X)$$

entonces $B_{\varphi(X)} \subset \overline{\varphi(B_X)}$, implica que $B_{\varphi(X)}$ es compacto. Del corolario 1.3.1 se sigue que $\dim \varphi(X) < \infty$.

iii) Dado que $\overline{T(B_X)}$ es compacto y $S : Y \to Z$ es continuo, entonces $S\left(\overline{T(B_X)}\right)$ es compacto.

Pero, $\overline{(S \circ T)(B_X)} \subset \overline{\overline{ST(B_X)}} = S\overline{T(B_X)}$, implica que $\overline{(S \circ T)(B_X)}$ es compacto.

iv) Por ser T un operador acotado, existe $M > 0$ tal que $T(B_X) \subset MB_Y$. Por tanto $\overline{ST(B_X)} \subset M\overline{S(B_Y)}$.

Por hipótesis, $\overline{S(B_Y)}$ es compacto, se sigue entonces que $\overline{ST(B_X)}$ es compacto.

v) Por el corolario 1.3.1, $I(B_X) = B_X$ no es compacto.

Ejemplos de Operadores Compactos.

1) Sean $X = c_0$, $Y = l_1$ y definimos el operador $T : X \to Y$ como sigue:

$$T(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_n}{n^2}, \ldots\right)$$

Claramente T es un operador lineal.

Si $x \in X$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|}{i^2} \leq \|x\|_\infty \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \|x\|_\infty$.

Así, $Tx \in l_1$ para todo $x \in X$ y además $\|T\| = \frac{\pi^2}{6}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $P \in N$ tal que $\sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon$ si $n \geq P$, entonces

$$\sum_{i=n}^{\infty} |(Tx)(i)| = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i|}{i^2} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon$$

para todo $x \in B_X$ y para todo $n \geq P$. Por el teorema 1.3.3 que caracteriza la compacidad relativa en l_p, $1 \leq p < \infty$; se sigue que $TB_X \subset l_1$ es un conjunto relativamente compacto. Por tanto, T es un operador compacto.

2) Sea $X = (C[0,1], \|\cdot\|_{\max})$. Para $f : [0,1] \times [0,1] \to R$ continua, definimos el operador $T : X \to X$ como sigue:

$$(Tx)(t) = \int_0^1 f(s,t)\, x(s)\, ds$$

Por la linealidad de la integral se sigue que T es un operador lineal. Además:

$$\|Tx\|_{\max} \leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |f(s,t)\, x(s)|\, ds \leq \|x\|_{\max} \max_{(s,t) \in I \times I} |f(s,t)|$$

lo que implica que T es un operador acotado y de hecho

$$\|T\| \leq \max_{(s,t) \in I \times I} |f(s,t)|$$

Dado que f es continua en el compacto $I \times I$, entonces es uniformemente continua. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\sqrt{(s-s')^2 + (t-t')^2} < \delta$ y $(s,t), (s',t') \in I \times I$ entonces $|f(s,t) - f(s',t')| < \varepsilon$.

En particular, $|t - t'| < \delta$ implica $|f(s,t) - f(s,t')| < \varepsilon$ para todo $s \in [0,1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Tx)(t')| &\leq \textstyle\int_0^1 |f(s,t) - f(s',t')|\, |x(s)|\, ds \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq 1} |f(s,t) - f(s,t')| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in B_X$. Entonces $TB_X \subset X$ es un conjunto acotado y por lo anterior es equicontinuo. Por el teorema de *Arzela-Ascóli* (Teorema 1.3.2) TB_X es relativamente compacto. Por tanto T es un operador compacto.

3) Sea H un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal completo en H.

Definimos un operador $T : H \to H$ como sigue:

Si $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ entonces $Tx = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{i+1} x_{i+1}$.

Como $x \in H$ entonces $(\alpha_i)_i \in l_2$, entonces $\left(\frac{\alpha_i}{i+1}\right)_i \in l_2$. Entonces T es un operador lineal bien definido.

Definimos $T_n : H \to H$ $n = 1, 2\ldots$ por $T_n x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{i+1} x_{i+1}$. Entonces $T_n x \in \langle x_2, \ldots, x_{n+1} \rangle$ para todo $x \in H$. Además

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\alpha_i}{i+1} \right|^2 \leq \|x\|^2 \leq 1 \;\; \text{para todo} \;\; x \in B_H$$

Así, $\overline{T_n B_H}$ es un subconjunto cerrado y acotado del subespacio vectorial de dimensión finita $\langle x_2, \ldots, x_{n+1} \rangle$, entonces $\overline{T_n B_H}$ es compacto. (Teorema 1.3.1).

Se sigue que T_n es un operador compacto para cada $n \in N$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $P \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si $n \geq P$.

Tenemos entonces,

$$\|Tx - T_n x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_i}{i+1} \right)^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2$$

para todo $x \in H, n \geq P$, lo cual implica que $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ si $n \geq P$.

Se concluye que T es un operador compacto (Teorema 1.4.2).

4) Los operadores lineales acotados $T : X \to Y$ tales que $\dim TX < \infty$ se llaman degenerados y son compactos.

Esto es claro ya que $\overline{TB_X}$ es un subconjunto cerrado y acotado del espacio de dimensión finita TX. (Teorema 1.3.1).

1.5 Reflexiones sobre el lema de Riesz.

Durante la prueba del teorema 1.3.1, se construyó una sucesión (x_n) de un espacio de dimensión infinita X, tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$. Lo anterior se logró usando el lema de

Riesz. De hecho se puede construir la sucesión de tal manera que $\|x_n - x_m\| > \theta$,donde $0 < \theta < 1$ es fijo.

El teorema que sigue es una mejora del proceso anterior, donde se puede construir dicha sucesión con $\theta = 1$.

Probaremos antes algunos lemas preparatorios.

Lema 1.5.1 *Si X es un espacio vectorial de dimensión infinita y $f_1, \ldots, f_n : X \to K$ son funcionales lineales, entonces $N = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$ es un subespacio de dimensión infinita.*

Prueba:

Definimos el operador $T : X \to K^n$ de la siguiente manera:

$$Tx = (f_1 x, \ldots, f_n x)$$

Claramente T es un operador lineal y $\ker T = N$. Por un resultado de álgebra lineal tenemos que $\dim TX + \dim \ker T = \dim X$. Dado que $\dim X = \infty$, se sigue que $\dim N = \infty$. □

De lo anterior se sigue que si X es un espacio vectorial de dimensión infinita y $f_1, \ldots, f_n$ son funcionales lineales entonces $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \{0\}$.

Lema 1.5.2 *Sea X un espacio vectorial y $f_1, \ldots, f_n, f : X \to K$ funcionales lineales. Sea $N_i = \ker f_i$ y $N = \ker f$. Entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \subset N$.*

Prueba:

Necesidad. Es claro.

Suficiencia.

Definimos el operador lineal $T : X \to K^n$ por: $Tx = (f_1 x, \ldots, f_n x)$ .Si $Tx = Tx'$ entonces $x - x' \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i \subset N$, por tanto $fx = fx'$.

Definimos $\Gamma : TX \to K$ por: $\Gamma(Tx) = fx$. De lo anterior se sigue que Γ es un funcional lineal bien definido en $TX \subset K^n$. Extendemos Γ a un funcional lineal F en K^n.

Esto implica que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tal que

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

para todo $(u_1, \ldots, u_n) \in K^n$. Así

$$fx = F(Tx) = F(f_1 x, \ldots, f_n x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i x$$

para todo $x \in X$. □

Lema 1.5.3 *Sea X un espacio vectorial y $f_1, \ldots, f_n : X \to K$ funcionales lineales y sean $N_i = \ker f_i$, $C_i = \bigcap_{j \neq i} (N_j \backslash N_i)$, $1 \leq i, j \leq n$ entonces $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes si y sólo si para cada i, $C_i \neq \emptyset$.*

Prueba:

$f_1, \ldots, f_n$ son linealmente dependientes si y sólo si existe i tal que $f_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j f_j$ si y sólo si $\bigcap_{j \neq i} N_j \subset N_i$ (lema anterior) si y sólo si

$$(X \backslash N_i) \bigcap \left(\bigcap_{j \neq i} N_j \right) = C_i = \emptyset \text{ para algún } i$$

□

Lema 1.5.4 *Si $f_1, \ldots, f_n : X \to K$ son funcionales linealmente independientes entonces existe $y \in X$ tal que $f_i y < 0$, $i = 1, \ldots, n$*

Prueba:

Por el resultado anterior $C_i = (X \backslash N_i) \bigcap \left(\bigcap_{j \neq i} N_j \right) \neq \emptyset$ para cada i.

Por tanto existe $x_i \in C_i$ tal que $f_j x_i = 0$, si $j \neq i$ y $f_j x_j \neq 0$, si $i = j$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f_j x_j < 0$.

Sea $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Así, $f_j y = \sum_{i=1}^{n} f_j x_i = f_j x_j < 0$ $j = 1, \ldots, n$. □

A continuación enunciamos y probamos el teorema ofrecido.

Teorema 1.5.1 *(Kottman, 1975)* ***Si*** X ***es un espacio vectorial de dimensión infinita, entonces existe*** $(x_n) \subset S_X$ ***tal que*** $\|x_n - x_m\| > 1$ ***si*** $m \neq n$.

Prueba:

Construiremos tal sucesión por inducción.

Escojamos $x_1 \in S_X$.Por el teorema de *Hahn-Banach*,existe $x_1^* \in X^*$ tal que $x_1^* x_1 = \|x_1\| = 1$, además $\|x_1^*\| = \|x_1\| = 1$.

Supongamos que $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$ y $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ han sido escogidos de tal manera que: $x_1^*, \ldots, x_n^*$ son linealmente independientes, $\|x_n - x_i\| > 1$ $i = 1, \ldots, n-1$ y $x_i^* x_i = \|x_i\| = \|x_i^*\|$.

Por el lema anterior existe $y \in X$ tal que $x_i^* y < 0$ $i = 1, \ldots, n$ y por el lema 1.5.1 existe un vector no nulo $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker x_i^*$.

Afirmamos que existe $k_0 \in R$ tal que $\|y\| < \|y + k_0 x\|$. En caso contrario, tendriamos que $\|y\| \geq \|y + kx\| \geq |\|y\| - \|kx\||$ para todo $k \in R$, entonces $\left|1 - |k| \frac{\|x\|}{\|y\|}\right| \leq 1$ para todo $k \in R$ lo que es una contradicción.

Entonces para cualquier combinación lineal no trivial $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* \left(y + k_0 x\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* y\right| \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*\right\| \|y\| \\ &< \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*\right\| \|y + k_0 x\| \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Sea $x_{n+1} = \frac{y + k_0 x}{\|y + k_0 x\|}$ y sea $x_{n+1}^* \in X^*$ que satisface

$$\|x_{n+1}^*\| = x_{n+1}^* \left(x_{n+1}\right) = 1$$

De 1.5.3 se sigue que $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* \left(x_{n+1}\right)\right| < \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*\right\|$.

Si x_{n+1}^* fuera combinación lineal de $x_1^*, \ldots, x_n^*$, i.e $x_{n+1}^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*$ entonces

$$1 = |x_{n+1}^* x_{n+1}| < \|x_{n+1}^*\| = 1$$

una contradicción. Por tanto $x_1^*, \ldots, x_{n+1}^*$ son linealmente independientes.

Por otro lado,

$$|x_i^* x_{n+1} - x_i^* x_i| \leq \|x_i^*\| \, \|x_{n+1} - x_i\| = \|x_{n+1} - x_i\| \;\; i = 1, \ldots, n$$

Pero $x_i^* x_i = 1$ y $x_i^* x_{n+1} = \frac{1}{\|y + k_0 x\|} x_i^* y < 0$ $i = 1, \ldots, n$ implica

$$1 < |x_i^* x_{n+1} - 1| \leq \|x_{n+1} - x_i\| \;\; i = 1, \ldots, n$$

□

CAPITULO 2

Las topologías débil y débil*.

En el capítulo anterior se mostró que la topología inducida por la norma contiene demasiados abiertos para poder aplicar principios de extracción de subsucesiones. Observamos que para que cada sucesión acotada en X tenga una subsucesión convergente es necesario y suficiente que X sea de dimensión finita.

Lo anterior nos conduce a considerar otras topologías en X que están más relacionadas con la estructura lineal de los espacios y buscar principios de extracción de subsucesiones en esas nuevas topologías.

Las dos topologías de mayor importancia en la teoría de espacios de Banach, son la topología débil y la topología débil*, recibiendo dichos nombres por ser topologías mas débiles que la inducida por la norma.

La topología débil se puede definir en cualquier espacio vectorial normado, en cambio, la topología débil* sólo se define en los espacios duales, aunque esto último tiene como compensación que la bola unitaria en el espacio dual resulta ser débil*-compacta. (Aunque esta compacidad no nos asegura principios de extracción de subsucesiones como se verá en un ejemplo más adelante).

2.1 Espacios vectoriales topológicos.

Definición 2.1.1 *Supongamos que τ es una topología en un espacio vectorial X tal que*

a) Todo punto de X es cerrado

b) Las operaciones del espacio vectorial son continuas respecto a τ

entonces a τ se le llama una **topología vectorial** en X y (X, τ) se llama un **espacio vectorial topológico**.

Sea X un conjunto y F una familia no vacía de funciones $f : X \to Y_f$, donde cada Y_f es un espacio topológico.

Consideremos a τ igual a la colección de todas las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos $f^{-1}(V)$ con $f \in F$ y V abierto en Y_f. Por un resultado bien conocido, τ resulta ser una topología en X y es de hecho la "topología más pequeña" que hace continua a toda $f \in F$. Así, τ es llamada la **topología débil** en X inducida por F, más explícitamente la F-topología de X.

Lema 2.1.1 *Si F es una familia que separa puntos en X y además cada Y_f es un espacio de Hausdorff, entonces la F-topología de X es una topología de Hausdorff.*

Prueba:

Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$,entonces existe $f \in F$ tal que $f(p) \neq f(q)$;los puntos $f(p)$ y $f(q)$ tienen vecindades ajenas en Y_f cuyas imagenes inversas bajo f son ajenas y abiertos (por definición).□

Teorema 2.1.1 ***Sea X un espacio vectorial y X' un espacio vectorial de funciones lineales en X que separa puntos de X. Entonces con la X'-topología (τ'), (X, τ') es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo cuyo espacio dual es X'.***

Prueba:

Dado que K es un espacio de Hausdorff entonces el lema anterior implica que τ' es una topología de Hausdorff, en particular, los puntos son cerrados.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \in X'$ entonces

$$\begin{aligned} W(0; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n, \varepsilon) &= \{x \in X \mid |\Lambda_i x| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i^{-1}(B_\varepsilon(0)) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

es claramente un conjunto convexo, balanceado y por definición pertenece a τ'. De hecho, la colección de todos los conjuntos de la forma 2.1.1 constituye una base local para τ'. Así, τ' es una topología localmente convexa en X.

Consideremos ahora una vecindad básica de un $x_0 \in X$ arbitrario, entonces de la linealidad de Λ_i, $i = 1, \ldots, n$ se sigue que:

$$\begin{aligned} W\left(x_0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right) &= \{x\in X|\ |\Lambda_i x-\Lambda_i x_0|<\varepsilon,\ i=1,\ldots,n\} \\ &= x_0+W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right) \end{aligned}$$

Se sigue que τ' es invariante bajo traslaciones y por tanto, está totalmente descrita por la base local en 0 dada por 2.1.1.

Si 2.1.1 se da, entonces

$$\frac{1}{2}W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)+\frac{1}{2}W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)=W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)$$

Esto último implica que la adición es continua.

Sea $x\in X$ y α un escalar, entonces $x\in sW\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)$ para algún $s>0$.Si $|\beta-\alpha|<r$ y $y-x\in rW$ escribimos $\beta y-\alpha x=(\beta-\alpha)\,y+\alpha\,(y-x)$.

Dado que $y-x\in rW$, entonces $y=x+x_0$ donde $x_0\in rW$, así

$$\begin{aligned} |\Lambda_i\left(\beta y-\alpha x\right)| &\leq |\beta-\alpha|\,|\Lambda_i y|+|\alpha|\,|\Lambda_i\left(y-x\right)| \\ &\leq r\left(|\Lambda_i x|+|\Lambda_i x_0|\right)+|\alpha|\,r\varepsilon \\ &< \left(r\left(s+r\right)+r\,|\alpha|\right)\varepsilon\ i=1,\ldots,n \end{aligned}$$

Entonces $\beta y-\alpha x\in W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)$, si r es tan pequeño que

$$r\left(s+r\right)+r\,|\alpha|<1$$

Por tanto, la multiplicación es continua.

Hemos probado que (X,τ') es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Por la definición de la topología τ', cada $\Lambda\in X'$ es $\tau'-$continuo. Inversamente supongamos que Λ es un funcional lineal $\tau'-$continuo en X. Entonces $|\Lambda x|<1$ para todo x en algún conjunto de la forma $W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)$.

Es claro que $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\ker\Lambda_i\subset W\left(0;\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\varepsilon\right)$. Entonces afirmamos que $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\ker\Lambda_i\subset\ker\Lambda$.

Sea $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\ker\Lambda_i$, entonces $\lambda x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\ker\Lambda_i$ para todo escalar λ. Así, $|\Lambda\left(\lambda x\right)|\leq|\lambda|\,|\Lambda x|<1$ para todo escalar λ. Se sigue que $\Lambda x=0$, i.e $x\in\ker\Lambda$.

Por el lema 1.5.2, se sigue que $\Lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\Lambda_i$. Dado que $\Lambda_i\in X'$ y X' es un espacio vectorial, $\Lambda\in X'$. □

Definición 2.1.2 *Un conjunto D está* ***dirigido,*** *si hay una relación $\preceq$ en D que satisface*

a) $d \preceq d$

b) si $d_1 \preceq d_2$ y $d_2 \preceq d_3$ entonces $d_1 \preceq d_3$

c) si $d_1, d_2 \in D$ entonces existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 \preceq d_3$ y $d_2 \preceq d_3$

Definición 2.1.3 *Una **red** en un conjunto X es una función $x : D \to X$ donde D es un conjunto dirigido. El punto $x(d)$ usualmente es denotado por x_d y por lo general hablaremos de "la red (x_d)".*

Definición 2.1.4 *Sea (x_d) una red en el espacio vectorial topológico (X, τ'), entonces (x_d) converge débilmente a $x \in X$ (escrito $w - \lim\limits_{d\in D} x_d = x$), si dada cualquier vecindad débil W de x, existe $d_0 = d_0(W) \in D$ tal que $d \succeq d_0$ implica $x_d \in W$.*

Teorema 2.1.2 ***Sea** (X, τ') el **espacio vectorial topológico del teorema anterior y** $(x_d) \subset X$ **una red. Entonces** $w - \lim\limits_{d\in D} x_d = x$ **si y sólo si** $\lim\limits_{d\in D} \Lambda x_d = \Lambda x$ **para cada** $\Lambda \in X'$.

Prueba:

Necesidad.

Sean $\Lambda \in X'$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Entonces $x + W(0; \Lambda, \varepsilon)$ es una vecindad débil de x entonces, por hipótesis existe $d_0 \in D$ tal que $d \succeq d_0$ implica $x_d \in x + W(0; \Lambda, \varepsilon)$, i.e $|\Lambda x_d - \Lambda x| < \varepsilon$ si $d \succeq d_0$.

Suficiencia.

Sea $x + W(0; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n, \varepsilon)$ una vecindad débil de x. Por hipótesis existen $d_i \in D$ $i = 1, \ldots, n$ tal que si $d \succeq d_i$ entonces $|\Lambda_i x_d - \Lambda_i x| < \varepsilon$. Por la definición de conjunto dirigido existe $d' \in D$ tal que $d' \succeq d_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Así, si $d \succeq d'$ entonces $x_d \in x + W(0; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n, \varepsilon)$. $\square$

2.2 La topología débil de un espacio vectorial.

Sea X un espacio vectorial normado. Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Por el teorema de *Hahn-Banach* existe $x^* \in X^*$ tal que $x^* x \neq x^* y$; lo cual implica que X^* separa puntos de X.

La X^*-topología de X es llamada la **topología débil** de X. Por el teorema 2.1.1 con dicha topología X es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo y lo denotaremos por (X, w). Además $(X, w)^* = X^*$.

Dado que cada $x^* \in X^*$ es $\|\cdot\|$ $-$continuo y la topología débil es la menor topología con dicha propiedad entonces la topología débil está contenida en la topología inducida por la norma.

CONVENCION: En adelante, para expresar una propiedad topológica respecto a la topología débil anteponemos una letra w. Así, diremos que un conjunto es w-compacto, w-cerrado etc.

Una pregunta natural es ¿qué diferencias existen al considerar a X con la topología débil y con la topología fuerte (la inducida por la norma)?

En el caso que X es de dimensión finita se tiene que la topología débil y fuerte coinciden.

Supongamos entonces que X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita.

Consideremos una vecindad débil de 0, $W = W(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon)$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* \subset W$.

Por el lema 1.5.1 $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$ es un subespacio de dimensión infinita. Se sigue entonces que toda vecindad débil de 0 contiene un subespacio de dimensión infinita.

De la desigualdad $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, se sigue que la norma es una función continua en X; sin embargo, es no w-continua en cada punto de X:

El hecho que $W(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon)$ contiene un subespacio de dimensión infinita implica que toda w-vecindad de 0 contiene vectores de norma arbitrariamente grande. Por tanto, $\|\cdot\|$ es no w-continua en 0 y por linealidad no lo es en ningun punto.

