LAS QUEBRADITAS
(propiedades dinámicas de una peculiar familia de funciones en el Intervalo)

Héctor Méndez Lango

1 Introducción

Estudiaremos en estas notas algunas propiedades dinámicas comunes a todas las *quebraditas*. Sea $J = [a, b]$ un intervalo en la recta real, $\mathbb{R}$. Una función $f : J \to J$, es *quebradita* si su gráfica es una linea quebrada con la propiedad de que en cada uno de los segmentos de recta que la componen, la pendiente es mayor que 1 o es negativa y menor que -1.

Demostraremos que si f es quebradita, entonces el conjunto de los puntos en J tales que su órbita es periódica o tiende a ser periódica forma un conjunto denso en J. Mostraremos también que el conjunto de los puntos en J tales que su órbita es aperiódica (esto es, de comportamiento completamente distinto a las anteriores) también forma un conjunto denso en J. Es decir, el conjunto de puntos en el intervalo que dan lugar a órbitas *sencillas* y el conjunto de puntos en el intervalo que dan lugar a órbitas *complicadas*, ambos son densos en J.

El concepto de *caos*, cuya definición recordaremos más adelante, también aparece al estudiar esta familia. Demostraremos que si $f : J \to J$ es quebradita, entonces existe un conjunto cerrado, invariante bajo f, $f(A) \subset A$, tal que $f|_A$ es caótica según la definición de R. L. Devaney (véase [Dev], página 50). Además mostraremos que este *conjunto caótico* es grande en el sentido de que $int\,(A) \neq \phi$.

2 Presentación de la familia

Iniciemos con la presentación de la familia.

Sea I el intervalo $[0,1]$ en la recta real $\mathbb{R}$. A lo largo de estas notas consideraremos funciones de I en I. Todas las funciones se asumiran continuas en I. Al avanzar en la lectura de estas notas el lector (la lectora) se convencerá de que al trabajar en el intervalo $[0,1]$ (en lugar de un intervalo $J=[a,b]$) no perdemos generalidad en nuestras afirmaciones.

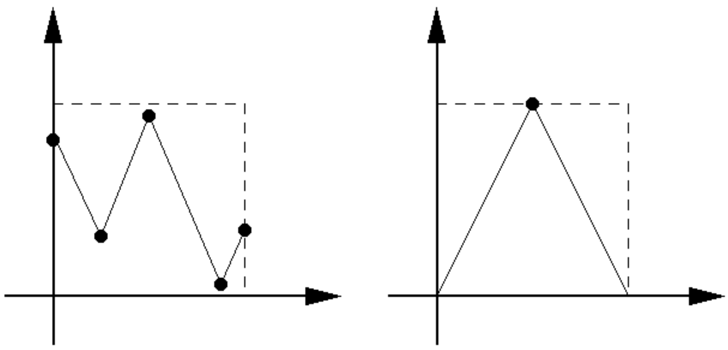
La familia de *las quebraditas* (que denotaremos con la letra $\mathcal{L}$) es la siguiente:

Definición 2.1 *La función $f: I \to I$ está en la familia $\mathcal{L}$ si cumple las siguientes dos condiciones:*

i) Su gráfica es una linea quebrada (una poligonal). Es decir, existe una partición finita del intervalo $[0,1]$, digamos $P=\{t_0=0, t_1, t_2, \ldots, t_l=1\}$, $t_{i-1}<t_i$, tal que la parte de la gráfica de f que une $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ con $(t_i, f(t_i))$ es un segmento de recta para cada $i \in \{1,2,\ldots,l\}$, y

ii) la pendiente m_i en cada uno de esos l segmentos, es mayor que 1 en valor absoluto, $|m_i|>1$.

Los siguientes son dos elementos de la familia $\mathcal{L}$.



Esta familia posee algunos rasgos interesantes. En particular nos interesan aquellas propiedades que cada elemento de esa familia exhibe cuando es considerado el sistema dinámico discreto a que da lugar (en la siguiente sección precisaremos a que nos referimos cuando hablamos de propiedades dinámicas).

En la presentación de esas propiedades (y en la demostración de algunas afirmaciones) haremos uso de algunos resultados conocidos del Cálculo Diferencial e Integral y de un primer curso de Análisis Matemático (en particular el Teorema del Valor Intermedio y del Teorema de Baire). Además, salpicamos estas notas con algunos ejercicios y preguntas. Recomendamos ampliamente su solución (o al menos el intento de su solución).

Ejercicio 2.1 *Muestra que si f y g son elementos de $\mathcal{L}$, entonces su composición, $f \circ g$, también es elemento de $\mathcal{L}$.*

Ejercicio 2.2 *Muestra que si $f \in \mathcal{L}$, entonces f no es biyectiva.*

De aquí en adelante, salvo que se indique algo distinto, todas las funciones que consideraremos serán elementos de la familia $\mathcal{L}$.

3 Propiedades dinámicas

Dada $f \in \mathcal{L}$ definimos $f^0 = id$, $f^1 = f$, y para toda $n \geq 2$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

De manera inmediata tenemos dos implicaciones:

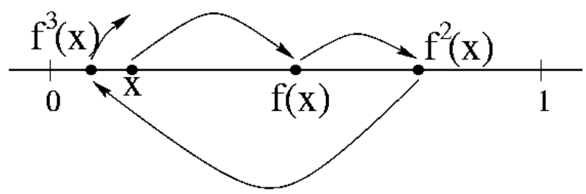
i) Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n \in \mathcal{L}$, y

ii) para toda $x \in I$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(x) \in I$.

Esto nos permite definir para cada punto x en I el siguiente conjunto:

$$o(x, f) = \left\{x, f(x), f^2(x), ...\right\},$$

que llamaremos la *órbita* de x bajo f.



La *dinámica* de f aparece cuando consideramos cada órbita, $o(x, f)$, como las distintas posiciones que va recorriendo un objeto al paso del tiempo. En $t = 0$ estaba en x; en $t = 1$ en $f(x)$; en $t = 2$ en $f^2(x)$; y así sucesivamente.

tiempos	0	1	2	3	$\cdots$	n
posiciones	x	$f(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$\cdots$	$f^n(x)$

En resumen, cada x en I da lugar a una órbita, es decir, a una secuencia de movimientos. Bajo este punto de vista la función f genera un *sistema dinámico discreto*. Decir que nos interesa estudiar las propiedades dinámicas de f es sólo otra manera de expresar que nos interesa conocer cómo son todas las órbitas que ella y los puntos de I producen.

Definición 3.1 *Sea $x \in I$. Decimos que x es:*

i) un punto fijo de f si $f(x) = x$;

ii) un punto periódico de f de período n, $n \in \mathbb{N}$, si $f^n(x) = x$ y para toda $1 \leq k < n$ se tiene que $f^k(x) \neq x$;

iii) un punto preperiódico de f si existen un punto periódico de f, digamos z, y una $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = z$.

Ejercicio 3.1 *Sean $[s,t]$ y $[c,d]$ dos subintervalos de I. Supón que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[c,d] \subset f^n([s,t])$. Demuestra que:*

i) Existe un subintervalo $[\alpha, \beta] \subset [s,t]$ tal que $[c,d] = f^n([\alpha,\beta])$.

ii) Si $[c,d] = [s,t]$, entonces existe un punto $x \in [s,t]$ tal que es periódico bajo f.

Dada x en I, la órbita de x bajo f es un conjunto. Si lo pensamos un poco más, la $o(x,f)$ es también una sucesión: el primer elemento es x, el segundo es $f(x)$, el tercer elemento es $f^2(x)$, y así sucesivamente. Por ejemplo si x es un punto fijo de f, entonces $o(x,f) = \{x\}$ o, sin faltar a la verdad, podríamos decir que $o(x,f) = \{x, x, x, \ldots\}$, una sucesión constante.

Obsérvese que si x es un punto fijo de f, entonces el punto $(x, f(x))$ pertenece tanto a la gráfica de f como a la gráfica de la función identidad, $id : I \to I$, $id(x) = x$ para todo $x \in I$. Consideraremos a los puntos fijos como puntos periódicos de período 1. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos $Per(f)$. Si x es un punto periódico, diremos que x tiene una *órbita periódica*. De manera similar definimos *órbita preperiódica*.

Ejercicio 3.2 *Sea $T : I \to I$ la función dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & si\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

i) Encuentra los puntos fijos de T.

ii) Encuentra una órbita de período 2 bajo T.

iii) Calcula la $o\left(\frac{1}{9}, T\right)$.

iv) Muestra que la $o\left(\frac{2}{7}, T\right)$ es de período 3.

v) ¿Cuántas órbitas de período 3 tiene T? Decimos que dos órbitas son distintas si son ajenas.

vi) ¿Será cierta la siguiente afirmación: "Si x es racional, entonces x es un punto periódico o preperiódico bajo T"?

La función T es un elemento muy importante de la familia $\mathcal{L}$. En la literatura matemática en inglés es conocida como *tent map* (nosotros, en estas notas, le llamaremos simplemente T). El sistema dinámico que ella genera usualmente aparece como uno de los primeros ejemplos cuando se estudia *dinámica caótica* en el intervalo (ver [Dev]).

Definición 3.2 *Decimos que x es un punto asintóticamente periódico (tiene órbita asintóticamente periódica) de f si existe $y \in Per(f)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Es inmediato que todo punto periódico o preperiódico es asintóticamente periódico.