Se han mostrado algunas diferencias y a continuación veremos afinidades.

Primero enunciaremos un teorema importante para nuestros propósitos:

Teorema 2.2.1 *(Básico de separación)* ***Supongamos que A y B son conjuntos convexos, ajenos, no vacíos en un espacio vectorial topológico localmente convexo X.***

a) **Si A es abierto existen x^* lineal, real, continuo y $\gamma \in R$ tal que**

$$x^*x < \gamma \leq x^*y$$

para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$.

b) **Si A es compacto y B es cerrado entonces existen x^* lineal, real, continuo, $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ tal que**

$$x^*x < \gamma_1 < \gamma_2 < x^*y$$

para todo $x \in A$ **y para todo** $y \in B$.

Ver [Ru2;pag. 59].

Teorema 2.2.2 *(Mazur, 1933)* ***Sea*** X ***un espacio vectorial normado. Si*** $K \subset X$ ***es convexo entonces*** $\overline{K} = \overline{K^w}$.

Prueba:

Recordamos que la cerradura de un conjunto es la intersección de todos los conjuntos cerrados que lo contienen.

Dado que la topología débil está contenida en la fuerte y usando el hecho anterior se sigue que $\overline{A} \subset \overline{A^w}$ para todo $A \subset X$.

Como $K \subset X$ es convexo, entonces $\overline{K}$ es convexo.

Ahora si $\overline{K}$ esta contenido propiamente en $\overline{K^{\mathbf{w}}}$, tomamos $x_0 \in \overline{K^{\mathbf{w}}} \backslash \overline{K}$.

Por el teorema anterior existen $x^* \in X^*$ y α, $\beta \in R$ tal que

$$x^* x_0 < \alpha < \beta \leq x^* k \text{ para todo } k \in \overline{K}$$

Por tanto,

$$x^* x_0 \leq \alpha < \beta \leq \inf \left\{ x^* k | \; k \in \overline{K} \right\} \tag{2.2.2}$$

Sin embargo, dado que $x_0 \in \overline{K^{\mathbf{w}}}$ existe una red $(x_d) \subset K$ tal que $x_0 = w\text{-}\lim\limits_{d \in D} x_d$. Por el teorema 2.1.2 lo anterior implica que $x^* x_0 = \lim\limits_{d \in D} x^* x_d$, lo cual contradice 2.2.2.□

Corolario 2.2.1 *Si* $(x_n) \subset X$ *es una sucesión tal que* $w\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, *entonces existe una sucesion* (σ_n) *de combinaciones convexas de los* x_n *tal que* $\lim\limits_n \|\sigma_n\| = 0$.

Prueba:

Tenemos $\{x_n\} \subset \overline{co}\,(x_1, \ldots) = \overline{co^w}\,(x_1, \ldots)$. El hecho de que $w\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ implica que $0 \in \overline{co^w}\,(x_1, \ldots)$. Así, existe $(\sigma_n) \subset co\,(x_1, \ldots)$ tal que $\lim\limits_n \|\sigma_n\| = 0$. □

Corolario 2.2.2 *Si* Y *es un subespacio de* X, *entonces* $\overline{Y^w} = \overline{Y}$.

Ahora el teorema anterior nos ayudará a probar un resultado curioso y sorpresivo, a saber: si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita, entonces $B_X = \overline{S_X^w}$ y que constituye otra diferencia más entre la topología fuerte y la débil.

La prueba es como sigue:

Dado que B_X es convexo, tenemos que $B_X = \overline{B_X^w}$. Así, $S_X \subset B_X$ implica que $\overline{S_X^w} \subset B_X$.

Sea $x_0 \in B_X$ con $\|x_0\| < 1$. Mostraremos que $x_0 \in \overline{S_X^w}$.

Sea $W = x_0 + W(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon)$ una w-vecindad de x_0 arbitraria. Sea $N = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker x_i^*$, entonces $x_0 + N \subset W$.

Ya que $\dim N = \infty$, podemos escoger $x \in N$ no nulo.

Definimos la siguiente función $f : R \to R$ dada por

$$f(\lambda) = \|x_0 + \lambda x\| - 1$$

Dicha función es continua y satisface $f(0) = \|x_0\| - 1 < 0$.

Afirmamos la existencia de $\lambda_1 \in R$ tal que $f(\lambda_1) > 0$, en caso contrario tendriamos que $\|x_0 + \lambda x\| \leq 1 \quad$ para $\quad$ todo $\lambda \in R$, $\quad$ lo cual implica que $-\|x_0\| + |\lambda| \|x\| \leq 1$ para todo $\lambda \in R$, lo que es absurdo.

Por el teorema del valor intermedio existe $\lambda' \in R$ tal que

$$f(\lambda') = \|x_0 + \lambda' x\| - 1 = 0$$

Del hecho de que $x_0 + \lambda' x \in x_0 + N \subset W$ y $\|x_0 + \lambda' x\| = 1$ se sigue que $S_X \bigcap W \neq \emptyset$.

Hemos probado entonces que $B_X^\circ \subset \overline{S_X^w}$. Pero $S_X \subset \overline{S_X^w}$ implica que

$$B_X \subset \overline{S_X^w}$$

□

Teorema 2.2.3 ***Si la topología débil de un espacio vectorial normado X es metrizable entonces X es de dimensión finita.***

Prueba:

Supongamos que (X, w) es metrizable. Sabemos que topologías metri-zables satisfacen el primer axioma de numerabilidad.

Sea entonces $B = \{W_1, W_2 \ldots\}$ una base local débil en 0.

Recordamos que los conjuntos W_i tienen la siguiente forma:

$$W_i = W\left(0; x^*_{n(i-1)+1}, \ldots, x^*_{n(i)}, \varepsilon_i\right), \text{ donde } n(0) = 0$$

Enseguida construimos una nueva base local débil de 0, $B_1 = \{V_1, V_2 \ldots\}$ de la siguiente manera:

Ponemos

$$\begin{aligned} V_1 &= W\left(0; \underbrace{x^*_1, \ldots, x^*_{n(1)}, x^*_{n(1)+1}, \ldots, x^*_{n(2)}}_{A_2}, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\right) \\ &\subset W_1 \bigcap W_2 \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon'_2 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ entonces

$$V_2 = W\left(0; A_2, x^*_{n(2)+1}, \ldots, x^*_{n(3)}, \varepsilon'_2\right) \subset W_1 \bigcap W_2 \bigcap W_3$$

Y así sucesivamente construimos V_i, $i \geq 3$.

Por la forma en que se construyen los V_i se sigue que B_1 es una base local débil de 0.

Entonces existe una sucesión $(x^*_n) \subset X^*$ tal que dada cualquier w-vecindad U de 0, existe $\varepsilon > 0$ y $n(U) \in N$ tal que $W\left(0; x^*_1, \ldots, x^*_{n(U)}, \varepsilon\right) \subset U$.

Sea $x^* \in X^*$ arbitrario y consideremos la $w-$vecindad $W(0; x^*, 1)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y $n \in N$ tal que

$$W(0; x^*_1, \ldots, x^*_n, \varepsilon) \subset W(0; x^*, 1) = \{x \in X | \, |x^* x| < 1\}$$

lo cual implica que, como ya habiamos visto antes, que existen escalares α_i tal que

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^*_i \tag{2.2.3}$$

Sea $F_m = \langle x^*_1, \ldots, x^*_m \rangle$, entonces cada $F_m \subset X^*$ es un subespacio de dimensión finita y por tanto cerrado.

De 2.2.3 se sigue que $X^* = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. Por el teorema de categoría de Baire existe $m \in N$ tal que $F^\circ_m \neq \emptyset$, lo cual implica que $F_m = X^*$, i.e. X^* es de dimensión finita y por tanto X lo es. $\square$

Corolario 2.2.3 *Si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita, entonces (X, w) no es metrizable.*

Definición 2.2.1 *Si X es un espacio vectorial normado, entonces existe un encaje (canónico) $i : X \to X^{**}$ dado por $i_x x^* = x^* x$. De hecho la función $i : X \to X^{**}$ es una isometría lineal.*

Definición 2.2.2 *Sea $K \subset X$. Decimos que K es w-acotado si existen constantes $M(x^*)$ tal que $\sup_{x \in K} |x^* x| \leq M(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$.*

Lema 2.2.1 *Si $K \subset X$ es w-acotado, entonces K es acotado.*

Prueba:

Por hipótesis existe $M(x^*)$ tal que:

$$\sup_{x \in K} |i_x x^*| = \sup_{x \in K} |x^* x| \leq M(x^*) \quad \text{para todo } x^* \in X^*$$

Por el teorema de *Banach-Steinhauss* existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x \in K} \|i_x\| = \sup_{x \in K} \|x\| \leq M$$

□

Lema 2.2.2 *Sea Ω un espacio topológico y $f : \Omega \to X$ una función, entonces f es τ-w continua si y sólo si $x^* \circ f : \Omega \to K$ es continua para todo $x^* \in X^*$.*

Prueba:

Necesidad.

Cada $x^* \in X^*$ es w-continua,entonces $x^* \circ f : \Omega \to K$ es continua.

Suficiencia.

Sea $W = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1} (U_i)$ un w-abierto básico arbitrario, $U_i \subset K$ abiertos.

Entonces $f^{-1}(W) = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^* \circ f)^{-1} (U_i)$. Pero por hipótesis $x^* \circ f$ es continua para cada $x^* \in X^*$, se sigue que $f^{-1}(W)$ es abierto en Ω. □

Lema 2.2.3 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es w-w continuo si y sólo si $y^* \circ T : X \to K$ es w-continuo para todo $y^* \in Y^*$ si y sólo si $y^* \circ T : X \to K$ es $\|\cdot\|$-continuo para todo $y^* \in Y^*$.*

Prueba:

La primera equivalencia se sigue del lema anterior con $f = T$, $\Omega = (X, w)$, $(X, w) = (Y, w)$.

Probaremos la segunda parte.

Necesidad.

Se sigue del hecho de que la topología débil está contenida en la topología fuerte.

Suficiencia.

Por hipótesis $y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in Y^*$, entonces $y^* \circ T$ es w-continuo.$\square$

Teorema 2.2.4 ***Sean*** X, Y ***espacios vectoriales normados y*** $T : X \to Y$ ***un operador lineal. Entonces*** T ***es*** $\|\cdot\|$-$\|\cdot\|$ ***continuo si y sólo si es*** w-w ***continuo.***

Prueba:

Necesidad.

Usando la hipótesis tenemos que $y^* \circ T$ es $\|\cdot\|$-continuo para todo $y^* \in Y^*$. Por el lema anterior se sigue que T es w-w continuo.

Suficiencia.

Si T no es $\|\cdot\|$-$\|\cdot\|$ continuo entonces TB_X no es un conjunto acotado de Y. Recordamos que un conjunto $A \subset X$ es acotado si y sólo si es w-acotado. Así, existe $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(TB_X)$ no es acotado, por tanto $y^* \circ T \notin X^*$. El lema anterior implica que T no es w-w continuo. $\square$

Teorema 2.2.5 ***Sea*** X ***un espacio vectorial normado. Si*** $K \subset X$ ***es*** w***-compacto entonces*** K ***es cerrado y acotado.***

Prueba:

Si $x^* \in X^*$, entonces x^* es w-continuo y por tanto $x^*K \subset K$ es compacto. Se sigue entonces que x^*K es acotado para cada $x^* \in X^*$, i.e. es w-acotado y por tanto acotado.

Como K es w-compacto y (X, w) es Hausdorff entonces K es w-cerrado, i.e $\overline{K^w} = K$.

Se probó antes que $\overline{A} \subset \overline{A^w}$ para todo $A \subset X$. Entonces $\overline{K} \subset \overline{K^w} = K$.$\square$

A diferencia de lo que sucede en los espacios de dimensión finita, los conjuntos cerrados y acotados no son necesariamente w-compactos y daremos un ejemplo:

B_{c_0} no es w-compacto.

Si B_{c_0} fuera w-compacto, cada sucesión con rango infinito en B_{c_0} tendría un w-punto de acumulación en B_{c_0}.

Consideremos la sucesión (σ_n) donde $\sigma_n = e_1 + \cdots + e_n$, por tanto

$$\|\sigma_n\|_\infty = 1 \text{ para todo } n.$$

Sea $\lambda \in B_{c_0}$ un w-punto de acumulación de $\{\sigma_n\}$.

Sean $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Entonces una infinidad de elementos de la sucesión estan contenidos en la vecindad débil $W(\lambda; x^*, \varepsilon)$.

Definimos los funcionales lineales $e_k^* : c_0 \to K$ $k \in N$, dados por

$$e_k^*(x_1, x_2, \ldots) = x_k$$

Claramente $e_k^* \in c_0^*$, para cada k. Además $e_k^*(\sigma_n) = 1$ si $n \geq k$.

Por otro lado,

$$W(\lambda; e_k^*, \varepsilon) = \{x \in c_0 |\, |e_k^* x - e_k^* \lambda| < \varepsilon\} = \{x \in c_0 |\, |x_k - \lambda_k| < \varepsilon\}$$

contiene una infinidad de elementos de la sucesión (σ_n) y dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $\lambda_k = 1$ para todo k, i.e $\lambda = (1, 1, \ldots)$; lo que es una contradicción a $\lambda \in c_0$.

Lema 2.2.4 *Sea $(x_n) \subset X$. Si (x_n) es w-convergente entonces existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$.*

Prueba:

Sea $x \in X$ tal que $x = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$, es decir $x^*x = \lim_{n\to\infty} x^*x_n$, para cada $x^* \in X^*$. Entonces el conjunto $\{x_n\}$ es w-acotado y por tanto acotado.□

A continuación presentamos un ejemplo que tendrá una interesante consecuencia.

Sea $X = (C[0,1], \|\cdot\|_{\max})$,entonces $X^* = (NBV[0,1], \|\cdot\|_{NBV})$.

Donde

$$NBV[0,1] = \{x^* \in BV[0,1] \,|x^*(0) = 0 \text{ y } x^* \text{ es continua por la derecha}\}$$

y además:

$$\langle x, x^* \rangle = \int_0^1 x(t)\, dx^*(t) \text{ si } x \in C[0,1] \text{ y } x^* \in NBV[0,1]$$

Ver [Ba;pag. 226]

Teorema 2.2.6 ***Sea*** $(x_n) \subset X$,***entonces*** $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ***si y sólo si existe*** $M > 0$ ***tal que*** $\|x_n\| \leq M$ ***para todo*** n, ***y*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ ***para todo*** $t \in [0,1]$.

Prueba:

Necesidad.

Supongamos que $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, por el lema anterior existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo n.

Sea $t_0 \in [0,1]$ arbitrario.

Definimos $x^* : [0,1] \to R$ de la siguiente manera:

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 \\ 1 & t_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Claramente $x^* \in NBV[0,1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^* \rangle &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 x_n(t)\, dx^*(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n(t_0) \left(x^*\left(t_0^+\right) - x^*\left(t_0^-\right) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n(t_0) \end{aligned}$$

Suficiencia.

Sea $x^* \in NBV[0,1]$ arbitrario. Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo n.

Por el teorema de la convergencia acotada, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^* \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, dx^*(t) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} x_n(t)\, dx^*(t) = 0$$

Dado que $x^* \in X^*$ fue arbitrario, se sigue que $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

Comentario:

Sean $(x_n) \subset X$ y $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo n y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$,entonces por el teorema anterior $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Por el corolario 2.2.1 existe (σ_n) una sucesión de combinaciones convexas de las funciones x_n tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\sigma_n\| = 0$. Es decir, la sucesión (σ_n) converge uniformemente a 0.

2.3 La topología débil* de un espacio dual.

Sea X un espacio vectorial normado, recordamos que existe un encaje (canónico) $i : X \to X^{**}$ dado por $i_x x^* = x^* x$.

De hecho la función $i : X \to X^{**}$ es una isometría lineal. Por lo anterior a menudo identificamos a X simplemente como un subespacio de X^{**}.

La familia de funcionales $\{i_x | x \in X\}$ separa puntos: demostración:
$i_x x_1^* = i_x x_2^*$ para todo $x \in X$ si y sólo si $x_1^* x = x_2^* x$ para todo $x \in X$ si y sólo si $x_1^* = x_2^*$.

X^* es un espacio vectorial y $i(X) \subset X^{**}$ es un subespacio de funcionales lineales que separa puntos en X^*. Entonces por el teorema 2.1.1, X^* con la X-topología es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo, dicho espacio será denotado por (X^*, w^*) y hablaremos de la **topología débil***. Además $(X^*, w^*)^* = i(X)$.

Una vecindad w^*-básica de $0 \in X^*$ es de la forma:

$$\begin{aligned} W^*(0; i_{x_1}, \ldots, i_{x_n}, \varepsilon) &= \left\{ x^* \in X^* \middle| \left| i_{x_j} x^* \right| < \varepsilon \ j = 1, \ldots, n \right\} \\ &= \{ x^* \in X^* | \, |x^* x_j| < \varepsilon \ j = 1, \ldots, n \} \end{aligned}$$

y en adelante será denotado por $W^*(0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$.

Sea $(x_d^*) \subset X^*$ una red, entonces por el teorema 2.1.2 se sigue que $w^*\text{-}\lim\limits_{d \in D} x_d^* = x_0^*$ si y sólo si $\lim\limits_{d \in D} i_x x_d^* = i_x x_0^*$ para todo $x \in X$ si y sólo si $\lim\limits_{d \in D} x_d^* x = x_0^* x$ para todo $x \in X$.

Con la definición de la topologia débil* a la mano, damos otro ejemplo de un conjunto que es cerrado y acotado pero no w-compacto.

B_{l_1} no es w-compacto.

Dado que $l_1 = c_0^*$ isométricamente, entonces $B_{l_1} = B_{c_0^*}$. Si B_{l_1} fuera w-compacto, las topologías débil y débil* deben coincidir en B_{l_1}. (Esto último se sigue del hecho de que topologías de Hausdorff compactas comparables son iguales).

Consideremos la sucesión $(e_n) \subset l_1 = c_0^*$.

Si $\lambda \in c_0$ entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \langle \lambda, e_n \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Así $(e_n) \subset c_0^*$ es w^*-nula. Así pues, si B_{l_1} fuera w-compacto entonces (e_n) es w-nula, i.e $\lim\limits_{n \to \infty} x^* e_n = 0$ para todo $x^* \in c_0^{**} = l_\infty$.

Sea $\psi = (1, 1, \ldots) \in l_\infty$, entonces, $\lim\limits_{n \to \infty} \langle e_n, \psi \rangle = 1$; lo que es una contradicción.

Teorema 2.3.1 *(Goldstine, 1938)* ***Sea X un espacio vectorial normado, entonces B_X es w^*-denso en $B_{X^{**}}$. En consecuencia X es w^*-denso en X^{**}.***

Prueba:

Sea $x^{**} \in X^{**} \backslash \overline{B_X}^{w^*}$.

Dado que $\overline{B_X}^{w^*}$ es un conjunto convexo w^*-cerrado y $x^{**} \notin \overline{B_X}^{w^*}$, se sigue del teorema 2.2.1 que existe $i_{x^*} \in i(X^*) = (X^{**}, w^*)^*$ tal que

$$\alpha = \sup\left\{i_{x^*}y^{**}|y^{**} \in \overline{B_X^{w^*}}\right\} < i_{x^*}x^{**} = x^{**}x^*$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \sup\{i_{x^*}y^{**}|y^{**} \in B_X\} \\ &= \sup\{i_{x^*}(i_x)\,|i_x \in B_X\} \\ &= \sup\{x^*x|x \in B_X\} = \|x^*\| \end{aligned}$$

Por tanto, $\|x^*\| \leq \alpha < \|x^{**}\|\,\|x^*\|$ y así $\|x^{**}\| > 1$.

Hemos probado que $B_{X^{**}} \subset \overline{B_X^{w^*}}$. Así, $B_{X^{**}} \subset \overline{B_X^{w^*}} \subset \overline{X^{w^*}}$ lo cual implica que $X^{**} = \overline{X^{w^*}}$. □

Otro importante y útil resultado además del teorema de Goldstine, (de hecho, es la característica más notable de la topología débil*) es el siguiente:

Teorema 2.3.2 *(Banach-Alaoglu,1940)* ***Sea X un espacio vectorial normado. Entonces B_{X^*} es w^*-compacto. En consecuencia, subconjuntos acotados w^*-cerrados son w^*-compactos.***

Prueba:

Si $x^* \in B_{X^*}$ entonces $|x^*x| \leq 1$ para todo $x \in B_X$. Sea $D = \{\lambda|\,|\lambda| \leq 1\}$. Entonces $x^* : B_X \to D$ para todo $x^* \in B_{X^*}$.

Por tanto, podemos identificar cada miembro de B_{X^*} con un punto en el espacio producto D^{B_X}.

Del *Teorema de Tychonoff* se sigue que D^{B_X} es un conjunto compacto respecto a la topología producto.

Si $f_0 \in D^{B_X}$, entonces una vecindad básica de f_0 en la topología producto de D^{B_X} es de la forma:

$$\begin{aligned} V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) &= \left\{f \in D^{B_X}|\,|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \ i = 1, \ldots, n\right\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) \end{aligned}$$

B_{X^*} visto como un subconjunto de D^{B_X} tiene una topología, a saber, la inducida por la topología producto en D^{B_X} (de la convergencia puntual). Entonces un conjunto abierto en B_{X^*} respecto a esta topología tiene la siguiente forma:

$$V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \bigcap B_{X^*} = \{f \in B_{X^*} | \, |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \ i = 1, \ldots, n\}$$

Sin embargo, B_{X^*} como subconjunto de X^* hereda la topología débil* la cual claramente coincide con la anterior.

Es suficiente probar entonces que B_{X^*} es cerrado en D^{B_X}.

Sea $(x_d^*) \subset B_{X^*}$ una red tal que $\lim_d x_d^* = f$ en D^{B_X}, lo cual implica que $\lim_d x_d^* x = f(x)$ para todo $x \in B_X$.

Si $x_1, x_2 \in B_X$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ son tal que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in B_X$ entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \lim_d x_d^* (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \lim_d \alpha_1 x_d^* x_1 + \lim_d \alpha_2 x_d^* x_2 \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \end{aligned}$$

Se sigue que f es la restricción a B_X de un funcional x' definido en X.

Además por la continuidad del valor absoluto tenemos:

$$|f(x)| = \left| \lim_d x_d^* x \right| = \lim_d |x_d^* x| \leq 1 \text{ para todo } x \in B_X$$

entonces $x' \in B_{X^*}$. Esto termina la primera parte.

Sea $F \subset X^*$ un conjunto acotado w^*-cerrado. Entonces existe $\lambda > 0$ tal que $F \subset \lambda B_{X^*}$. Dado que (X^*, w^*) es un espacio vectorial topológico la función $T_\lambda x = \lambda x$ es un w^*-homeomorfismo $(\lambda > 0)$. Se sigue entonces que λB_{X^*} es un conjunto w^*-compacto para todo $\lambda > 0$. Por hipótesis $F \subset \lambda B_{X^*}$ es w^*-cerrado, por tanto es w^*-compacto.□

En seguida probaremos un resultado que nos relaciona topológicamente a los espacios (X, w) e $(i(X), w^*)$.

Lema 2.3.1 $i : (X, w) \to (i(X), w^*)$ *es un homeomorfismo.*

Prueba:

Sea $x_0 \in X$ y $W = W(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon)$ una w-vecindad de x_0. Entonces,

$$\begin{aligned} i(W) &= \{i_x | \, |x_i^* x - x_i^* x_0| < \varepsilon \ i = 1, \ldots, n\} \\ &= W^*(i_{x_0}; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon) \bigcap i(X) \end{aligned}$$

es una w^*-vecindad de i_{x_0} en $i(X)$. Por tanto,i es una función abierta.

Análogamente se prueba que i es una función continua.□

Definición 2.3.1 *Un espacio de Banach* X *es* ***reflexivo*** *si y sólo si* $X = X^{**}$.

Es claro que $X = X^{**}$ si y sólo si $B_X = B_{X^{**}}$.

Presentamos ahora el primer resultado que usa el teorema anterior.

Teorema 2.3.3 ***Sea*** X ***un espacio de Banach.***X ***es reflexivo si y sólo si*** B_X ***es*** w***-compacto.***

Prueba:

Necesidad.

Dado que $X = X^{**}$ entonces $i : (X, w) \to (X^{**}, w^*)$ es un homeomorfismo. Dado que i es una isometría se tiene: $i^{-1}(B_{X^{**}}) = B_X$. Por el teorema de *Banach-Alaoglu*, $B_{X^{**}}$ es w^*-compacto y así B_X es w-compacto.

Suficiencia.

Del hecho de que B_X es w-compacto se sigue que, $\mathrm{i}(B_X) \subset B_{X^{**}}$ es w^*-compacto, en particular w^*-cerrado. Así, por el teorema de *Goldstine* (Teorema 2.3.1) $B_{X^{**}} = \overline{B_X}^{w^*} = B_X$. $\square$

Corolario 2.3.1 *Sea* $1 < p < \infty$ *fijo, entonces* $B_{L_p(\mu)}$ *es* w*-compacto.*

A continuación presentamos otro resultado en el que se aplica el teorema de *Banach-Alaoglu.*

Teorema 2.3.4 ***Sean*** X, Y ***espacios de Banach con*** X ***reflexivo. Si*** T ***es un operador lineal continuo de*** X ***sobre*** Y ***entonces*** Y ***es reflexivo.***

Prueba:

Dado que X es reflexivo entonces B_X es w-compacto. Como $T : X \to Y$ es continuo por el teorema de la función abierta se sigue que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\delta B_Y^{\circ} \subset T B_X^{\circ} \subset T B_X$$

Por el teorema 2.2.4 $T : X \to Y$ es w-w continuo, por tanto TB_X es w-compacto. Así, $\overline{\delta B_Y^{\circ}}^{w}$ es w-compacto, pero:

$$\overline{\delta B_Y^{\circ}}^{w} = \overline{\delta B_Y} = \delta B_Y$$

Así, δB_Y es w-compacto y por tanto B_Y es w-compacto.

Concluimos que Y es reflexivo. $\square$

2.3.1 Operadores Compactos. Teorema de Schauder.

Sean X, Y espacios de Banach.

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Definimos el operador $T^* : Y^* \to X^*$ dado por: $T^*y^* = y^*T$.

T^* es llamado el **operador adjunto** de T y las siguientes son algunas de sus propiedades:

i) T^* es un operador lineal acotado y $\|T\| = \|T^*\|$.

ii) T es un operador compacto si y sólo si T^* es un operador compacto.

iii) Si T^* es w^*-$\|\cdot\|$ continuo entonces T es compacto.

iv) T es un operador compacto si y sólo si T^* es w^*-$\|\cdot\|$ continuo en B_{Y^*}.

Prueba:

i) Claramente, T^* es un operador lineal bien definido.

Ahora,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_X} |(T^*y^*)(x)| &= \sup_{x\in B_X} |y^*(Tx)| \\ &\leq \|y^*\| \sup_{x\in B_X} |Tx| = \|y^*\| \|T\|\end{aligned}$$

implica que $\|T^*y^*\| \leq \|T\| \|y^*\|$ para todo $y^* \in Y^*$, por tanto $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*(Tx)| \\ &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |(T^*y^*)(x)| \\ &\leq \|x\| \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|T^*y^*\| = \|T^*\| \|x\|\end{aligned}$$

para todo $x \in X$, por tanto

$$\|T\| \leq \|T^*\|$$

ii)

Necesidad.

Por ser T compacto, entonces $\overline{TB_X} \subset Y$ es compacto. En particular $\overline{TB_X}$ es un conjunto acotado, por lo que existe $M > 0$ tal que $\|y\| \leq M$ para todo $y \in \overline{TB_X}$.

Sea $(y_n^*) \subset B_{Y^*}$ una sucesión.

Sean $y_1, y_2 \in Y$, entonces $|y_n^* y_1 - y_n^* y_2| \leq \|y_1 - y_2\|$ para todo $n \in N$, por tanto $\{y_n^*\} \subset B_{Y^*}$ es una familia equicontinua en Y.

Notamos que $\left\{y_n^*|_{\overline{TB_X}}\right\} \subset C\left(\overline{TB_X}\right)$ es una familia equicontinua y acotada ($|y_n^* y| \leq \|y\| \leq M$ para todo $y \in \overline{TB_X}$).

Por el teorema de *Arzela-Ascóli* el conjunto $\left\{y_n^*|_{\overline{TB_X}}\right\} \subset C\left(\overline{TB_X}\right)$ es relativamente compacto, por lo que existe una subsucesión $\left(y_{n_i}^*|_{\overline{TB_X}}\right)$ que es convergente en $C\left(\overline{TB_X}\right)$.

Así,

$$\begin{aligned}
\left\|T^* y_{n_i}^* - T^* y_{n_j}^*\right\| &= \sup_{x \in B_X} \left\|T^* y_{n_i}^* x - T^* y_{n_j}^* x\right\| \\
&= \sup_{x \in B_X} \left|y_{n_i}^*(Tx) - y_{n_j}^*(Tx)\right| \\
&\leq \left\|y_{n_i}^* - y_{n_j}^*\right\|_{\overline{TB_X}}
\end{aligned}$$

Se sigue que $\left(T^* y_{n_i}^*\right) \subset X^*$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge.

Por tanto T^* es un operador compacto (Teorema 1.4.1).

Suficiencia.

Si T^* es compacto por la primera parte se sigue que $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ es un operador compacto. Entonces $T^{**}(B_{X^{**}})$ es relativamente compacto, en particular es totalmente acotado.

Si $i : X \to X^{**}, j : Y \to Y^{**}$ son las funciones canónicas entonces,

$$j_{Tx}(y^*) = y^*(Tx) = (T^* y^*)(x) = i_x(T^* y^*) = (T^{**} i_x)(y^*)$$

es decir, $j_{Tx} = T^{**} i_x$. Por tanto $j(TB_X) \subset T^{**} B_{X^{**}}$ y así $j(TB_X)$ es totalmente acotado.

Por tanto TB_X es totalmente acotado. Dado que Y es un espacio de Banach y $TB_X \subset Y$ se sigue que $\overline{TB_X}$ es compacto. T es compacto.

iii) Por el teorema de *Banach-Alaoglu* B_{Y^*} es w^*-compacto, usando la hipótesis se sigue que $T^* B_{Y^*}$ es compacto. Por tanto, T^* es un operador compacto y por el inciso anterior se sigue que T es compacto.

iv)

Necesidad.

Sabemos que B_{Y^*} es w^*-compacto. Consideramos a B_{Y^*} con la topología que hereda de (Y^*, w^*).

Sea $y_0^* \in B_{Y^*}$ arbitrario y $\varepsilon > 0$ dado.

Por hipótesis $\overline{TB_X}$ es compacto. Entonces existen $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tal que

$$TB_X \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(y_i + \frac{\varepsilon}{3} B_Y \right)$$

Sea

$$\begin{aligned} W &= B_{Y^*} \bigcap W\left(y_0^*; y_1, \ldots, y_n, \tfrac{\varepsilon}{3}\right) \\ &= \left\{ y^* \in B_{Y^*} \middle| \left| y^* y_i - y_0^* y_i \right| < \tfrac{\varepsilon}{3} \; i = 1, \ldots, n \right\} \end{aligned}$$

entonces W es una w^*-vecindad de y_0^* en B_{Y^*}.

Tomemos $y^* \in W$. Si $x \in B_X$ entonces $Tx = y_i + \frac{\varepsilon}{3} z$, para algún $i = 1, \ldots, n$ y para algún $z \in B_Y$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| (T^* y^*)\, x - (T^* y_0^*)\, x \right| &= \left| y^* (Tx) - y_0^* (Tx) \right| \\ &\leq \left| y^* y_i - y_0^* y_i \right| + \tfrac{\varepsilon}{3} \left| y^* z \right| + \tfrac{\varepsilon}{3} \left| y_0^* z \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto $\|T^* y^* - T^* y_0^*\| \leq \varepsilon$ para todo $y^* \in W$, i.e. $T^*|_{B_{Y^*}}$ es w^*-$\|\cdot\|$ continuo en y_0^*.

Suficiencia. Ver inciso anterior.□

CAPITULO 3

El teorema de Eberlein-Šmulian.

Es un hecho conocido que en espacios métricos, los conceptos de compacidad y compacidad por sucesiones son equivalentes. Así, en espacios vectoriales normados dichos términos son equivalentes tambien. La pregunta es,¿Si X es un espacio vectorial normado, qué ocurre con las topologías débil y débil* de X y X^* respectivamente?

Se mostró que si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita entonces (X, w) no es metrizable (Teorema 2.2.3). Sin embargo, el importante teorema de *Eberlein-Šmulian* afirma que todo subconjunto de un espacio de Banach es w-compacto si y sólo si es w-compacto por sucesiones.

Respecto a la topología débil* tenemos lo siguiente: si X es un espacio de Banach y $K \subset X^*$ es w^*-compacto por sucesiones entonces $\overline{K^{w^*}}$ es w^*-compacto. Con un ejemplo mostraremos que el inverso no es verdadero en general.

3.1 Compacidad y compacidad por sucesiones en (X, w)

En esta sección consideraremos a X un espacio de Banach.

Lema 3.1.1 *$A \subset X$ es w-relativamente compacto si y sólo si es acotado y $\overline{i\,(A)}^{w^*} \subset i\,(X)$.*

Prueba:

Necesidad.

Si $\overline{A^w}$ es w-compacto, entonces $\overline{A^w}$ es acotado (Teorema 2.2.5). Se sigue que A es acotado.

Dado que $i : (X, w) \to (i\,(X), w^*)$ es un homeomorfismo (lema 2.3.1), entonces

$$\overline{i\left(A\right)}^{w^*} = i\left(\overline{A^w}\right) \subset i\left(X\right)$$

Suficiencia

Si A es acotado, entonces $i\left(A\right)$ es acotado. Así, existe $M > 0$ tal que $i\left(A\right) \subset MB_{X^{**}}$. Por el teorema de *Banach-Alaoglu* $MB_{X^{**}}$ es w^*-compacto, entonces $\overline{i\left(A\right)}^{w^*} \subset \overline{MB_{X^{**}}^{w^*}} = MB_{X^{**}}$ implica que $\overline{i\left(A\right)}^{w^*} = i\left(\overline{A^w}\right)$ es w^*-compacto. Entonces $\overline{A^w}$ es w-compacto (lema 2.3.1).□

Lema 3.1.2 *Si $A \subset X$ es w-compacto por sucesiones entonces es un conjunto acotado.*

Prueba:

Si $x^*A \subset K$ es un conjunto acotado para cada $x^* \in X^*$, entonces A es w-acotado y por tanto acotado. Así pues, basta probar que A es w-acotado. Supongamos que no y sea $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^*A \subset K$ no es acotado, entonces existe $(x_n) \subset A$ tal que $|x_0^*x_n| > n$ para cada $n \in N$.

Por hipótesis existe $x \in A$ y $\left(x_{n_j}\right)$ una subsucesión de (x_n) tal que $x = w\text{-}\lim_j x_{n_j}$, en particular $x_0^*x = \lim_j x_0^*x_{n_j}$. Lo cual contradice $|x_0^*x_n| > n$ para cada $n \in N$. □

Teorema 3.1.1 *(Eberlein-Šmulian, 1947-1940)* $A \subset X$ ***es*** w***-relativamente compacto si y sólo si es*** w***-relativamente compacto por sucesiones. En particular,*** $A \subset X$ ***es*** w***-compacto si y sólo si es*** w***-compacto por sucesiones.***

Prueba:

Necesidad.

Sea $(x_n) \subset A$ una sucesión fija, sin perdida de generalidad se puede suponer que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

Sea $V = \overline{\langle x_1, x_2, \ldots \rangle}$. Claramente $V \subset X$ es un subespacio separable, entonces existe (v_n) denso en V. Por el teorema de *Hahn-Banach* existe $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ tal que $x_n^*v_n = \|v_n\|$ para todo $n \in N$.

Sea $x \in V$. Afirmamos que si $x_n^*x = 0$, para todo $n \in N$, entonces $x = 0$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dado que (v_n) es denso en V, existe $n_0 \in N$ tal que $\|x - v_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otro lado,

$$\|v_{n_0}\| = x_{n_0}^* v_{n_0} - x_{n_0}^* x \leq \|x - v_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto,$\|x\| \leq \|x - v_{n_0}\| + \|v_{n_0}\| < \varepsilon$.

Dado que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario entonces $x = 0$.

Por hipótesis $\overline{A^w}$ es w-compacto, entonces $\overline{A^w}$ es acotado (Teorema 2.2.5), se sigue que A es acotado. Entonces $|x_n^* x| \leq \|x\| \leq M$ para todo $n \in N$, donde $M > 0$ es una constante fija.

Usando un argumento estandar de diagonalización encontramos una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)$ de (x_n) tal que $\lim\limits_j x_n^* x_{n_j}$ existe para cada $n \in N$.

Dado que $\overline{A^w}$ es w-compacto entonces el conjunto $\left\{x_{n_j}\right\}_j \subset A$ tiene al menos un w-punto de acumulación. Sea $y' \in \overline{A^w}$ un w-punto de acumulación de $\left\{x_{n_j}\right\}$, así $x_n^* y' = \lim\limits_j x_n^* x_{n_j}$ para todo $n \in N$.

Siendo V un subespacio cerrado, entonces V es w-cerrado, se sigue que $y' \in V$.

Si y_1 es otro w-punto de acumulación, entonces $x_n^* y_1 = \lim\limits_j x_n^* x_{n_j} = x_n^* y'$, para todo $n \in N$. De la primera parte de la demostración tenemos que $y_1 = y'$.

Resta probar que $w\text{-}\lim\limits_j x_{n_j} = y'$. Pero si para algún $x_0^* \in X^*$ y una subsucesión $(x_{n j_k})$, tenemos que $\lim\limits_k x_0^* x_{n j_k} = \alpha \neq x_0^* y'$, entonces existe un w-punto de acumulación de $\{x_{n j_k}\}$, que es también un w-punto de acumulación de $\left\{x_{n_j}\right\}$ diferente de y'. Una contradicción.

Suficiencia.

Supongamos que $\overline{A^w}$ no es w-compacto. A partir de lo anterior exhibiremos una sucesión $(x_n) \subset A$ sin alguna subsucesión que sea w-convergente. De donde se sigue el resultado.

Por hipótesis $\overline{A^w}$ es w-compacto por sucesiones, entonces por el lema 3.1.2 A es acotado. Entonces por el lema 3.1.1 existe $F \in X^{**} \backslash i(X)$ tal que $F \in \overline{i(A)}^{w^*}$.

Sea $\theta = d(F, i(X)) > 0$. (Si $\theta = 0$ entonces $F \in \overline{i(X)} = i(X)$).

Supongamos por el momento la existencia de una sucesión

$$(x_n, x_n^*)_n \subset A \times B_{X^*}$$

tal que:

i) $F x_n^* > \frac{3}{4}\theta$ $n = 1, \ldots$

ii) $|x_n^* x_j| < \frac{1}{4}\theta$ si $j < n$

iii) $x_n^* x_j > \frac{3}{4}\theta$ si $j \geq n$

Afirmamos que la sucesión (x_n) no tiene una subsucesión w-convergente.

Supongamos que existe una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)$ de (x_n) y $x \in X$ tal que $x = w\text{-}\lim_j x_{n_j}$, es decir $x^* x = \lim_j x^* x_{n_j}$ para todo $x^* \in X^*$.

Entonces existen $\alpha_k \geq 0$ $k = 1, \ldots, m$ con $\sum_{i=1}^m \alpha_k = 1$ tales que

$$\left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k x_{n_{j_k}} - x \right\| < \frac{1}{4}\theta \text{ (Corolario 2.2.1).}$$

Sea $P = \max_{1 \leq k \leq m} \{n_{j_k}\}$,entonces si $n > P$ se sigue de ii) que

$$\left| x_n^* \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_{n_{jk}} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^m \alpha_k \left| x_n^* x_{n_{jk}} \right| < \frac{1}{4}\theta \sum_{i=1}^m \alpha_k = \frac{1}{4}\theta$$

Así, si $n > P$ tenemos que,

$$\begin{aligned} |x_n^* x| &= \left| x_n^* x - x_n^* \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_{n_{jk}} \right) + x_n^* \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_{n_{jk}} \right) \right| \\ &< \tfrac{\theta}{4} + \tfrac{\theta}{4} = \tfrac{\theta}{2} \end{aligned}$$

De iii) se sigue que $\frac{3}{4}\theta \leq \lim_j x_n^* x_{n_j} = x_n^* x$ para todo $n \in N$, lo cual contradice lo anterior.

Resta probar entonces la existencia de una sucesión $(x_n, x_n^*)_n \subset A \times B_{X^*}$ que satisfaga i), ii) y iii).

La prueba se hará por inducción.

Dado que,

$$\theta \leq \|F - i(0)\| = \|F\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |F x^*|$$

entonces existe $x_1^* \in B_{X^*}$ tal que $F x_1^* > \frac{3}{4}\theta$.

Como $F \in \overline{i(A)}^{w^*}$ entonces $W^*(F; x_1^*, \varepsilon) \bigcap i(A) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $\varepsilon = F x_1^* - \frac{3}{4}\theta$, por lo anterior existe $x_1 \in A$ tal que

$$|i_{x_1} x_1^* - F x_1^*| = |x_1^* x_1 - F x_1^*| < F x_1^* - \frac{3}{4}\theta$$

De donde se sigue que $x_1^* x_1 > \frac{3}{4}\theta$.

Supongamos que tenemos $\left(x_j, x_j^*\right)_{j=1}^n \subset A \times B_{X^*}$ satisfaciendo i), ii) y iii).

Por el teorema de *Hahn-Banach* existe $\varphi \in B_{X^{***}}$ tal que $\varphi(i(X)) = 0$ y $\varphi(F) = \theta$.

De acuerdo al teorema de *Goldstine* $\overline{B_{X^*}^{w^*}} = B_{X^{***}}$, entonces

$$W^*\left(\varphi; i_{x_1}, \ldots, i_{x_n}, F, \frac{1}{4}\theta\right) \bigcap B_{X^*} \neq \emptyset$$

Así, existe $x^*_{n+1} \in B_{X^*}$ tal que

$$\left|\varphi\left(i_{x_p}\right) - j_{x^*_{n+1}}\left(i_{x_p}\right)\right| = \left|i_{x_p}\left(x^*_{n+1}\right)\right| = \left|x^*_{n+1}\left(x_p\right)\right| < \frac{1}{4}\theta$$

para $p = 1, \ldots, n$ y además

$$\left|\varphi\left(F\right) - j_{x^*_{n+1}}\left(F\right)\right| = \left|\varphi\left(F\right) - Fx^*_{n+1}\right| = \left|\theta - Fx^*_{n+1}\right| < \frac{1}{4}\theta$$

Donde $j : X^* \to X^{***}$ es el encaje canónico y usamos el hecho de que $\varphi\left(i\left(X\right)\right) = 0$.

La primera de las desigualdades anteriores implica que x^*_{n+1} satisface ii). De la segunda se sigue que $Fx^*_{n+1} > \frac{3}{4}\theta$, que corresponde a i).

Sea $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq n+1} \left\{Fx^*_i - \frac{3}{4}\theta\right\} > 0$.

Usando nuevamente el hecho de que $F \in \overline{i\left(A\right)}^{w^*}$, entonces

$$W^*\left(F; x^*_1, \ldots, x^*_{n+1,} \varepsilon\right) \bigcap i\left(A\right) \neq \emptyset$$

Así existe $x_{n+1} \in A$ tal que

$$\left|Fx^*_i - i_{x_{n+1}} x^*_i\right| = \left|Fx^*_i - x^*_i x_{n+1}\right| < \varepsilon \; i = 1, \ldots, n+1$$

Entonces,

$$\frac{3}{4}\theta = \frac{3}{4}\theta - Fx^*_i + Fx^*_i \leq -\varepsilon + Fx^*_i < x^*_i x_{n+1} \; i = 1, \ldots, n+1$$

Por tanto x_{n+1} satisface iii).□

Proposición 3.1.1 *Si $K \subset X$ es compacto por sucesiones, entonces es w-compacto por sucesiones; el recíproco no es cierto en general.*

Prueba:

Sea $(x_n) \subset K$, entonces existe una subsucesión (x_{n_i}) de (x_n) y $x \in X$ tal que $x = \lim\limits_i x_{n_i}$. En particular $x^*x = \lim\limits_i x^* x_{n_i}$ para todo $x^* \in X^*$, lo cual implica que $x = w$-$\lim\limits_i x_{n_i}$.

Para la segunda parte, consideramos un espacio de Banach reflexivo X de dimensión infinita. Dado que $X = X^{**}$ entonces B_X es w-compacto (Teorema 2.3.3) por tanto B_X es w-compacto por sucesiones, sin embargo B_X no es compacto (corolario 1.3.1), por lo que no es compacto por sucesiones.□

Proposición 3.1.2 *Sea $K \subset X$ compacto por sucesiones y sea $(x_n) \subset K$ tal que $w\text{-}\lim_n x_n = x$, entonces $\lim_n x_n = x$.*

Prueba: Supongamos que la sucesión (x_n) no converge a x, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión (x_{n_i}) de (x_n) tal que

$$\|x - x_{n_i}\| > \varepsilon_0 \text{ para todo } i \in N. \tag{3.1.1}$$

Por ser K compacto por sucesiones, existe una subsucesión $\left(x_{n_{j_k}}\right)$ de (x_{n_i}) y $y \in K$ tal que $\lim_k x_{n_{j_k}} = y$.

En particular $w\text{-}\lim_k x_{n_{j_k}} = y$. Pero por hipótesis $w\text{-}\lim_n x_n = x$, entonces $x^*x = x^*y$ para todo $x^* \in X^*$ lo cual implica que $x = y$. Entonces $\lim_k x_{n_{j_k}} = x$, que contradice 3.1.1.□

En espacios de Hilbert tenemos el siguiente resultado:

Si H es un espacio de Hilbert y $K \subset X$ es un conjunto convexo cerrado, entonces K contiene un elemento de norma mínima.

Recordamos que la prueba de este resultado se basa fuertemente en la identidad del paralelogramo, y que dicho teorema es muy importante ya que con el se prueba la existencia de proyecciones ortogonales, que son la base de la teoría en espacios de Hilbert. Pues bien, tenemos un resultado completamente análogo en espacios de Banach reflexivos. A saber,

Teorema 3.1.2 ***Sea X un espacio de Banach reflexivo y $K \subset X$ un conjunto convexo cerrado entonces K contiene un elemento de norma mínima.***

Prueba:

Sea $d = \inf\{\|x\| \,|x \in K\}$ .Sea $(x_n) \subset K$ tal que $\lim_n \|x_n\| = d$, entonces existe $M > 0$ tal que $(x_n) \subset MB_X$.

Por hipótesis $X = X^{**}$, entonces B_X es w-compacto y por tanto w-compacto por sucesiones. Así, existe una subsucesión (x_{n_i}) de (x_n) y $x \in MB_X$ tal que $w\text{-}\lim_i x_{n_i} = x$.

K es convexo y cerrado, entonces $K = \overline{K^w}$ (Teorema 2.2.2),lo cual implica que $x \in K$ y por tanto $d \leq \|x\|$.

Por otro lado,

$$\|x\| \leq \overline{\lim} \|x_{n_i}\| \leq d$$

(Para la última desigualdad ver [Ba;pag. 243]).□

3.2 Compacidad y compacidad por sucesiones en (X^*, w^*).

El objetivo de esta sección es responder la pregunta, ¿Son equivalentes los conceptos de compacidad y compacidad por sucesiones respecto a la topología débil*?.

El siguiente teorema responde parcialmente.

Teorema 3.2.1 ***Sea*** X ***un espacio de Banach. Si*** $K \subset X^*$ ***es*** w^****-compacto por sucesiones entonces*** $\overline{K}^{w^*}$ ***es*** w^****-compacto.***

Prueba:

Si $K\subset X^*$ es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que $K\subset MB_{X^*}$. Por el teorema de *Banach-Alaoglu* B_{X^*} es w^*-compacto y por tanto MB_{X^*} es w^*-compacto.

Dado que $\overline{K}^{w^*} \subset \overline{MB_{X^*}}^{w^*} = MB_{X^*}$ (recordar que (X^*, w^*) es Hausdorff), se sigue que $\overline{K}^{w^*}$ es w^*-compacto.

Resta probar entonces que $K\subset X^*$ es acotado.

Si K **no** es acotado, entonces existe $(x_n^*) \subset K$ tal que $\|x_n^*\| > n$ para todo $n \in N$.

Por hipótesis existe una subsucesión $\left(x_{n_i}^*\right)$ de (x_n^*) y $x^* \in X^*$ tal que $w^*\text{-}\lim_i x_{n_i}^* = x^*$, es decir, $\lim_i x_{n_i}^* x = x^* x$ para todo $x \in X$.

De esto último se sigue que $\sup_{i\in N} \left|x_{n_i}^* x\right| < \infty$ para cada $x \in X$. Por el teorema de *Banach-Steinhaus*, existe $M_1 > 0$ tal que $\sup_{i\in N} \left\|x_{n_i}^*\right\| \leq M_1$. Una contradicción.□

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior no es verdadero en general.

Ejemplo.

Sea $X = l_\infty$. Entonces X es un espacio de Banach y por el teorema de *Banach-Alaoglu* B_{X^*} es w^*-compacto.

Probaremos que B_{X^*} no es w^*-compacto por sucesiones.

Definimos $p_n : X \to K$ $n = 1, \ldots$ como sigue:

$$p_n(x) = x_n$$

Claramente, p_n es un funcional lineal para todo $n \in N$.

Por otro lado,

$$|p_n(x)| = |x_n| \leq \sup_{n\in N} |x_n| = \|x\|_\infty$$

para todo $x \in X$, implica que $\|p_n\| \leq 1$, entonces $(p_n) \subset B_{X^*}$.

Sea $x = (1, 1, \ldots)$, entonces $|p_n(x)| = 1 = \|x\|_\infty$ para todo $n \in N$, por tanto $\|p_n\| = 1$.

Supongamos que (p_n) tiene una subsucesión (p_{n_i}) w^*-convergente, es decir existe $q \in B_{X^*}$ tal que $w^*\text{-}\lim\limits_i p_{n_i} = q$; lo cual implica que $\lim\limits_i p_{n_i}(x) = q(x)$ para todo $x \in X$.

Definimos $x \in X$ de la siguiente manera:

$$x_j = \begin{cases} 0 & j \notin \{n_i\} \\ (-1)^i & j = n_i \end{cases}$$

Así, $p_{n_i}(x) = x_{n_i} = (-1)^i$, entonces $(p_{n_i}(x))$ no es una sucesión convergente. Una contradicción.

De todo lo anterior se sigue que $(p_n) \subset B_{X^*}$, es una sucesión que no admite subsucesiones w^*-convergentes. Entonces B_{X^*} no es w^*-compacto por sucesiones. Esto termina el ejemplo.$\square$

Hay un caso especial en el que ambos conceptos son equivalentes, a saber, cuando X es un espacio de Banach separable, lo que no fue el caso en el ejemplo anterior.

Antes de probar lo anterior, enunciamos un teorema que será de utilidad y es de interés independiente:

Teorema 3.2.2 ***Si*** (X, τ) ***es un espacio topológico compacto y si alguna sucesión*** (f_n) ***de funciones continuas con valores reales separa puntos en*** X***, entonces es metrizable.***

Ver [Ru2;pag. 63].

Teorema 3.2.3 ***Sea*** X ***un espacio de Banach separable. Si*** $K \subset X^*$ ***es*** w^****-compacto, entonces*** K ***es metrizable en la*** w^****-topología.***

Prueba:

Sea $\{x_n\}$ un conjunto denso numerable en X.

Definimos $f_n : X^* \to R$ $n = 1, \ldots$ como sigue:

$$f_n(x^*) = x^* x_n = i_{x_n} x^* \text{ para todo } x^* \in X^*$$

Por la definición de la topología débil*, cada función f_n es w^*-continua.

Si $f_n(x_1^*) = f_n(x_2^*)$ para todo $n \in N$, entonces $x_1^* x_n = x_2^* x_n$ para todo $n \in N$. Dado que x_1^*, x_2^* son funciones continuas en X y coinciden en un conjunto denso se sigue que $x_1^* = x_2^*$. Se concluye que (f_n) es una sucesión de funciones w^*-continuas que separa puntos en X^*.

Entonces aplicamos el teorema precedente al espacio topológico compacto (K, w^*).

$\square$

CAPITULO 4

El teorema de Orlicz-Pettis

El presente capítulo es una breve introducción a la teoría de la integral de Bochner, que trata acerca de la integración de funciones vectoriales. Usa-remos dicha teoría para obtener el teorema de *Orlicz-Pettis* y también se aplicará a un ejemplo.

4.1 La integral de Bochner.

Sea $(\Omega, \sum, \mu)$ un espacio de probabilidad completo y X un espacio de Banach.

Definición 4.1.1 *Una función $f : \Omega \to X$ es llamada* ***simple****, si existen $E_1, \ldots, E_n \in \sum$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ y vectores $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que*

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(w)\, x_i \text{ para todo } w \in \Omega$$

donde χ_E denota la función característica del conjunto $E \subset X$. Tales funciones son consideradas medibles.

Definición 4.1.2 *Cualquier función $f : \Omega \to X$ que es límite (c.d. relativo a μ) de una sucesión de funciones simples es llamada* ***μ-medible****.*

Definición 4.1.3 *Una función $f : \Omega \to X$ es* ***débilmente μ-medible****, si $x^* f$ es μ-medible para cada $x^* \in X^*$.*

Definición 4.1.4 *Decimos que la función $f : \Omega \to X$ es* ***μ-esencialmente separablemente valuada*** *(μ-esv) si existe $E \in \sum$ con $\mu(E) = 0$, tal que $f(\Omega \backslash E)$ es separable.*

El siguiente es un resultado importante que caracteriza a las funciones μ-medibles.

Teorema 4.1.1 *(de medibilidad de Pettis, 1938).* ***Una función*** $f : \Omega \to X$ ***es*** μ***-medible si y sólo si*** f ***es débilmente*** μ***-medible y*** μ***-esv.***

Prueba:

Necesidad

Como f es μ-medible entonces existe una sucesión (f_n) de funciones simples tal que $\lim_n f_n = f$ c.d.

Se sigue que $x^* f = \lim_n x^* f_n$ c.d. para cada $x^* \in X^*$ y por tanto $x^* f$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

Sea $R_n = f_n(\Omega)$ para todo $n \in N$, entonces $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ es un subconjunto numerable de X. Así, $\overline{R}$ es separable.

Tomemos $N \subset \Omega$ tal que $\mu(N) = 0$ y $\lim_n f_n(w) \neq f(w)$, $w \in N$ entonces afirmamos que $f(\Omega \backslash N) \subset \overline{R}$.

En efecto, si $w \in \Omega \backslash N$ entonces $\lim_n f_n(w) = f(w)$ y como $f_n(w) \in \overline{R}$ para todo $n \in N$, se sigue que $f(w) \in \overline{R}$.

Suficiencia

Supongamos que $f : \Omega \to X$ es débilmente μ-medible y que existe $E \in \sum$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \backslash E) \subset X$ es separable. Sea $\{x_n\}$ un subconjunto denso numerable de $f(\Omega \backslash E)$. Por el teorema de *Hahn-Banach*, existe $(x_n^*) \subset S_{X^*}$ tal que $x_n^* x_n = \|x_n\|$.

Sea $w \in \Omega \backslash E$. Afirmamos que $\|f(w)\| = \sup_n |x_n^*(f(w))|$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existe x_n tal que $\|f(w) - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$||x_n^*(f(w))| - x_n^* x_n| \leq \|f(w) - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1.1}$$

Por otro lado,

$$|\|f(w)\| - \|x_n\|| \leq \|f(w) - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1.2}$$

De 4.1.1 y 4.1.2 se sigue que ,

$$\|f(w)\| < x_n^* x_n + \frac{\varepsilon}{2} < |x_n^*(f(w))| + \varepsilon$$

Por tanto, $\|f(w)\| \leq \varepsilon + \sup_n |x_n^*(f(w))|$. Se sigue que

$$\|f(w)\| \leq \sup_n |x_n^*(f(w))|.$$

Además, $\sup\limits_n |x_n^*(f(w))| \leq \sup\limits_n \|x_n^*\| \|f(w)\| = \|f(w)\|$ lo que implica la afirmación.

Por hipótesis x^*f es μ-medible para cada $x^* \in X^*$, por lo hecho anteriormente se sigue que $\|f(\cdot)\|$ es μ-medible. Análogamente se prueba que $\|f(\cdot) - x_n\|$ es μ-medible.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Definimos $E_n = \{w \in \Omega | \, \|f(w) - x_n\| < \varepsilon\}$.

Recordamos que la función $\|f(\cdot) - x_n\|$ es μ-medible y por tanto cada $E_n \in \sum$.

Definimos $g : \Omega \to X$ de la siguiente manera:

$$g(w) = \begin{cases} x_n & \text{si} \quad w \in E_n \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} E_i \\ 0 & \text{si} \quad w \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \end{cases}$$

Es claro que $\|f(w) - g(w)\| < \varepsilon$ para cualquier w fuera de E y de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Hemos mostrado que dado $\varepsilon > 0$, existe una función g numerablemente valuada y un conjunto μ-nulo N_ε tal que g alcanza valores distintos en conjuntos disjuntos de $\sum$ y tal que $\|f(w) - g(w)\| < \varepsilon$ si $w \in \Omega \backslash N_\varepsilon$. $\square$

Definición 4.1.5 *De la integral de Bochner de una función vector valuada.*

Si $f : \Omega \to X$ es simple, $f(w) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(w) x_i$, entonces para cualquier $E \in \sum$ definimos

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap E_i) x_i$$

En particular,

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f d\mu \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap E_i) x_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap E_i) \|x_i\| \\ &= \int_E \|f\| d\mu \end{aligned}$$

Una función μ-medible $f : \Omega \to X$ es llamada **Bochner integrable**, si existe una sucesión (f_n) de funciones simples tal que:

$$\lim_n \int_\Omega \|f_n(w) - f(w)\| \, d\mu(w) = 0$$

Del hecho de que,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f_n d\mu - \int_E f_m d\mu \right\| &= \left\| \int_E (f_n - f_m) \, d\mu \right\| \\
&\leq \int_E \|f_n - f_m\| \, d\mu \\
&\leq \int_\Omega \|f_n - f_m\| \, d\mu \\
&\leq \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu + \int_\Omega \|f_m - f\| \, d\mu \to 0 \\
& \quad \text{cuando } n, m \to \infty
\end{aligned}$$

Se sigue que $\left(\int_E f_n d\mu \right)$ es una sucesión de Cauchy en X para cada - $E \in \sum$, entonces definimos

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$$

Lema 4.1.1 *Si f es Bochner integrable, entonces* $\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$ *para cada* $E \in \sum$.

Prueba:

Para funciones simples ya se probó el resultado.

Si f es Bochner integrable,entonces existe una sucesión (f_n) de funciones simples tal que $\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$,en particular

$$\int_\Omega |\|f_n\| - \|f\|| \, d\mu \leq \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu$$

lo que implica que: $\lim_n \int_E \|f_n\| \, d\mu = \int_E \|f\| \, d\mu$.

Así,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f d\mu \right\| &= \lim_n \left\| \int_E f_n d\mu \right\| \\
&\leq \lim_n \int_E \|f_n\| \, d\mu \\
&= \int_E \|f\| \, d\mu
\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.2 *Sean X, Y espacios de Banach, $f : \Omega \to X$ una función Bochner integrable. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo entonces*

$$T \int_E f d\mu = \int_E T f d\mu \;\; E \in \Sigma$$

Prueba:

Si f es una función simple $f(w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(w)$ el resultado es claro.

Por ser f una función Bochner integrable, existe una sucesión (f_n) de funciones simples tal que $\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$ y $\lim_n \int_E \|f - f_n\| d\mu = 0$ para todo $E \in \Sigma$.

Así,

$$T \int_E f d\mu = \lim_n T \int_E f_n d\mu = \lim_n \int_E T f_n d\mu$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\| \int_E T f d\mu - \int_E T f_n d\mu \right\| &= \left\| \int_E (Tf - Tf_n) d\mu \right\| \\ &\leq \int_\Omega \|Tf - Tf_n\| d\mu \\ &\leq \|T\| \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu \to^{n \to \infty} 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\int_E T f d\mu = \lim_n \int_E T f_n d\mu = T \int_E f d\mu$.$\square$

Teorema 4.1.2 *(Caracterización de Bochner de las funciones integrables, 1932).* ***Una función μ-medible es Bochner integrable si y sólo si*** $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.

Prueba:

Necesidad

Dado que f es Bochner integrable entonces existe una función simple g tal que $\int_\Omega \|f - g\| d\mu < 1$.

Así,

$$\int_\Omega \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - g\| d\mu + \int_\Omega \|g\| d\mu < \infty$$

Suficiencia

Como f es μ-medible, se sigue que $\|f\|$ es μ-medible con $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.

Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles numerablemente valuadas tal que $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}$ c.d. (Para la existencia de dicha sucesión, ver la prueba de la suficiencia en el teorema anterior).

Del hecho de que $\|f_n(w)\| \leq \|f(w)\| + \frac{1}{n}$ c.d., se sigue que $\int\limits_{\Omega} \|f_n\| \, d\mu < \infty$.

Para cada n, escribimos a f_n en forma canónica

$$f_n(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{E_{n,m}}(w)\, x_{n,m}$$

donde $E_{n,i} \cap E_{n,j} = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{n,m} = \Omega$, $E_{n,m} \in \sum$, $x_{n,m} \in X$.

Dado que $\int\limits_{\Omega} \|f_n\| \, d\mu < \infty$ y $\mu(\Omega) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu(E_{n,m}) = 1$ para cada $n \in N$, entonces escogemos p_n tan grande como para que

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{m=p_n+1}^{\infty} E_{n,m}} \|f_n\| \, d\mu < \frac{1}{n}$$

Sea $g_n = \sum\limits_{m=1}^{p_n} \chi_{E_{n,m}}(w)\, x_{n,m}$,entonces

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \|f - g_n\| \, d\mu &\leq \int\limits_{\Omega} \|f - f_n\| \, d\mu + \int\limits_{\Omega} \|f_n - g_n\| \, d\mu \\ &\leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Por tanto, f es Bochner integrable.$\square$

Según se puede apreciar, la caracterización de Bochner de las funciones Bochner integrables, reduce gran parte del desarrollo al correspondiente al de la integral de Lebesgue.

Corolario 4.1.1 *(Teorema de la convergencia dominada)*

Si $f_n : \Omega \to X$, $n = 1, \ldots$ *son Bochner integrables,* $f = \lim\limits_n f_n$ *c.d. y* $\|f_n(\cdot)\| \leq g(\cdot)$ *c.d., donde* $g \in L_1(\mu)$, *entonces* f *es Bochner integrable y* $\lim\limits_n \int\limits_{\Omega} \|f - f_n\| \, d\mu = 0$ *y* $\lim\limits_n \int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E f d\mu$ *para todo* $E \in \sum$.

Prueba:

Dado que $f = \lim\limits_n f_n$ c.d., se sigue que $x^* f = \lim\limits_n x^* f_n$ c.d. para cada $x^* \in X^*$, entonces f es débilmente medible.

Sea $E \in \sum$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(w) \neq \lim\limits_n f_n(w)$ si $w \in E$.

Para cada n, existe $E_n \in \sum$ tal que $\mu(E_n) = 0$ y $f_n(\Omega \backslash E_n) \subset X$ es separable.

Sea $A = E \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $\mu(A) = 0$ y

$$f(\Omega \backslash A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \backslash E_n)}$$

Pero $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \backslash E_n)$ es separable, entonces $f(\Omega \backslash A)$ tambien es separable. De todo lo anterior se sigue que f es μ-medible.(Teorema 4.1.1).

Dado que $f(w) = \lim\limits_n f_n(w)$ c.d., entonces $\|f(w)\| = \lim\limits_n \|f_n(w)\|$ c.d.

Dado que $\|f_n(w)\| \leq g(w)$ c.d. y por la hipótesis $g \in L_1(\mu)$, se tiene: $\int\limits_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty$, de donde se sigue que f es Bochner integrable.

Por otro lado, $\|f(w) - f_n(w)\| \leq \|f(w)\| + \|f_n(w)\| \leq 2g(w)$ c.d.

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos

$$\lim_n \int_{\Omega} \|f - f_n\| \, d\mu = \int_{\Omega} \lim_n \|f - f_n\| \, d\mu = 0$$

Por otro lado,

$$\left\| \int_E f d\mu - \int_E f_n d\mu \right\| \leq \int_E \|f - f_n\| \, d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| \, d\mu$$

implica que $\lim\limits_n \int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E f d\mu$ para todo $E \in \sum$. □

Lema 4.1.3 *Si $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable, entonces $\left\{ \int\limits_E f d\mu | E \in \sum \right\}$ es un subconjunto relativamente compacto de X.*

Prueba:

Supongamos que f es una función simple,

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(w) \, x_i$$

entonces $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E \cap E_i) \, x_i \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ para cada $E \in \sum$.

Dado que $\left\| \int\limits_E f d\mu \right\| \leq \int\limits_E \|f\| \, d\mu \leq \int\limits_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty$ para cada $E \in \sum$, se sigue que $\left\{ \int\limits_E f d\mu | E \in \sum \right\}$ es un subconjunto acotado del subespacio vectorial de dimensión finita $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, entonces dicho conjunto es relativamente compacto (Teorema 1.3.1).

Sea ahora $f : \Omega \to X$ una función Bochner integrable arbitraria, entonces existe una función simple $g : \Omega \to X$ tal que

$$\int_{\Omega} \|f-g\|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se sigue entonces que,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f d\mu - \int_E g d\mu \right\| &= \left\| \int_E (f-g)\, d\mu \right\| \\
&\leq \int_E \|f-g\|\, d\mu \\
&\leq \int_{\Omega} \|f-g\|\, d\mu < \tfrac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

para cada $E \in \sum$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Dado que $A = \left\{ \int_E g d\mu | E \in \sum \right\}$ es relativamente compacto, entonces es totalmente acotado. Se sigue que existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{2} B_X \right)$$

Tomemos $E \in \sum$, entonces existe x_i tal que $\left\| \int_E g d\mu - x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f d\mu - x_i \right\| &= \left\| \int_E f d\mu - \int_E g d\mu + \int_E g d\mu - x_i \right\| \\
&\leq \left\| \int_E f d\mu - \int_E g d\mu \right\| + \left\| \int_E g d\mu - x_i \right\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que el conjunto $C = \left\{ \int_E f d\mu | E \in \sum \right\}$ es totalmente acotado, de hecho $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \varepsilon B_X)$. Dado que X es un espacio métrico completo, se concluye que dicho conjunto es relativamente compacto.$\square$

4.2 El teorema de Orlicz-Pettis

Definición 4.2.1 *Sea $\sum_n x_n$ una serie tal que $x_n \in X$ para todo $n \in N$. Si (x_{k_n}) es una subsucesión de (x_n), entonces decimos que $\sum_n x_{k_n}$ es* ***una subserie de la serie dada****.*

Si además, $\lim_n \sum_{j=1}^{n} x_{k_j}$ *existe entonces decimos que* $\sum_n x_{k_n}$ *es* ***una subserie convergente.*** *Análogamente se define una subserie* w*-convergente.*

Es claro que si una serie $\sum_n x_n$ es w-convergente, entonces $w\text{-}\lim_n x_n = 0$.

Teorema 4.2.1 *(Orlicz-Pettis, 1929-1938)* ***Sea*** $\sum_n x_n$ ***una serie. Si cada subserie de la serie*** $\sum_n x_n$ ***es*** w***-convergente, entonces cada subserie es convergente.***

Prueba:

La prueba se hará para espacios vectoriales reales, no hay dificultad alguna para hacerlo en espacios vectoriales complejos.

Supongamos que el resultado no se da, entonces existe una subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{k_j}$ tal que $\left(\sum_{j=1}^{n} x_{k_j}\right)$ no es una sucesión de Cauchy en X.

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que si P es un entero dado, entonces existen $l_1 > j_1 > P$ tal que

$$\left\| \sum_{i=j_1}^{l_1} x_{k_i} \right\| > \varepsilon$$

Repitiendo el proceso, se sigue que existen $l_2 > j_2 > l_1$ tal que

$$\left\| \sum_{i=j_2}^{l_2} x_{k_i} \right\| > \varepsilon$$

De esta manera construimos un par de sucesiones de enteros positivos $(j_n), (l_n)$; satisfaciendo $j_1 < l_1 < j_2 < l_2 < \ldots$ y $\left\| \sum_{i=j_n}^{l_n} x_{k_i} \right\| > \varepsilon$.

La serie $\sum_n y_n$, donde $y_n = \sum_{i=j_n}^{l_n} x_{k_i}$, es claramente una subserie de $\sum_n x_n$ y usando la hipótesis se sigue que es w-sumable en X, entonces $w\text{-}\lim_n y_n = 0$ y $\|y_n\| > \varepsilon$ para todo $n \in N$.

Sean $\Gamma = \{-1, 1\}, S = 2^{\Gamma}$; definimos $\mu : S \to \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \\ \mu(\{-1\}) &= \mu(\{1\}) = \frac{1}{2} \\ \mu(\Gamma) &= 1 \end{aligned}$$

entonces (Γ, S, μ) es un espacio de medida.

Sea $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Gamma = \Gamma^N$; i.e. el espacio de todas las sucesiones $(\varepsilon_n)_n$ de signos $\varepsilon_n = \pm 1$.

Sea $\hat{S}$ la σ-álgebra generada por los conjuntos $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \subset \Omega$, donde $A_i \subset \Gamma$ y $A_i = \Gamma$ para todo i excepto para un número finito de valores de i. Se denota $\hat{S} = \prod_{i=1}^{\infty} S$, la σ-álgebra producto generada.

Entonces existe una única medida ν definida en $\hat{S}$ con la propiedad que, para todo conjunto medible E de la forma $A_1 \times \ldots \times A_n \times \Gamma \times \Gamma \ldots$, (ver [Ha;pag. 157])

$$\begin{aligned} \nu(E) &= (\mu \times \ldots \times \mu)(A_1 \times \ldots \times A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mu(A_i) \end{aligned}$$

Se denota $\nu = \prod_{i=1}^{\infty} \mu$.

Entonces $\left(\Omega, \hat{S}, \nu\right)$ es un espacio de probabilidad.

Definimos una función $f : \Omega \to X$ de la siguiente manera:

$$f\left((\varepsilon_n)_n\right) = w\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k y_k;$$

La existencia del límite débil se justifica a continuación:

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, entonces cualquier subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es w-convergente.

Tomemos $(\varepsilon_n)_n \in \Omega$. Sea $A = \{n \in N | \varepsilon_n = 1\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n y_n = \sum_{n \in A} y_n - \sum_{n \in A^c} y_n.$$

Dado que $\sum_{n \in A} y_n$, $\sum_{n \in A^c} y_n$ son w-convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n y_n$ es w-convergente.
Así, $f : \Omega \to X$ es una función bien definida.

Sea $x^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned} x^* f(\varepsilon_n)_n &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x^* y_k \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} x^* y_k P_k (\varepsilon_n)_n \end{aligned}$$

para todo $(\varepsilon_n)_n \in \Omega$.

Donde $P_k : \Omega \to \{-1, 1\}$ es la k-ésima proyección, i.e $P_k (\varepsilon_n)_n = \varepsilon_k$. Claramente las proyecciones son μ-medibles, por lo que se sigue que $x^* f$ es el límite de funciones μ-medibles y por tanto es μ-medible.

Como $x^* \in X^*$ fue arbitrario, entonces $f : \Omega \to X$ es débilmente μ-medible.

Además $f(\Omega) \subset \overline{\langle y_1, y_2, \ldots \rangle}^w = \overline{\langle y_1, y_2, \ldots \rangle}$. Dado que $\overline{\langle y_1, y_2, \ldots \rangle}$ es se-parable se sigue que $f(\Omega)$ es separable. Por tanto $f : \Omega \to X$ es μ-medible. (Teorema 4.1.1)

Sea $K = \left\{ \sum\limits_{k \in \Delta} \varepsilon_k y_k | \Delta \subset N \text{ finito}, \varepsilon_k = \pm 1 \text{ para cada } k \in \Delta \right\}$, entonces $f(\Omega) \subset \overline{K^w}$.

Supongamos por un momento que K es un conjunto acotado, es decir existe $M > 0$ tal que $K \subset MB_X$; entonces $\overline{K^w} \subset \overline{MB_X^w} = M\overline{B_X^w} = MB_X$. De lo anterior se sigue que $f(\Omega)$ es un conjunto acotado.

Así,

$$\int\limits_{\Omega} \|f\| \, d\nu \leq M\nu(\Omega) = M < \infty$$

Entonces $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable. (Teorema 4.1.2)

Enseguida probaremos que en realidad K es un conjunto w-acotado, lo cual implica que es acotado.

Sea $x_0^* \in X^*$ arbitrario.

Escojamos $(\varepsilon_n)_n \in \Omega$ de tal manera que $|x_0^* y_n| = \varepsilon_n x_0^* y_n$ para todo $n \in N$.

Dado que $w\text{-}\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k y_k$ existe para cada $(\varepsilon_n)_n \in \Omega$, entonces existe $x \in X$ tal que

$$x^* x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x^* y_k$$

para todo $x^* \in X^*$, en particular $x_0^* x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_0^* y_k|$.

Así,

$$\left| x_0^* \left(\sum_{k \in \Delta} \varepsilon_k y_k \right) \right| \leq \sum_{k \in \Delta} |x_0^* y_k| \leq x_0^* x < \infty$$

lo anterior es válido para todo $\Delta \subset N$ finito, $\varepsilon_k = \pm 1$ para cada $k \in \Delta$.

Se sigue entonces que K es un conjunto w-acotado.

Sea $E_k = \{(\varepsilon_n)_n \in \Omega | \varepsilon_k = 1\}$, entonces $E_k \in \hat{S}$ y:

$$
\begin{aligned}
x^* \int\limits_{E_k} f d\nu &= \int\limits_{E_k} x^* f d\nu \text{ (lema 4.1.2)} \\
&= \int\limits_{E_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^* y_n \right) d\nu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} \varepsilon_n x^* y_n d\nu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^* y_n \int\limits_{E_k} \varepsilon_n d\nu
\end{aligned}
$$

Sin embargo,

$$
\int\limits_{E_k} \varepsilon_n d\nu = \int\limits_{E_n \cap E_k} d\nu - \int\limits_{E_n^c \cap E_k} d\nu = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = 0 \text{ si } n \neq k
$$

$$
\int\limits_{E_k} \varepsilon_k d\nu = \nu\left(E_k\right) = \mu\left(\{1\}\right) = \tfrac{1}{2}
$$

Por tanto, $x^* \int\limits_{E_k} f d\nu = \frac{1}{2} x^* y_k$ para cada $x^* \in X^*$. Así, $\int\limits_{E_k} f d\nu = \frac{1}{2} y_k$.

Sabemos que $\left\{ 2 \int\limits_{E} f d\nu | E \in \hat{S} \right\}$ es un conjunto relativamente compacto (lema 4.1.3) y $(y_n) \subset \left\{ 2 \int\limits_{E} f d\nu | E \in \hat{S} \right\}$.

Se sigue que (y_n) contiene una subsucesión $\left(y_{n_j}\right)$ que converge en norma. Dado que $w\text{-}\lim\limits_{n} y_n = 0$ entonces $w\text{-}\lim\limits_{j} y_{n_j} = 0$, tambien lo anterior implica necesariamente que $\lim\limits_{j} y_{n_j} = 0$. Pero esto es una contradicción ya que $\|y_n\| \geq \varepsilon > 0$ para todo $n \in N$. $\square$

4.3 Otra aplicación de la integral de Bochner.

La presente sección presenta otra aplicación de la integral de Bochner,para obtener un teorema de *Krein-Šmulian: el casco cerrado convexo de un subconjunto w-compacto en un espacio de Banach es w-compacto.*

Primero tenemos un lema preparatorio:

Lema 4.3.1 *Sea X un espacio de Banach separable.Si K es w-compacto y μ es una medida de Borel regular definida en (K,w), entonces la función $\varphi : K \to X$ dada por $\varphi(k) = k$ es Bochner integrable.*

Prueba:

Dado que la función φ es w-w continua,se sigue que la función $x^*\varphi$ es w-continua para cada $x^* \in X^*$.Así,$x^*\varphi$ es μ-medible para cada $x^* \in X^*$,i.e φ es débilmente μ-medible.

Además,dado que $\varphi(K) = K$ es separable,entonces φ es μ-medible.(Teorema 4.1.1)

Como K es w-compacto,en particular es acotado (Teorema 2.2.5),entonces existe $M > 0$ tal que $\|\varphi(k)\| \leq M$ para todo $k \in K$,así:

$$\int_K \|\varphi(k)\| \, d\mu \leq M\mu(K) < \infty$$

Se sigue que φ es Bochner integrable.(Teorema 4.1.2)□

Teorema 4.3.1 *(Krein-Šmulian, 1940)* ***Sea X un espacio de Banach. Si $K \subset X$ es w-compacto, entonces $\overline{co}K$ es w-compacto.***

Prueba:

Supongamos primero que X es separable.

Por el teorema anterior,tiene sentido hablar de la integral $\int_K \varphi d\mu$ para toda medida de Borel regular μ definida en (K, w) .

Recordamos en este punto que $C(K, w)^*$ es isométricamente isomorfo al espacio de todas las medidas de Borel regulares definidas en (K, w) .(Teorema de representación de Riesz,ver [Ru1;pag. 130]).

Consideremos el operador $I_\varphi : C(K, w)^* \to X$ definido por:

$$I_\varphi(\mu) = \int_K \varphi d\mu$$

entonces I_φ es lineal y está bien definido.Afirmamos que I_φ es w^*-w continuo.

Sea $(f_d^*) \subset C(K, w)^*$ una red tal que $w^*\text{-}\lim\limits_d f_d^* = 0$,i.e $\lim\limits_d f_d^* f = 0$ para todo $f \in C(K, w)$ y se quiere mostrar que $w\text{-}\lim\limits_d I_\varphi(f_d^*) = 0$, i.e $\lim\limits_d x^* I_\varphi(f_d^*) = 0$ para todo $x^* \in X^*$.

Dado que $(f_d^*) \subset C(K, w)^*$ existe una red (μ_d) (donde μ_d es una medida de Borel regular definida en (K, w)) tal que:

$$f_d^* f = \int_K f d\mu_d \text{ para todo } f \in C(K, w) \tag{4.3.3}$$

Por otro lado,$I_\varphi(f_d^*) = \int_K \varphi d\mu_d$,$d \in D$ implica

$$x^* I_\varphi(f_d^*) = x^* \int_K \varphi d\mu_d = \int_K x^* \varphi d\mu_d \text{ para todo } x^* \in X^*$$

Dado que $x^*\varphi \in C(K,w)$ para cada $x^* \in X^*$,entonces por 4.3.3 se sigue que

$$\lim_d x^* I_\varphi(f_d^*) = \lim_d \int_K x^*\varphi d\mu_d = 0 \text{ para todo } x^* \in X^*$$

Así,I_φ es w^*-w continuo.

Por el teorema de Alaoglu $B_{C(K,w)^*}$ es w^*-compacto,entonces $I_\varphi\left(B_{C(K,w)^*}\right)$ es w-compacto.

El último paso es mostrar que $coK \subset I_\varphi\left(B_{C(K,w)^*}\right)$.

Sea $k \in coK$,entonces existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in R; k_1,\ldots,k_n \in K$ tal que $\alpha_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ y $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$.

Definimos una medida μ en (K,w) de la siguiente manera:$\mu(\{k_i\}) = \alpha_i$, $i = 1,\ldots,n$ y si $A \subset K$ es un conjunto de Borel,entonces

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum\limits_{k_i \in A} \mu(\{k_i\}) & \\ 0 & \text{si } A \cap \{k_1,\ldots,k_n\} = \emptyset \end{cases}$$

Claramente,μ es una medida de Borel regular definida en $B_{(K,w)}$.

Además $|\mu| = \mu(K) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(\{k_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,implica que $\mu \in B_{C(K,w)^*}$.

Así,

$$I_\varphi(\mu) = \int_K \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\{k_i\}} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i = k$$

De lo anterior se sigue que $coK \subset I_\varphi\left(B_{C(K,w)^*}\right)$,por tanto

$$\overline{co}K = \overline{co}^w K \subset \overline{I_\varphi(B)}^w = I_\varphi(B)$$

implica que $\overline{co}K$ es w-compacto.

Consideremos el caso en que X no es separable.

Si $\overline{co}K$ no es w-compacto,entonces por el teorema de Eberlein-Šmulian existe $\{x_n\}_n \subset \overline{co}K$ tal que $\overline{\{x_n\}_n}^w$ no es w-compacto.

Para cada n,existe $(y_m^n)_m \subset coK$ tal que $x_n = \lim\limits_m y_m^n$.A su vez existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \in R$, $k_1^m,\ldots,k_s^m \in K$ tal que $\alpha_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$ y $y_m^n = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i k_i^m$.

Sea Y el subespacio generado por la unión de los conjuntos $\{k_i^m\}$ para cada n.Entonces $\overline{Y}$ es un espacio de Banach separable.

Por hipótesis K es w-compacto,entonces $\overline{Y} \cap K = \overline{Y}^w \cap K \subset K$ es w-compacto.Por la construcción del subespacio Y tenemos que $\{x_n\} \subset \overline{co}\left(\overline{Y} \cap K\right)$. Del caso separable se sigue que $\overline{co}\left(\overline{Y} \cap K\right)$ es w-compacto.Llegamos así a una contradicción ya que $\overline{\{x_n\}}^w$ no es w-compacto.$\square$

CAPITULO 5

Sucesiones básicas.

Definición 5.0.1 *Sea X un espacio de Banach, una sucesión $(x_n) \subset X$ es llamada una **base de Schauder** para X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión (α_n) de escalares tal que*

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

Observación 5.0.1 *Si (x_n) es una base de Schauder entonces $0 \notin \{x_n\}$, y de hecho $\{x_n\}$ es una familia de vectores linealmente independiente. Esto es claro, ya que si para algún $x_m \in \{x_n\}$ tenemos que*

$$x_m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n_i} \ ,x_{n_i} \in \{x_n\} \ \ i = 1, \ldots, k$$

entonces tendriamos dos representaciones del vector nulo.

Observación 5.0.2 *Un espacio de Banach con una base de Schauder siempre es separable. Así, $L^\infty(\Omega, S, \mu)$ no puede tener una base de Schauder si S no es finita.*

Ejemplos Bases de Schauder.

1) Sea $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$. Afirmamos que la sucesión $(e_n)_n$de vectores unitarios

$$e_n = \left(0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n-\text{ésimo lugar}}, 0, \ldots \right)$$

es una base para l_p.

Sea $x \in l_p$ arbitrario, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p \text{ si } n \geq N.$$

Así,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_p^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p \text{ si } n \geq N.$$

Lo anterior implica que $\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x$ en l_p.

Claramente, la representación es única por lo que se sigue que $(e_n)_n$ es una base de Schauder para l_p.

2) Si $X = c_0$, entonces $(e_n)_n$ también es una base de Schauder para c_0.

Sea $x \in c_0$ arbitrario, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que $|x_{n+1}| < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Así,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_\infty = \sup_{i \geq n+1} |x_i| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N,$$

de donde se sigue que $\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x$ en c_0. Nuevamente, la representación es única.

3) Si $X = c$, entonces $\{\bar{1}, e_1, e_2, \ldots\}$ es una base para c, donde $\bar{1} = (1, 1, 1, \ldots)$.

Sea $x = (x_1, x_2 \ldots)$ arbitrario. Supongamos que $\lim_n x_n = \alpha$, entonces $x - \alpha\bar{1} \in c_0$.Por el caso anterior tenemos que:

$$x - \alpha\bar{1} = \lim_n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha) e_i$$

respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Así,

$$x = \alpha\bar{1} + \lim_n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha) e_i \text{ en } c$$

y la representación es única.

4) En espacios vectoriales normados de dimensión finita toda base de Hamel es una base de Schauder.

5) En espacios de Hilbert separables siempre existe al menos una base de Schauder, a saber, cualquier conjunto ortonormal completo es una base de Schauder.

Definición 5.0.2 *Una sucesión $(x_n) \subset X$ es llamada una* ***sucesión básica****, si es una base de Schauder para el espacio vectorial cerrado $\overline{\langle x_n \rangle}$.*

Definición 5.0.3 *Sea X un espacio de Banach. Si (x_n) es una base de Schauder para X, entonces definimos los* ***funcionales-proyección***

$x_k^* : X \to K$ $k = 1, \ldots$ como sigue:

$$x_k^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right) = \alpha_k$$

Lema 5.0.2 *Los funcionales-proyección son continuos para cada $k \in N$.*

Prueba:

Sea $S = \left\{ (s_n) \subset K^N | \lim_n \sum_{k=1}^{n} s_k x_k \text{ existe en } X \right\}$. Claramente S es un espacio vectorial.

Definimos $|||(s_n)||| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} s_k x_k \right\|$.

Afirmamos que la función $|||\cdot|||$ es una norma en S:

i) $(s_n) = (0)_n$ implica que $|||(s_n)||| = 0$.

Si $|||(s_n)||| = 0$, entonces $\left\| \sum_{k=1}^{n} s_k x_k \right\| = 0$ para todo $n \in N$, por tanto $\sum_{k=1}^{n} s_k x_k = 0$ para todo $n \in N$. Dado que la sucesión de vectores (x_n) es linealmente independiente se sigue que $s_n = 0$ para todo $n \in N$.

ii) $|||(\lambda s_n)||| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda s_k x_k \right\| = |\lambda| \, |||(s_n)|||$.

iii)

$$\begin{aligned} |||(s_n) + (t_n)||| &= \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} (s_k + t_k) x_k \right\| \\ &\leq \sup_n \left(\left\| \sum_{k=1}^{n} s_k x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \right) \\ &\leq |||(s_n)||| + |||(t_n)||| \end{aligned}$$

Definimos el operador $B : (S, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ como sigue:

$$B(s_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} s_k x_k$$

Por ser (x_n) una base de Schauder, entonces B es un operador lineal suprayectivo; de la unicidad de la representación de cada $x \in X$ respecto a la base (x_n), se sigue que B es un operador inyectivo.

Afirmamos que B es un isomorfismo. (i.e. un operador lineal bicontinuo).

Claramente $\|B(s_n)\| \leq |||(s_n)|||$, lo cual implica que B es un operador continuo, de hecho $\|B\| \leq 1$.

Por el teorema de la función abierta es suficiente comprobar que $(S, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

Sea $(y_p) = \left((s_{p_i})_i\right)$ una sucesión de Cauchy en S. Así,

$$\begin{aligned}
|s_{p_i} - s_{q_i}| \, \|x_i\| &= \left\| \sum_{k=1}^{i} \left(s_{p_k} - s_{q_k}\right) x_k - \sum_{k=1}^{i-1} \left(s_{p_k} - s_{q_k}\right) x_k \right\| \\
&\leq 2 \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (s_{p_i} - s_{q_i}) x_i \right\| \\
&= 2 \, |||y_p - y_q|||
\end{aligned}$$

lo que implica que $(s_{p_i})_p$ converge para cada $i \in N$. Sea $s_i = \lim_p s_{p_i}$ y consi-deremos la sucesión (s_i).

Sea $\varepsilon > 0$ dado, entonces existe $r = r_\varepsilon \in N$ tal que $|||y_p - y_r||| < \varepsilon$ si $p \geq r$. De la definición de la norma $|||\cdot|||$, se sigue que $\left\| \sum_{i=1}^{n} (s_{p_i} - s_{r_i}) x_i \right\| < \varepsilon$ para todo $n \in N$, siempre que $p \geq r$. Por tanto $\left\| \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{r_i}) x_i \right\| < \varepsilon$ para todo $n \in N$.

Dado que $y_r = (s_{r_i}) \in S$, entonces existe $n_\varepsilon \in N$, tal que siempre que $m > n \geq n_\varepsilon$ entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} s_{r_i} x_i - \sum_{i=1}^{n} s_{r_i} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} s_{r_i} x_i \right\| < \varepsilon$$

Entonces se sigue que para $m > n \geq n_\varepsilon$,

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{m} s_i x_i \right\| < 3\varepsilon$$

Esto es claro ya que:

$$\sum_{i=n+1}^{m} s_i x_i = \sum_{i=n+1}^{m} s_i x_i - \sum_{i=n+1}^{m} s_{r_i} x_i + \sum_{i=n+1}^{m} s_{r_i} x_i + \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{r_i}) x_i - \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{r_i}) x_i$$

por tanto $s = (s_i) \in S$ y $|||s - s_r||| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (s - s_{r_i}) x_i \right\| \leq \varepsilon$.

Así, $B : (S, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ es un isomorfismo, luego

$$\begin{aligned}
|\alpha_k| \, \|x_k\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i \right\| \\
&\leq 2 \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| = 2 \, |||(\alpha_i)||| \\
&\leq 2 \left\| B^{-1} \right\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|
\end{aligned}$$

Concluimos que $|x_k^* x| = |\alpha_k| \leq 2\frac{\|B^{-1}\|}{\|x_k\|}\|x\|$,para todo $x \in X$, y para cada $k \in N$, lo anterior implica que los funcionales-proyección son continuos como se afirmó.□

El siguiente teorema es un importante criterio que permite identificar sucesiones básicas.

Teorema 5.0.2 ***Sea*** (x_n) ***una sucesión de vectores distintos de cero en el espacio de Banach*** X***.Entonces*** (x_n) ***es una sucesión básica si y sólo si existe*** $M > 0$ ***tal que para cualquier sucesión de escalares*** $(a_i) \subset K$ ***y cualesquiera enteros*** $m < n$ ***tenemos***

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

Prueba:

Necesidad.

Supongamos que (x_n) es una sucesión básica, i.e es una base de Schauder para el espacio vectorial cerrado $\overline{\langle x_n \rangle}$ que genera; definamos el operador $P_k : \overline{\langle x_n \rangle} \to \overline{\langle x_n \rangle}$, para cada $k \in N$ como sigue:

$$P_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{k} a_n x_n = \sum_{n=1}^{k} x_n^*(x)\, x_n$$

Los funcionales-proyección x_n^* son continuos para todo $n \in N$,de donde se sigue que

$$\|P_k x\| \leq \left(\sum_{n=1}^{k} \|x_n^*\| \, \|x_n\|\right) \|x\|$$

por tanto P_k es un operador lineal acotado para cada $k \in N$.

Para cualquier $x \in \overline{\langle x_n \rangle}$ tenemos que $\lim_k P_k x = x$. Del teorema de *Banach-Steinhaus* se sigue que $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

Así, si $m < n$ entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right\| &= \left\|P_m \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\| \\
&= \left\|P_m \sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \\
&\leq \|P_m\| \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \\
&\leq \sup_n \|P_n\| \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|
\end{aligned}$$

Entonces $M = \sup_n \|P_n\|$, (M es llamada una **constante básica**.)

Suficiencia.

Sea $x \in \overline{\langle x_n \rangle}$. Si $x \in \langle x_n \rangle$, entonces x es claramente representable, de hecho es una suma finita.

Nuevamente definimos operadores $P_m : \langle x_n \rangle \to \langle x_n \rangle$, para cada $m \in N$, de la siguiente manera:

$$P_m \left(\sum\nolimits' a_i x_i \right) = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$$

donde $\sum'$ indica que $a_i = 0$ para todo $i \in N$ excepto para un número finito de índices.

La condición de que siempre que $m < n$ se cumple:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

para cualesquiera escalares a_i, implica que los operadores lineales P_m son acotados; a saber:

$$\left\| P_m \left(\sum\nolimits' a_i x_i \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \right\| \leq M \left\| \sum\nolimits' a_i x_i \right\|$$

de hecho, $\|P_m\| \leq M$ para todo $m \in N$.

Definimos nuevos operadores lineales sobre $\overline{\langle x_n \rangle}$ (que extienden a los anteriores) y que seguiremos denotando por P_m,de la siguiente manera:

Si $x \in \overline{\langle x_n \rangle}$, entonces existe $(y_n) \subset \langle x_n \rangle$ tal que $x = \lim_n y_n$ y por tanto ponemos

$$P_m x = \lim_n P_m y_n$$

Claramente P_m esta bien definido. ($\|P_m y_n - P_m y_s\| \leq \|P_m\| \|y_n - y_s\|$)

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \|P_m x\| &= \lim_n \|P_m y_n\| \\ &\leq M \lim_n \|y_n\| = M \|x\| \end{aligned}$$

lo cual implica que los operadores lineales P_m son acotados, de hecho también $\|P_m\| \leq M$ para todo $m \in N$.

Consideremos los funcionales-proyección $x_k^* : \langle x_n \rangle \to K$ dados por

$$x_k^* \left(\sum\nolimits' a_i x_i \right) = a_k$$

entonces

$$\begin{aligned} \|x_k\| \, |a_k| = \|a_k x_k\| &= \left\| P_k \sum' a_i x_i - P_{k-1} \sum' a_i x_i \right\| \\ &\leq 2M \left\| \sum' a_i x_i \right\| \end{aligned}$$

implica que $\left| x_k^* \left(\sum' a_i x_i \right) \right| \leq \frac{2M}{\|x_k\|} \left\| \sum' a_i x_i \right\|$, es decir,$x_k^*$ es continuo para todo $k \in N$.

Los funcionales x_k^* tienen extensión única a $\overline{\langle x_n \rangle}$ dada por

$$x_k^* (x) \, x_k = P_k x - P_{k-1} x$$

para $k > 1$, y $x_1^* (x) \, x_1 = P_1 x$.

Sea $x \in \overline{\langle x_n \rangle}$ y $\varepsilon > 0$ dado, entonces esiste $\sigma \in \left\langle x_1, \ldots, x_{n(\varepsilon)} \right\rangle$ para algún $n (\varepsilon) \in N$ tal que $\|x - \sigma\| < \varepsilon$.

Si $n \geq n (\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} \|x - P_n x\| &\leq \|x - \sigma\| + \|\sigma - P_n \sigma\| + \|P_n \sigma - P_n x\| \\ &\leq \|x - \sigma\| + \|\sigma - \sigma\| + \|P_n (\sigma - x)\| \\ &\leq (1 + M) \, \varepsilon \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} x = \lim_n P_n x &= \lim_n \left[P_1 x + \sum_{k=2}^{n} (P_k x - P_{k-1} x) \right] \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k^* (x) \, x_k \end{aligned}$$

Resta probar que la representación es única.

Supongamos que para algún $x \in \overline{\langle x_n \rangle}$ tenemos que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$.

Utilizando la hipótesis tenemos

$$|a_1 - b_1| \, \|x_1\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) \, x_i \right\| = 0$$

Como $\|x_1\| \neq 0$ se sigue que $a_1 = b_1$.

Supongamos que $a_i = b_i$ para $1 \leq i \leq m$, mostraremos que $a_{m+1} = b_{m+1}$.

$$|a_{m+1} - b_{m+1}| \, \|x_{m+1}\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) \, x_i \right\| = 0$$

Como $\|x_{m+1}\| \neq 0$ se sigue que $a_{m+1} = b_{m+1}$.

Por tanto, $a_i = b_i$ para todo $i \in N$. $\square$

Usamos el criterio recién probado para construir una base para $L_p[0,1)$.

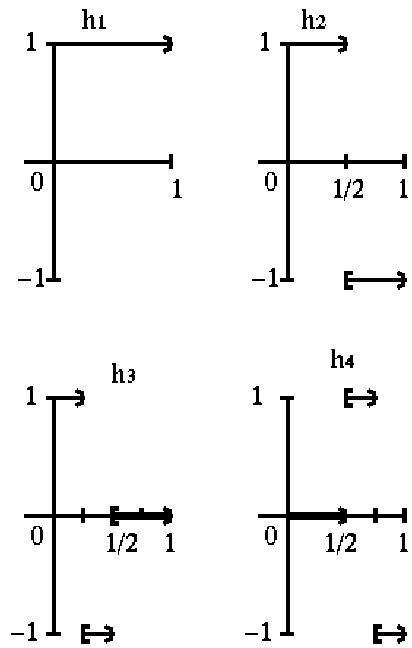

Figura 5.1:

Ejemplo. Sea $X = L_p[0,1), 1 \leq p < \infty$.En $L_p[0,1)$ hay una base natural,llamada la **base de Haar.**

Definimos las funciones de Haar como sigue (ver Figura 5.1):

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= 1 \qquad t \in [0,1) \\
h_2(t) &= 1 \qquad t \in [0,\tfrac{1}{2}) \\
&= -1 \qquad t \in [\tfrac{1}{2},1) \\
h_3(t) &= 1 \qquad t \in [0,\tfrac{1}{4}) \\
&= -1 \qquad t \in [\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}) \\
&= 0 \qquad t \in [\tfrac{1}{2},1) \\
h_4(t) &= 1 \qquad t \in [\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}) \\
&= -1 \qquad t \in [\tfrac{3}{4},1) \\
&= 0 \qquad t \in [0,\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

En general, si $m \geq 1$ y $1 \leq i \leq 2^m$, entonces h_{2^m+i} esta dada por:

$$h_{2^m+i} = \chi_{[\frac{2i-2}{2^{m+1}},\frac{2i-1}{2^{m+1}})}(t) - \chi_{[\frac{2i-1}{2^{m+1}},\frac{2i}{2^{m+1}})}(t)$$

Claramente $h_n \neq 0$, $n \in N$.

Sean $f=\sum\limits_{j=1}^{n}a_jh_j, g=\sum\limits_{j=1}^{n+1}a_jh_j$. Claramente $g=f+a_{n+1}h_{n+1}$.

Supongamos que $n+1=2^m+i$ para algún $m\geq 1$ y $1\leq i\leq 2^m$, entonces f y g son iguales excepto en el intervalo diádico $[\frac{2i-2}{2^{m+1}},\frac{2i}{2^{m+1}})$. En este intervalo f es constante. Sea b dicha constante.

Así, $g=b+a_{n+1}$ en $I_1=[\frac{2i-2}{2^{m+1}},\frac{2i-1}{2^{m+1}})$ y $g=b-a_{n+1}$ en $I_2=[\frac{2i-1}{2^{m+1}},\frac{2i}{2^{m+1}})$.

Dado que $p\geq 1$, es fácil comprobar que $|1+t|^p+|1-t|^p\geq 2$ para todo $t\in R$, lo cual implica que

$$|b+a_{n+1}|^p+|b-a_{n+1}|^p\geq 2\,|b|^p \text{ con } t=\frac{a_{n+1}}{b} \tag{5.0.1}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int\limits_{[0,1)}|f|^p\,d\lambda\\
&= \int\limits_{[0,1)\setminus(I_1\cup I_2)}|f|^p\,d\lambda+\int\limits_{I_1}|f|^p\,d\lambda+\int\limits_{I_2}|f|^p\,d\lambda\\
&= \int\limits_{[0,1)\setminus(I_1\cup I_2)}|g|^p\,d\lambda+\tfrac{2}{2^{m+1}}\,|b|^p\\
&\leq \int\limits_{[0,1)\setminus(I_1\cup I_2)}|g|^p\,d\lambda+\int\limits_{I_1}|g|^p\,d\lambda+\int\limits_{I_2}|g|^p\,d\lambda \text{ (por 5.0.1)}\\
&= \|g\|_p^p
\end{aligned}$$

De todo lo anterior se sigue que $\left\|\sum\limits_{j=1}^{n}a_jh_j\right\|\leq\left\|\sum\limits_{j=1}^{n+1}a_jh_j\right\|$ y por inducción

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}a_jh_j\right\|\leq\left\|\sum_{j=1}^{m}a_jh_j\right\| \text{ para todo } n<m$$

para cualesquiera $a_j\in R$ y cualesquiera enteros $n<m$. Del teorema anterior se sigue que $(h_n)_n$ es una base para $\overline{\langle h_n\rangle}$. Afirmamos que $L^p[0,1)=\overline{\langle h_n\rangle}$.

Sea $f\in L^p[0,1)$ arbitrario, entonces existe una función simple s tal que $\|f-s\|_p<\varepsilon$.

Supongamos que $s=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$; donde $E_i\in B_{[0,1)}$, $E_i\cap E_j=\emptyset$ $i\neq j$ y $[0,1)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$.

Es un hecho conocido que los intervalos diádicos generan la σ-álgebra de Borel en $[0,1)$, entonces para cada i existe una unión finita disjunta $D_i=\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}D_j$ de diádicos tal que:

$$\lambda\left(E_i \triangle D_i\right)=\int\limits_{[0,1)}\left|\chi_{E_i}-\sum_{j=1}^{n}\chi_{E_j}\right|^p d\lambda<\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^p$$

Así, $\left\|s-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{D_i}\right\|_p=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\left\|\chi_{E_i}-\chi_{D_i}\right\|_p<M\varepsilon$,donde $M=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{|a_i|\}$.

Por tanto $\left\|f-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{D_i}\right\|_p<(M+1)\,\varepsilon.$

Ahora solo resta escribir a χ_D,con D diádico, como combinación lineal de funciones h_n.

Definamos $D_i^n=[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})\ i=1,2,\ldots,2^n$.

Entonces,

$$\chi_{D_1^1}(t)=\chi_{[0,\frac{1}{2})}(t)=\frac{1}{2}\left(h_1(t)+h_2(t)\right)$$

$$\chi_{D_2^1}(t)=\chi_{[\frac{1}{2},1)}(t)=\frac{1}{2}\left(h_1(t)-h_2(t)\right)$$

Sea $n\in N$ fijo y supongamos que hemos escrito $\chi_{D_i^n}\ i=1,2,\ldots,2^n$ como combinación lineal de funciones h_j.

Mostraremos que $\chi_{D_i^{n+1}}\ i=1,2,\ldots,2^{n+1}$ puede escribirse como combinación lineal de funciones h_j.

Notamos lo siguiente: $D_i^n=D_{2i-1}^{n+1}\cup D_{2i}^{n+1}\ i=1,2,\ldots,2^n$, entonces

$$\chi_{D_{2i-1}^{n+1}}(t)=\frac{1}{2}\left(\chi_{D_i^n}(t)+h_{2^n+i}(t)\right)$$

$$\chi_{D_{2i}^{n+1}}(t)=\frac{1}{2}\left(\chi_{D_i^n}(t)-h_{2^n+i}(t)\right)$$

$i=1,2,\ldots,2^n$.

El resultado se sigue por inducción.□

Usaremos el teorema 5.0.2 para probar que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene un subespacio de dimensión infinita con una base.El resultado es obra de Bessaga-Pelczynski y fue probado en 1958.

Lema 5.0.3 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $F\subset X$ es un subespacio de dimensión finita y $\varepsilon>0$, entonces existe $x\in X$ tal que $\|x\|=1$ y $\|y\|\leq(1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|$ para todo $y\in F$ y para todo $\lambda\in K$.*

Prueba:

Sin perdida de generalidad supondremos que $\varepsilon < 1$.Dado que S_F es compacto entonces existe $\{y_1, \ldots, y_k\}$ una $\frac{\varepsilon}{2}$-red para S_F. Por el teorema de *Hahn-Banach* existen $y_1^*, \ldots, y_k^* \in S_{X^*}$ tal que $y_i^* y_i = 1$ $i = 1, \ldots, k$.

Sea $x \in S_X$ tal que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker y_i^*$.

Si $y \in S_F$ entonces existe y_i tal que $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos $\lambda \in K$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} \|y + \lambda x\| &\geq \|y_i + \lambda x\| - \|y - y_i\| \\ &\geq \|y_i + \lambda x\| - \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\geq |y_i^* (y_i + \lambda x)| - \tfrac{\varepsilon}{2} = 1 - \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Pero $\varepsilon < 1$ implica que $1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$.

Así, $1 \leq (1 + \varepsilon) \|y + \lambda x\|$ para todo $y \in S_F$.

Sea $y \in F$, entonces $1 \leq (1 + \varepsilon) \left\| \frac{y}{\|y\|} + \lambda x \right\|$, lo cual implica

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon) \|y + \|y\| \lambda x\|$$

□

Corolario 5.0.1 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita.Entonces X contiene un subespacio lineal cerrado de dimensión infinita con una base de Schauder.*

Prueba:

Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos una sucesión (ε_n) de números positivos tal que $\prod_{n \in N} (1 + \varepsilon_n) \leq 1 + \varepsilon$. (Claramente posible).

Tomemos $x_1 \in S_X$.

Por el lema anterior existe $x_2 \in S_X$ tal que $\|x\| \leq (1 + \varepsilon_1) \|x + \lambda x_2\|$ para todo múltiplo escalar x de x_1 y para todo escalar λ.

Ponemos ahora $F = \langle x_1, x_2 \rangle$. Aplicando nuevamente el lema anterior, obtenemos $x_3 \in S_X$ tal que

$$\|x\| \leq (1 + \varepsilon_2) \|x + \lambda x_3\|$$

para todo $x \in F$ y para todo escalar λ..

Ponemos ahora $F = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ y repetimos el proceso anterior.

Afirmamos que la sucesión así generada es una base y con una constante básica que es menor o igual a $1+\varepsilon$.

Si $m, n \in N$ son tales que $m < n$ entonces:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| &\leq (1+\varepsilon_m)\left\|\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i\right\| \\ &\leq \prod_{i=m}^{n-1}(1+\varepsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \\ &\leq \prod_{n\in N}(1+\varepsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \\ &\leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\end{aligned}$$

La conclusion se sigue del teorema 5.0.2.□

Teorema 5.0.3 *(Principio de Selección de Bessaga-Pelczynski, 1958)* ***Sea*** X ***un espacio de Banach. Sea*** $(x_n) \subset S_X$ ***tal que*** $w\text{-}\lim_n x_n = 0$***. Entonces*** (x_n) ***tiene una subsucesión básica.***

Prueba:

Sea $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números positivos tal que $\varepsilon_n < 1$ para todo $n \in N$ y $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 1-\varepsilon_0$.

Supongamos que $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ $n_1 < \ldots < n_k$ han sido escogidos tal que para cualesquiera escalares a_i y todo $l < k$

$$\left\|\sum_{i=1}^{l} a_i x_{n_i}\right\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon_{k-1}}\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\right\| \tag{5.0.2}$$

Sea $Y(K) = \langle x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\rangle$. Dado que la esfera unitaria $S_{Y(K)}$ es compacta, existe $\{z_1, \ldots, z_m\}$ una $\frac{\varepsilon_k}{4}$-red de $S_{Y(K)}$.

Por el teorema de Hahn-Banach existen $z_1^*, \ldots, z_m^* \in S_{X^*}$ tal que

$$z_i^* z_i = 1 > 1 - \frac{\varepsilon_k}{4} \;\; i = 1, \ldots, m$$

Por hipótesis $\lim_n x^* x_n = 0$ para todo $x^* \in X^*$,entonces existe $n_{k+1} > n_k$ tal que

$$\left|z_i^* x_{n_{k+1}}\right| \leq \frac{\varepsilon_k}{4} \;\; i = 1, \ldots, m$$

Afirmamos que para cualquier $y \in S_{Y(K)}$ y cualquier escalar α

$$\left\|y + \alpha x_{n_{k+1}}\right\| \geq (1-\varepsilon_k)\|y\|$$

Caso 1) $|\alpha| < 2$

$$\begin{aligned}\left\|y + \alpha x_{n_{k+1}}\right\| &\geq \left|z_i^*\left(y + \alpha x_{n_{k+1}}\right)\right| \\ &\geq \left|z_i^* z_i\right| - \left|z_i^*\left(y - z_i\right)\right| - \left|z_i^*\left(\alpha x_{n_{k+1}}\right)\right| \\ &\geq 1 - \tfrac{\varepsilon_k}{4} - \left\|y - z_i\right\| - 2\left|z_i^* x_{n_{k+1}}\right| \\ &\geq 1 - \tfrac{\varepsilon_k}{4} - \tfrac{\varepsilon_k}{4} - 2\tfrac{\varepsilon_k}{4} = (1 - \varepsilon_k)\left\|y\right\|\end{aligned}$$

Caso 2) $|\alpha| \geq 2$

$$\left\|y + \alpha x_{n_{k+1}}\right\| \geq |\alpha| \left\|x_{n_{k+1}}\right\| - \|y\| \geq (1 - \varepsilon_k)\|y\|$$

Por tanto

$$\|y\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_k}\left\|y + \alpha x_{n_{k+1}}\right\|$$

para todo $y \in Y(K)$ y para todo escalar α.

Así, $\left\|\sum\limits_{i=1}^{l} a_i x_{n_i}\right\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon_k}\left\|\sum\limits_{i=1}^{k+1} a_i x_{n_i}\right\|$ para todo $l < k+1$ y cualesquiera escalares a_i.

Se sigue entonces que (x_{n_i}) es una sucesión básica, con constante básica menor o igual que $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\varepsilon_k} < \frac{1}{1-\varepsilon_0}$.□

Definición 5.0.4 *Sean (x_n) y (y_n) bases de los espacios vectoriales normados X y Y respectivamente.Decimos que (x_n) y (y_n) son* ***equivalentes*** *si la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ implica la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ e inversamente,donde (a_n) es una sucesión de escalares.*

Teorema 5.0.4 ***Las bases (x_n) y (y_n)son equivalentes si y sólo si hay un isomorfismo entre X y Y que lleva cada x_n en y_n.***

Prueba:

Necesidad.

Definimos el operador lineal $T : X \to Y$ de la siguiente manera:

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

Dado que (x_n) y (y_n) son bases de X y Y respectivamente, entonces T esta bien definido y es un operador biyectivo.

Afirmamos que T tiene gráfica cerrada.

Sean $(w_m) \subset X$, $w \in X$ y $z \in Y$ tal que $\lim_m w_m = w$ y $\lim_m Tw_m = z$, queremos probar que $Tw = z$.

Si $w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w) x_n$ y $w_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w_m) x_n$, entonces

$$\lim_m a_n(w_m) = \lim_m x_n^* w_m = x_n^* w = a_n(w) \tag{5.0.3}$$

para todo $n \in N$.

Por la definición del operador T tenemos que

$$Tw_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w_m) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(Tw_m) y_n$$

y por ser (y_n) una base $z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(z) y_n$, entonces

$$\lim_m a_n(w_m) = \lim_m y_n^*(Tw_m) = y_n^* z = b_n(z)$$

para todo $n \in N$.

De 5.0.3 se sigue que $a_n(w) = b_n(z)$ para todo $n \in N$, es decir $Tw = z$.

Por el teorema de la gráfica cerrada se concluye que $T : X \to Y$ es continuo, análogamente el operador inverso es acotado.

Suficiencia.

Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo de X sobre Y, entonces existen $M_1, M_2 > 0$ tal que

$$M_1 \|x\| \leq \|Tx\| \leq M_2 \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

De las desigualdades anteriores se sigue que (x_n) y (y_n)son equivalentes.□

Definición 5.0.5 *Sea X un espacio de Banach. Una serie $\sum_n x_n$, ($x_n \in X$), se dice que es w-**incondicionalmente Cauchy** (wic) si, dada cualquier permutación π de los números naturales, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}\right)$ es una sucesión w-Cauchy.*

Observación: $\sum_n x_n$ es *wic* si y sólo si $\left(\sum_{k=1}^{n} x^* x_{\pi(k)}\right)$ es una sucesión de Cauchy para cualquier permutación π y para cada $x^* \in X^*$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$ para cada $x^* \in X^*$.

Teorema 5.0.5 ***Sea $\sum\limits_n x_n$ una serie formal en un espacio de Banach X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:***

a) $\sum\limits_n x_n$ **es** *wic*.

b) Existe $c > 0$ **tal que para cualquier** $(t_n) \in l_\infty$

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \leq c \left\| (t_n) \right\|_\infty$$

c) Para cualquier $(t_n) \in c_0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ **converge.**

d) Existe $c > 0$ **tal que para cualquier subconjunto finito** $\Delta \subset N$ **y cualquier elección de rotaciones** $e^{i\theta_n}$ **tenemos**

$$\left\| \sum_{n \in \Delta} e^{i\theta_n} x_n \right\| \leq c$$

Prueba:

a)$\Longrightarrow$b) Definimos $T : X^* \to l_1$ por $Tx^* = (x^* x_n)_n$. Por hipótesis T es un operador lineal bien definido. Afirmamos que T tiene gráfica cerrada.

Sean $(x_m^*) \subset X^*$, $x^* \in X^*$ y $y \in l_1$ tal que $\lim\limits_m x_m^* = x^*$ y $\lim\limits_m T x_m^* = y$ entonces probaremos que $Tx^* = y$.

Notamos lo siguiente:

$$\left\| y - T x_m^* \right\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| y_n - x_m^* x_n \right| \geq \left| y_n - x_m^* x_n \right|$$

para todo $n \in N$, entonces

$$0 \leq \lim_m \left| y_n - x_m^* x_n \right| \leq \lim_m \left\| y - T x_m^* \right\|_{l_1} = 0$$

para todo $n \in N$, es decir $\lim\limits_m x_m^* x_n = y_n$ para todo $n \in N$.

Pero $\lim\limits_m x_m^* = x^*$, implica que $x^* x_n = y_n$ para todo $n \in N$, así $Tx^* = y$.

Por el teorema de la gráfica cerrada T es un operador acotado.

Sea $(t_n) \in B_{l_\infty}$ arbitrario y $x^* \in B_{X^*}$, entonces

$$\begin{aligned} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right) \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |t_k| \left| x^* x_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| x^* x_k \right| = \left\| T x^* \right\| \leq \|T\| \end{aligned}$$

para todo $n \in N$, por tanto,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right) \right| \leq \|T\|$$

para todo $n \in N$.

Así, $\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \leq \|T\|$.

Notamos que $(t_n) \in B_{l_\infty}$ fue arbitrario, si $(t_n) \in l_\infty$ consideramos entonces a $\frac{1}{\|t_n\|_\infty} (t_n)$.

b)$\Longrightarrow$c) Sea $(t_n) \in c_0 \subset l_\infty$, entonces para todo $n > m$

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} t_k x_k \right\| \leq c \sup_{m \leq k} |t_k| \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

así,$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \right)$ es una sucesión de Cauchy en X y por tanto converge.

c)$\Longrightarrow$d) Definimos $T : c_0 \to X$ dado por $T(t_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$. Claramente T es un operador lineal y usando la hipótesis tenemos que está bien definido. Afirmamos que T tiene gráfica cerrada:

Sean $(q_n) = ((\alpha_s^n)_s) \subset c_0$, $q = (\alpha_s)$ y $x \in X$ tal que

$$\lim_n q_n = q \quad \lim_n T q_n = x$$

Entonces

$$\|q_n - q\| = \sup_s |\alpha_s^n - \alpha_s| \geq |\alpha_s^n - \alpha_s|$$

implica que $\lim_n \alpha_s^n = \alpha_s$ para todo $s \in N$.

Por tanto,

$$x = \lim_n T q_n = \lim_n \sum_s \alpha_s^n x_s = \sum_s \alpha_s x_s = Tq.$$

Así, T es acotado y por tanto $T(B_{c_0})$ es un conjunto acotado.

En particular vectores de la forma $\sum_{n \in \Delta} e^{i\theta_n} x_n$,donde $\Delta \subset N$ es cualquier subconjunto finito, están contenidos en $T(B_{c_0})$ y por tanto se sigue el resultado.

d)$\Longrightarrow$a) Para cualquier $x^* \in B_{X^*}$ tenemos:

$$x^* \left(\sum_{n \in \Delta} e^{i\theta_n} x_n \right) = \sum_{n \in \Delta} e^{i\theta_n} x^* x_n \leq \left\| \sum_{n \in \Delta} e^{i\theta_n} x_n \right\| \leq c$$

para cualquier $\Delta \subset N$ finito y para cualquier elección de $e^{i\theta_n}$. Eligiendo rotaciones convenientemente se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$.

Para $x^* \in X^*$ arbitrario, aplicamos lo anterior a $\frac{x^*}{\|x^*\|}$; por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$, i.e. $\sum_n x_n$ es *wic*.□

Corolario 5.0.2 *Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión básica tal que $\inf_n \|x_n\| > 0$ y $\sum_n x_n$ es wic. Entonces (x_n) es equivalente a la base de vectores unitarios de* c_0.

Prueba:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ es convergente, entonces $\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right)$ es una sucesión de Cauchy en X. Dado que

$$|t_n| \, \|x_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} t_k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} t_k x_k \right\|$$

se sigue entonces $\lim_n |t_n| \, \|x_n\| = 0$.

Pero por hipótesis $\inf_n \|x_n\| > 0$, entonces $\lim_n |t_n| = 0$;así,$(t_n) \in c_0$ lo cual implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$,donde $\{e_n\}$ es la base de vectores unitarios en c_0, i.e. $e_n(i) = \delta_{in}$.

Por hipótesis (x_n) es una sucesión básica tal que $\sum_n x_n$ es *wic*, entonces por c) del teorema anterior se sigue que $\sum_n t_n x_n$ converge para cada $(t_n) \in c_0$. □

Definición 5.0.6 *Sea X un espacio de Banach.Una serie $\sum_n x_n$ se dice que es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum_n x_{\pi(n)}$ converge para cada permutación π de los numeros naturales.*

Teorema 5.0.6 ***Sea X un espacio de Banach.Cada serie que es wic es incondicionalmente convergente si y sólo si X no contiene una copia de*** c_0.

Prueba:

Necesidad.

Supongamos que X contiene una copia de c_0,es decir existe un isomorfismo de c_0 sobre $T(c_0) \subset X$.

Consideremos la serie $\sum_n e_n$, donde e_n es el n-ésimo vector unitario en c_0.

Sea $(\alpha_n)_n \in c_0^* = l_1$ arbitrario, entonces

$$\sum_n |\langle e_n, (\alpha_m)_m \rangle| = \sum_n |\alpha_n| < \infty$$

Se sigue que $\sum\limits_n e_n$ es una serie *wic*, sin embargo $\sum\limits_n e_n = (1, 1, \dots) \notin c_0$ implica que la serie $\sum\limits_n e_n$ no es incondicionalmente convergente.

Sea $(t_n) \in c_0$ arbitrario. Por ser $\sum\limits_n e_n$ una serie *wic* entonces $\sum\limits_n t_n e_n$ converge (por c) del teorema anterior, pero por ser T continuo entonces

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T e_n$$

Por tanto, $\sum\limits_n Te_n$ es *wic* en X (por c) del teorema anterior). Sin embargo $\sum\limits_n Te_n \notin X$, ya que en caso contrario tendriamos que $\sum\limits_n e_n \in c_0$. Así, $\sum\limits_n Te_n$ no es inconcidionalmente convergente. Una contradicción.

Suficiencia.

Supongamos que X admite una serie $\sum\limits_n x_n$ que es *wic* pero no incondicionalmente convergente. Entonces existe una permutación π de los numeros naturales tal que $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}\right)$ no es una sucesión de Cauchy. Por comodidad seguiremos llamando $\sum\limits_n x_n$ a la serie anterior.

Así, existe $\varepsilon > 0$ y sucesiones (p_n) , (q_n) de numeros naturales con $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots$ tal que $\left\|\sum\limits_{k=p_n}^{q_n} x_k\right\| > \varepsilon$, en particular.

$$\inf_n \left\|\sum_{k=p_n}^{q_n} x_k\right\| \geq \varepsilon > 0$$

Sea $y_n = \sum\limits_{k=p_n}^{q_n} x_k$, entonces $\inf\limits_n \|y_n\| \geq \varepsilon$. Por hipótesis $\sum\limits_n x_n$ es *wic*, lo cual implica que $\sum\limits_n |x^* x_n| < \infty$ para cada $x^* \in X^*$ lo cual implica que $w\text{-}\lim\limits_n y_n = 0$.

Sea $z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_n |x^* z_n| &= \lim_n \left|x^*\left(\tfrac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right| \\ &\leq \tfrac{1}{\varepsilon} \lim_n |x^* y_n| = 0 \end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$.

Por tanto, $w\text{-}\lim\limits_n z_n = 0$.

Por el teorema 5.0.3 la sucesión (z_n) admite una subsucesión básica. Entonces (y_n) admite una subsucesión básica y además $\inf\limits_n \|y_n\| \geq \varepsilon$ y $\sum\limits_n y_n$ *wic* implica que dicha subsucesión básica es equivalente a la base de vectores unitarios de c_0. (corolario 5.0.2).

Pero el teorema 5.0.4 afirma la existencia de un isomorfismo de c_0 en un subespacio cerrado de X. Por tanto X contiene una copia de c_0.□

Con la teoría desarrollada en este capítulo daremos otra prueba del teorema de *Orlicz-Pettis:* **Sea** $\sum_n x_n$ **una serie en** X**. Si cada subserie de la serie** $\sum_n x_n$ **es** w**-convergente, entonces cada subserie es convergente.**(Teorema 4.2.1)

Prueba:

Haremos la prueba suponiendo que X es un espacio real, no hay dificultad alguna para el caso complejo.

En el teorema se mostró, que si $\sum_n x_n$ es una serie tal que cada una de sus subseries es w-convergente entonces

$$w\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \tag{5.0.4}$$

existe para cualquier $(\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^N$.

Sea $x^* \in X^*$ arbitrario, si ponemos $\varepsilon_k = sgn\, x^* x_k$, entonces 5.0.4 implica que $\sum_k |x^* x_k| < \infty$.

Se sigue que la serie $\sum_n x_n$ es *wic*.

Supongamos que existe una subsucesión (x_{r_n}) de (x_n) tal que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{r_i}\right)_n$ no es una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y sucesiones crecientes (p_n) , (q_n) de enteros positivos con $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 \ldots$, tal que $\left\| \sum_{i=p_n}^{q_n} x_{r_i} \right\| > \varepsilon$ para todo $n \in N$.

Sea (y_n) la sucesión dada por $y_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} x_{r_i}$. Entonces $\|y_n\| \geq \varepsilon > 0$ para todo $n \in N$ y además $\sum_n y_n$ es una subserie de $\sum_n x_n$ y por tanto es w-convergente. En particular $w\text{-}\lim_n y_n = 0$ y $\inf_n \|y_n\| \geq \varepsilon$.

Entonces por el mismo argumento utilizado en el teorema anterior, existe (z_n) una subsucesión de (y_n) que es base.

Dado que $\inf_n \|z_n\| > 0$ y $\sum_n z_n$ es w-convergente (y por tanto es *wic*, por la primera parte de la prueba) se sigue que (z_n) es equivalente a la base de vectores unitarios en c_0. (Corolario 5.0.2)

Pero en seguida mostraremos que $\sum_n e_n$ no es w-convergente en c_0:

Supongamos que existe $x \in c_0$, tal que $x = w\text{-}\lim_n \sum_{i=1}^{n} e_i$, i.e. $x^* x = \sum_{i=1}^{\infty} x^* e_i$ para todo $x^* \in c_0^* = l_1$.

Dado que $(e_n) \subset l_1$ entonces

$$\langle x, e_n \rangle = x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, e_n \rangle = 1$$

para todo $n \in N$; una contradicción.$\square$

CAPITULO 6

El teorema de Dvoretsky-Rogers

Definición 6.0.7 *Sea X un espacio vectorial normado y $(x_n) \subset X$ una sucesión.*

a) La serie $\sum\limits_n x_n$ es llamada **absolutamente convergente** si $\sum\limits_n \|x_n\| < \infty$.

b) La serie $\sum\limits_n x_n$ es llamada **incondicionalmente convergente** si $\sum\limits_n x_{\pi(n)}$ converge para cada permutación $\pi : N \to N$.

El presente capítulo está motivado por el siguiente resultado.

Teorema 6.0.7 ***Sea $(x_n) \subset K$ $(= R$ ó $C)$. Entonces $\sum\limits_n x_n$ es absolutamente convergente si y solo sí es incondicionalmente convergente.***

La pregunta es entonces: ¿Tenemos el mismo resultado para espacios vectoriales normados?

El primer paso lo da el siguiente teorema y su respectivo corolario.

Teorema 6.0.8 ***X es un espacio de Banach si y sólo si para cada serie $\sum\limits_n x_n$ absolutamente convergente en X, $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ existe.*** *(i.e toda serie absolutamente sumable es sumable)*

Corolario 6.0.3 *Si X es un espacio de Banach y $\sum\limits_n x_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum\limits_n x_n$ es incondicionalmente convergente.*

Prueba:

Sea $\sum\limits_n x_n$ una serie absolutamente convergente, entonces, por el teorema 6.0.7 se sigue que $\sum\limits_n \left\| x_{\pi(n)} \right\| < \infty$ para toda permutación $\pi : N \to N$ y por tanto $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}$ existe (Teorema 6.0.8)$\square$

Así, ¿Será válido el reciproco del corolario anterior?. La respuesta es negativa cómo lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea X el espacio de Banach c_0. Sea $x_n = \frac{e_n}{n} \in c_0$ para todo $n \in N$. Entonces la serie converge incondicionalmente a la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_n \in c_0$, sin embargo $\sum\limits_n \|x_n\| = \sum\limits_n \frac{1}{n} = \infty$.

Para el caso en que X es de dimensión finita tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.0.9 ***Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita. Entonces $\sum\limits_n x_n$ es absolutamente convergente si y sólo si es incondicionalmente convergente.***

Prueba:

Basta probar el resultado para $X = R^n$ ó C^n (Teorema 1.1.1)

Necesidad

Se sigue del hecho de que R^n ó C^n son espacios de Banach junto con el corolario anterior.

Suficiencia

Si $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)}$ converge para toda permutación $\pi : N \to N$, entonces $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)}(i)$ converge para toda permutación $\pi : N \to N$, $i = 1, \ldots, n$; así $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j(i)| < \infty$ $i = 1, \ldots, n$ (Teorema 6.0.7).

Sabemos que existe $M > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq M \|x\|_1$ para todo $x \in R^n$ (C^n).

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_2 &\leq M \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_1 \\ &= M \sum_{j=1}^{\infty} \left(|x_j(1)| + \ldots + |x_j(n)|\right) < \infty \end{aligned}$$

$\square$

A continuación enunciamos el teorema de *Dvoretsky-Rogers* que da res-puesta a nuestras preguntas.

Teorema 6.0.10 *(Dvoretsky-Rogers, 1950)* ***Sea X un espacio de Banach. Toda serie incondicionalmente convergente en X es absolutamente convergente si y sólo si X es de dimensión finita.***

Corolario 6.0.4 *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe una serie incondicionalmente convergente* $\sum\limits_n x_n$ *en X tal que* $\sum\limits_n \|x_n\| = \infty$.

De hecho, se probará un resultado más general, pero para ello será necesario desarrollar la teoría de **operadores absolutamente p-sumables**.

6.1 Operadores absolutamente p-sumables.

En adelante consideraremos a X, Y espacios de Banach y $1 \leq p < \infty$.

Definición 6.1.1 *Un operador lineal acotado $T : X \to Y$ es* ***absolutamente p-sumable*** *(denotado por $T \in \Pi_p(X,Y)$) si dada cualquier sucesión $(x_n) \subset X$ tal que* $\sum\limits_n |x^* x_n|^p < \infty$ *para cada $x^* \in X^*$, tenemos que*

$\sum\limits_n \|Tx_n\|^p < \infty$.

Supongamos que $(x_n) \subset X$ satisface que $\sum\limits_n |x^* x_n|^p < \infty$ para cada $x^* \in X^*$. Definamos un operador $S : X^* \to l_p$ de la siguiente manera:

$$Sx^* = (x^* x_n)_n$$

Entonces dicho operador esta bien definido, es lineal y afirmamos que tiene gráfica cerrada:

Sean $(x_m^*) \subset X^*$, $x^* \in X^*$ y $y \in l_p$ tal que

$$\lim_m x_m^* = x^* \quad \lim_m Sx_m^* = y \tag{6.1.1}$$

entonces

$$|x_m^* x_n - y_n| \leq \left(\sum_n |x_m^* x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|Sx_m^* - y\|$$

para todo $n \in N$, lo que implica que $\lim\limits_m x_m^* x_n = y_n$ para todo $n \in N$. De 6.1.1 se sigue $x^* x_n = y_n$ para todo $n \in N$, por tanto

$$Sx^* = (x^* x_n)_n = (y_n)_n = y.$$

Así, S tiene gráfica cerrada y se sigue que S es un operador lineal acotado.

Consideremos ahora el conjunto

$$l_p^w(X) = \left\{(x_n) \subset X : \sum_n |x^* x_n|^p < \infty, \text{para todo } x^* \in X^*\right\},$$

es claro que $l_p^w(X)$ es un espacio vectorial.

Si $(x_n) \in l_p^w(X)$, entonces dicha sucesión induce un operador lineal acotado $S_{(x_n)_n}$: $X^* \to l_p$, ya mencionado antes. Definimos entonces

$$\|(x_n)\|_{l_p^w(X)} = \left\|S_{(x_n)_n}\right\|$$

Claramente $\|(x_n)\|_{l_p^w(X)} = 0$ si y sólo si $(x_n) = \overline{0}$. Del hecho de que $S_{(x_n+y_n)_n} = S_{(x_n)_n} + S_{(y_n)_n}$, $S_{(\lambda x_n)_n} = \lambda S_{(x_n)_n}$ y de que $\|\cdot\|$ es la norma de operadores lineales acotados de X^* a l_p, se sigue que $\|\cdot\|_{l_p^w(X)}$ es una norma en $l_p^w(X)$.

Análogamente definimos $l_p^{\|\cdot\|}(Y) = \left\{(y_n) \subset Y : \sum_n \|y_n\|^p < \infty\right\}$, es claro que este conjunto es un espacio vectorial.

Definimos en $l_p^{\|\cdot\|}(Y)$ la función $\|\cdot\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)}$ de la siguiente manera:

$$\|(y_n)\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)} = \left(\sum_n \|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Así, $\|\cdot\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)}$ es una norma en $l_p^{\|\cdot\|}(Y)$, (la prueba es idéntica al caso de los l_p).

Lema 6.1.1 $\left(l_p^w(X), \|\cdot\|_{l_p^w(X)}\right)$ *y* $\left(l_p^{\|\cdot\|}(Y), \|\cdot\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)}\right)$ *son espacios de Banach.*

Prueba:

Sea $(w_m) = ((x_n^m)_n) \subset l_p^w(X)$ una sucesión $\|\cdot\|_{l_p^w(X)}$-Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $P = P(\varepsilon) \in N$ tal que

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_n |x^*(x_n^m - x_n^q)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} = \|w_m - w_q\|_{l_p^w(X)} < \varepsilon \tag{6.1.2}$$

si $q > m \geq P$.

Lo anterior implica que

$$|x^*(x_n^m - x_n^q)| \leq \left(\sum_n |x^*(x_n^m - x_n^q)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

para todo $x^* \in B_{X^*}$ y para todo $n \in N$.

Así,

$$\|x_n^m - x_n^q\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* (x_n^m - x_n^q)| \leq \varepsilon$$

para todo $n \in N$,$q > m \geq P$.

Se sigue que $(x_n^s)_{s=1}^{\infty}$ es una sucesión $\|\cdot\|_X$-Cauchy para todo $n \in N$. Sea $\psi_n = \lim_s x_n^s$ y $\omega = (\psi_n)$.

De 6.1.2 tenemos que

$$\left(\sum_n |x^* x_n^m - x^* \psi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \tag{6.1.3}$$

si $m \geq P$, para todo $x^* \in B_{X^*}$.

Así,

$$\begin{aligned} \left(\sum_n |x^* \psi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_n |x^* x_n^m - x^* \psi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n |x^* x_n^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon + \left(\sum_n |x^* x_n^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ para todo } x^* \in B_{X^*} \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\omega \in l_p^w (X)$.

Por otro lado, se sigue de 6.1.3 que:

$$\|w_m - \omega\|_{l_p^w (X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_n |x^* x_n^m - x^* \psi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \leq \varepsilon$$

si $m \geq P$.

Todo lo anterior implica que $\left(l_p^w (X), \|\cdot\|_{l_p^w (X)} \right)$ es un espacio de Banach.

Sea $(z_m) = ((y_n^m)_n) \subset l_p^{\|\cdot\|} (Y)$ una sucesión $\|\cdot\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)}$-Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $P = P(\varepsilon) \in N$ tal que

$$\left(\sum_n \|y_n^m - y_n^q\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|z_m - z_q\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)} < \varepsilon \tag{6.1.4}$$

si $q > m \geq P$.

Así, $\|y_n^m - y_n^q\| < \varepsilon$ si $q > m \geq P$, para todo $n \in N$.

Se sigue que $(y_n^s)_{s=1}^{\infty}$ es una sucesión $\|\cdot\|_Y$-Cauchy para todo $n \in N$. Sea $\varphi_n = \lim_s y_n^s$ y $z = (\varphi_n)$.

De 6.1.4 tenemos lo siguiente:

$$\left(\sum_n \|y_n^m - \varphi_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \text{ si } m \geq P \tag{6.1.5}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left(\sum_n \|\varphi_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_n \|y_n^m - \varphi_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n \|y_n^m\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon + \left(\sum_n \|y_n^m\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\end{aligned}$$

Lo cual implica que $z \in l_p^{\|\cdot\|}(Y)$.

De 6.1.5 tenemos

$$\|z_m - z\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)} = \left(\sum_n \|y_n^m - \varphi_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \text{ si } m \geq P.$$

Lo anterior muestra que $\left(l_p^{\|\cdot\|}(Y), \|\cdot\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)}\right)$ es un espacio de Banach.□

Retomamos la definición dada antes y la expresamos con la nueva terminología de la siguiente manera :

"Un operador lineal acotado $T : X \to Y$ es **absolutamente p-sumable** si y sólo si $(Tx_n)_n \in l_p^{\|\cdot\|}(Y)$ siempre que $(x_n)_n \in l_p^w(X)$."

Si $T : X \to Y$ es absolutamente p-sumable entonces definimos un ope-rador $\hat{T} : l_p^w(X) \to l_p^{\|\cdot\|}(Y)$ como sigue:

$$\hat{T}(x_n)_n = (Tx_n)_n$$

Observación 6.1.1 *Nótese que la asociación $T \to \hat{T}$ es lineal.*

Lema 6.1.2 *$\hat{T}$ es un operador lineal acotado.*

Prueba:

Si $T : X \to Y$ es absolutamente p-sumable entonces $\hat{T}$ es un operador lineal bien definido y afirmamos que tiene gráfica cerrada:

Sean $(w_m) \subset l_p^w(X), w \in l_p^w(X)$ y $z \in l_p^{\|\cdot\|}(Y)$ tal que

$$\lim_m w_m = w \;\; \lim_m \hat{T} w_m = z \tag{6.1.6}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|w_m - w\|_{l_p^w(X)} &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_n |x^*(x_n^m - x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq |x^*(x_n^m - x)| \end{aligned}$$

para todo $x^* \in B_{X^*}$ y para todo $n \in N$. Así,

$$\begin{aligned} \|x_n^m - x_n\| &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x_n^m - x_n)| \\ &\leq \|w_m - w\|_{l_p^w(X)} \end{aligned}$$

para todo $n \in N$, de 6.1.6 se sigue que $\lim_m x_n^m = x_n$ para todo $n \in N$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\|\hat{T}w_m - z\right\|_{l_p^{\|\cdot\|}(Y)} &= \left(\sum_n \|Tx_n^m - y_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \|Tx_n^m - y_n\| \end{aligned}$$

para todo $n \in N$,de 6.1.6 se sigue que $\lim_m Tx_n^m = y_n$ para todo $n \in N$.

Dado que T es un operador lineal acotado, se sigue que

$$Tx_n = \lim_m Tx_n^m = y_n \quad \text{para todo } n \in N,$$

es decir $\hat{T}w = z$; por tanto $\hat{T}$ tiene gráfica cerrada y por tanto es un operador lineal acotado.□

Definimos la **norma absolutamente p-sumable de** T, denotada $\pi_p(T)$, como $\pi_p(T) = \left\|\hat{T}\right\|$, entonces $\pi_p(\cdot)$ es una norma en $\Pi_p(X,Y)$.

De hecho $\left\{\hat{T}|T \in \Pi_p(X,Y)\right\}$ es un subespacio **cerrado** del espacio de Banach $\left\{U : l_p^{\cdot w}(X) \to l_p^{\|\cdot\|}(Y)\,|U \text{ es lineal y acotado}\right\}$,de donde se sigue que $\left\{\hat{T}|T \in \Pi_p(X,Y)\right\}$ es un espacio de Banach y por tanto $(\Pi_p(X,Y), \pi_p(\cdot))$ lo es. (Esto último es claro ya que $\pi_p(T_n - T_m) = \left\|\hat{T}_n - \hat{T}_m\right\|$)

Dado que

$$\begin{aligned} \pi_p(T) &= \left\|\hat{T}\right\| \\ &= \inf\left\{\rho > 0 | \left\|\hat{T}(x_n)_n\right\| \leq \rho \|(x_n)_n\| \text{ para todo } (x_n)_n \in l_p^{\cdot w}(X)\right\} \end{aligned}$$

se sigue que

$$\pi_p(T) = \inf\{\rho > 0 | \text{la desigualdad 6.1.7 se da para cualquier } x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

$$\text{donde} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.1.7}$$

A continuación presentamos un importante resultado que liga la teoría de la medida con la teoría de operadores absolutamente p-sumables.

Teorema 6.1.1 *(de Dominación de Grothendieck-Pietsch, 1967).* ***Supon-gamos que*** $T \in \Pi_p(X, Y)$. ***Entonces existe una medida de probabili-dad deBorel, regular*** μ ***definida en*** B_{X^*} ***(respecto a la topología*** w^****) tal que***

$$\|Tx\|^p \leq \pi_p^p(T) \int\limits_{B_{X^*}} |x^* x|^p \, d\mu(x^*) \leq \pi_p^p(T) \|x\|^p$$

para todo $x \in X$.

Prueba:

Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$. Definimos la función:

$$f_{x_1,\ldots,x_n} : B_{X^*} \to R$$

como sigue:

$$f_{x_1,\ldots,x_n}(x^*) = \pi_p^p(T) \sum_{k=1}^{n} |x^* x_k|^p - \sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^p$$

Dado que $x^* x_k = i_{x_k}(x^*)$ y que además i_{x_k} es w^*-continua se sigue que $f_{x_1,\ldots,x_n}$ es w^*-continua en B_{X^*}.

Sea $C = \{f_{x_1,\ldots,x_n} \in C(B_{X^*}, w^*) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in X\}$. Afirmamos que C es un cono convexo, (un subconjunto convexo K de un espacio vectorial es un cono convexo si $tK \subset K$ cuando $t > 0$).

Sea $0 < \lambda < 1$, entonces

$$\lambda f_{x_1,\ldots,x_n} + (1-\lambda) f_{x_{n+1},\ldots,x_m} = f_{\lambda^{\frac{1}{p}} x_1, \ldots, \lambda^{\frac{1}{p}} x_n, (1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x_{n+1}, \ldots, (1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x_m}$$

de donde se sigue que C es convexo. Además si $\lambda > 0$ entonces

$$\lambda f_{x_1,\ldots,x_n} = f_{\lambda^{\frac{1}{p}} x_1,\ldots,\lambda^{\frac{1}{p}} x_n} \in C.$$

De la definición de $\pi_p(T)$ (ver ecuación 6.1.7), se sigue que cada elemento de C es no-negativo en algún $x^* \in B_{X^*}$. Por tanto C es disjunto del conjunto

$$N = \{f \in C(B_{X^*}, w^*) \,|\, f(x^*) < 0 \text{ para todo } x^* \in B_{X^*}\}.$$

Claramente N es un cono convexo, además N es abierto. Esto último es claro: Sea $f \in N$ arbitrario, entonces $\|f\|_{\max} = \max\limits_{x^* \in B_{X^*}} \{-f(x^*)\} > 0$. Por lo que

$$\{g \in C(B_{X^*}, w^*) \,|\, \|g - f\|_{\max} < \|f\|_{\max}\} \subset N.$$

Por el teorema básico de separación, se sigue que existe $\mu \in C(B_{X^*}, w^*)^*$ una medida de Borel regular definida en los borelianos de (B_{X^*}, w^*) tal que

$$\int f d\mu \leq t \leq \int g d\mu$$

para todo $f \in N$, $g \in C$; además, dado que N y C son conos convexos podemos suponer que $t = 0$.

Dado que $\int f d\mu \leq 0$ para todo $f \in N$, μ es una medida positiva que podemos suponer es una medida de probabilidad.

Así, $\int f_x d\mu \geq 0$ para todo $x \in X$. Por la definición de f_x se sigue que

$$\int\limits_{B_{X^*}} f_x d\mu = \pi_p^p(T) \int\limits_{B_{X^*}} |x^* x|^p \, d\mu(x^*) - \|Tx\|^p$$

para todo $x \in X$. Lo cual prueba la primera desigualdad, la segunda es obvia pues μ es de probabilidad.$\square$

El teorema anterior afirma que existe una medida de probabilidad regular μ definida en (B_{X^*}, w^*) tal que $i_x \in L^p(\mu)$ para cada $x \in X$.

Definimos $X_p = \overline{i(X)}^{L^p(\mu)}$. Entonces $i : X \to X_p$ es un operador lineal continuo:

$$\|i_x\|_{L^p(\mu)} = \left(\int\limits_{B_{X^*}} |x^* x|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$, lo cual implica que $\|i\| \leq 1$, en particular $i(B_X) \subset B_{X_p}$.

Definición 6.1.2 *Un operador lineal $T : X \to Y$ es llamado completamente continuo si manda sucesiones w-convergentes en sucesiones convergentes.*

Teorema 6.1.2 $i : X \to X_p$ ***es completamente continuo y débilmente compacto.***

Prueba:

Sea $(x_n) \subset X$ y $x \in X$ tal que $x = w\text{-}\lim_n x_n$, es decir $i_x x^* = \lim_n i_{x_n} x^*$ para todo $x^* \in X^*$.

Esto último implica que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} |i_{x_n} x^*| = \|x_n\| \leq M \text{ para todo } n \in N.$$

Por el teorema de la convergencia acotada, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_n \|i_{x_n} - i_x\|^p_{L^p(\mu)} &= \lim_n \int_{B_{X^*}} |i_{x_n} - i_x|^p \, d\mu \\ &= \int_{B_{X^*}} \lim_n |i_{x_n} - i_x|^p \, d\mu = 0 \end{aligned}$$

Por lo que i es completamente continuo.

Ahora probamos que $i : X \to X_p$ es un operador débilmente compacto, i.e $\overline{i(B_X)}$ es w-compacto.

Si $p > 1$ entonces X_p es reflexivo, lo cual implica que B_{X_p} es w-compacto. Se vió anteriormente que $i(B_X) \subset B_{X_p}$, por tanto $\overline{i(B_X)}$ es w-compacto.

Sea $p = 1$. Dado que μ es una medida de probabilidad se sigue que $L_2(\mu) \subset L_1(\mu)$.

El operador inclusión $I : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$ dado por $If = f$ es continuo, por tanto w-w continuo. Además,

$$\|i_x\|_{L_2(\mu)} = \left(\int_{B_{X^*}} |x^* x|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \text{ si } \|x\| \leq 1.$$

Así, $i(B_X) \subset B_{L_2(\mu)}$ y dado que $B_{L_2(\mu)}$ es w-compacto se sigue que $\overline{i(B_X)} = \overline{i(B_X)}^w$ es w-compacto (relativo a $L_2(\mu)$), por tanto $I\overline{i(B_X)} = \overline{i(B_X)}$ es w-compacto (relativo a $L_1(\mu)$).□

Teorema 6.1.3 ***Si*** $T \in \Pi_p(X, Y)$ ***entonces*** T ***es completamente continuo y débilmente compacto.***

Prueba:

Definimos $P : i(X) \subset L_p(\mu) \to Y$ de la siguiente manera:

$$Pi_x = Tx$$

Entonces P es un operador lineal acotado:

$$\begin{aligned} \|Pi_x\| = \|Tx\| &\leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{X^*}} |x^*x|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \pi_p(T) \, \|i_x\|_{L_p(\mu)} \end{aligned}$$

Donde la desigualdad es por el teorema de *Grothendieck-Pietsch.*

P tiene una única extensión lineal continua en X_p, la cual seguiremos denotando por P.

Por la definición de P tenemos que $T = P \circ i$. Dado que P es continuo e i es completamente continuo, se sigue que T **es completamente continuo.**

Tambien P es w-w continuo y como $\overline{i(B_X)}$ es w-compacto se sigue que $P\left(\overline{i(B_X)}\right)$ es w-compacto. Así,

$$\overline{TB_X} = \overline{TB_X}^w = \overline{P(i(B_X))}^w \subset P\left(\overline{i(B_X)}\right)$$

implica que $\overline{TB_X}$ es w-compacto, i.e T **es un operador débilmente compacto.**$\square$

6.2 Prueba del teorema de Dvoretsky-Rogers.

Teorema 6.2.1 ***Si*** $1 \leq p < \infty$ ***y*** X ***es de dimensión infinita, entonces el operador indentidad en*** X ***no es absolutamente*** p***-sumable.***

Prueba:

Supongamos que el operador identidad $Ix = x$ es absolutamente p-sumable.

Sea $(x_n) \subset B_X$. Por el teorema anterior I debería ser w-compacto i.e B_X debe ser w-compacto (w-compacto por sucesiones por el teorema de Eberlein-Ŝmulian), por tanto (x_n) admitiría una subsucesión w-convergente. Dado que I debería ser tambien completamente continuo se sigue que dicha subsucesión es convergente.

Pero lo anterior dice que B_X es compacto, lo cual implica que X es de dimensión finita. Una contradicción.$\square$

Corolario 6.2.1 *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $\sum_n \|x_n\|^p < \infty$ *siempre que* $\sum_n |x^* x_n|^p < \infty$ *para cada* $x^* \in X^*$*, entonces* X *es de dimensión finita.*

Finalmente, presentamos a continuación la prueba del teorema de *Dvoretsky-Rogers.*

Teorema 6.2.2 *Sea* X *un espacio de Banach. Toda serie incondicionalmente convergente en* X *es absolutamente convergente si y sólo si* X *es de dimensión finita.*

Prueba:

Solo resta probar la necesidad:

Supongamos que la convergencia incondicional de toda serie en X implica su convergencia absoluta.

X no puede contener una copia isomorfa de c_0, dado que c_0 admite una serie que converge incondicionalmente pero no absolutamente.

Por el teorema 5.0.6, se sigue que si $\sum_n |x^* x_n| < \infty$ para cada $x^* \in X^*$ entonces $\sum_n \|x_n\| < \infty$, por el corolario anterior se sigue que X es de dimensión finita.□

CONCLUSIONES.

Sólo queremos destacar la importancia de las topologías débil y débil*, como se vió a través del trabajo estas topologías nos permiten probar propie-dades de subconjuntos del espacio vectorial que con la norma sería díficil de mostrar, (w-acotado implica acotado, etc.).

Queremos destacar fuertemente la importancia del capítulo 3 en las aplicaciones: el teorema de *Eberlein-Šmulian* por el lado de la topología débil y el teorema de *Banach-Alaoglu* (junto con el teorema 3.2.3) por el lado de la topología débil*.

Aunque estas topologías se han definido en espacios vectoriales normados, se pueden definir también en espacios vectoriales topológicos localmente convexos.

El capítulo 4 sólo es una breve introducción a la teoría de integración de funciones vectoriales. Con ello se probó el teorema de *Orlicz-Pettis*, el cual es una herramienta básica en la teoría de medidas vectoriales. El resultado se puede probar para espacios topológicos localmenta convexos.

En el capítulo 5 se introduce la noción de sucesión básica y su caracte-rización. Esto da lugar a preguntas que relacionan este concepto con la estructura del espacio: ¿todo espacio de Banach contiene una sucesión básica incondicional?, ¿todo espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a c_0 ó l_p $1 \leq p < \infty$?, etc.

Bibliografía

[Ba] Bachman G., Narici L., Funtional Analysis, Academic Press Inc., New York, 1972.

[Di] Diestel Joseph, Sequences and series in Banach spaces, Springer Verlag Inc., New York, 1984.

[DU] Diestel J., Uhl J., Vector Measures,American Mathematical Society, Rhode Island, 1977.

[Gu] Guerre-Delabrière Sylvie, Classical Sequences in Banach spaces, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[Ha] Halmos Paul R., Measure Theory, Springer Verlag Inc., New York, 1988.

[Ru1] Rudin Walter, Real and Complex analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[Ru2] Rudin Walter, Funtional Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1991

[Sw] Swartz Charles, An Introduction to Funtional Analysis, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[Wo] Wojtaszczyk P., Banach spaces For Analysts, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.