Ejemplo 3.1 *Sea $g : I \to I$ dada por $g(x) = x^2$.*

Considera la órbita de $x = \frac{1}{2}$ bajo g. Se puede probar (la lectora queda invitada a hacerlo) que esta órbita cumple las siguientes características:

i) $g\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ y, de hecho, usando inducción, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $g^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) < g^n\left(\frac{1}{2}\right)$.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 < g^n\left(\frac{1}{2}\right)$.

iii) $\lim_{n\to\infty} g^n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Por lo tanto la $o\left(\frac{1}{2}, g\right)$ no es periódica ni preperiódica, pero sí es asintóticamente periódica.

Mostraremos a continuación que una función quebradita no tiene órbitas asintóticamente periódicas distintas a las órbitas periódicas o preperiódicas.

Proposición 3.1 *Si $x \in I$ es un punto asintóticamente periódico de f, entonces x es un punto periódico o preperiódico.*

Demostración. Sea $P = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_l = 1\}$ la partición mencionada en la definición de f. Llamaremos a los puntos t_i, $i = 0, 1, \ldots, l$, los *puntos críticos* de f. Sea $z \in Per(f)$. Esta órbita tiene dos opciones: $o(z, f) \cap P = \phi$ ó $o(z, f) \cap P \neq \phi$.

Caso 1. $o(z, f) \cap P = \phi$.

Supongamos que el período de z es k, y que $o(z, f) = \{z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}\}$ donde $z_j = f^j(z)$.

Sea $\delta = \min\{|z_j - t_i| \,|0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq l\}$. Supongamos que para algún $x \in I$ la $o(x, f)$ es asintóticamente periódica a la órbita de z. Como el $\lim_{m\to\infty} |f^m(x) - f^m(z)| = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$|f^n(x) - f^n(z)| < \delta.$$

Dada la definición de δ, el intervalo $[f^n(x), f^n(z)]$, o, en su caso, el intervalo $[f^n(z), f^n(x)]$, está totalmente contenido en alguno de los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ si $n \geq n_0$.

Sean m_i la pendiente de la gráfica de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, y

$$m_f = \min\{|m_i| \, |1 \leq i \leq l\}.$$

Si suponemos que para toda $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $f^m(x) \neq f^m(z)$, entonces para toda $\eta \geq 0$ se tiene lo siguiente:

i) $|f^{n_0+\eta}(x) - f^{n_0+\eta}(z)| < \delta$, y

ii) $|f^{n_0+\eta}(x) - f^{n_0+\eta}(z)| \geq (m_f)^\eta |f^{n_0}(x) - f^{n_0}(z)|$.

Como $f^{n_0}(x) - f^{n_0}(z) \neq 0$ y el $\lim_{\eta \to \theta} (m_f)^\eta = \infty$ (ya que $m_f > 1$), obtenemos una contradicción. Por tanto si la $o(x, f)$ es asintóticamente periódica, entonces ella es periódica o preperiódica.

Caso 2. $o(z, f) \cap P \neq \phi$.

Consideremos ahora en la definición de δ sólo las cantidades $|z_j - t_i|$ cuando ellas son distintas de cero.

$$\delta = \min\{|z_j - t_i| \neq 0 \, |0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq l\}.$$

Siguiendo el argumento empleado en el caso anterior se concluye también en este caso que si una órbita es asintóticamente periódica a la órbita de z, entonces esa órbita es preperiódica o periódica. $\square$

Ejercicio 3.3 *Sea $T : I \to I$ la función que ya mencionamos. Demuestra que si x es un punto periódico bajo T digamos de período k, entonces:*

i) la función T^k es derivable en cada punto de la $o(x, T)$, y $\left|\left(T^k\right)'(x)\right| = 2^k$, y

ii) existe $\delta > 0$ tal que para toda $y \in (x - \delta, x + \delta)$, $y \neq x$, existe $m \geq 1$ tal que $\left(T^k\right)^m(y) \notin (x - \delta, x + \delta)$.

Ejercicio 3.4 *Demuestra que la cardinalidad del conjunto de los puntos asintóticamente periódicos de la función T es infinita numerable.*

Los tipos de órbitas mencionados hasta ahora representan *movimientos sencillos*. En todas las órbitas de estos tres tipos (periódicas, preperiódicas y asintóticamente periódicas) se tiene que la sucesión de valores que va tomando $f^n(x)$ tiende a un movimiento periódico cuando n tiende a infinito.

En el caso de que la órbita de x sea asintóticamente periódica a la órbita de y, punto periódico de período m, $o(y, f) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, tenemos que dada $\varepsilon > 0$ muy pequeña, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon$. Esto quiere decir que a partir de un cierto momento la órbita de x esta muy cerca de m puntos del intervalo. De hecho, a partir n_0, toda la órbita de x se encuentra en la unión de m bolas de radio ε cuyos centros son los puntos de la órbita periódica de y,

$$\{f^n(x) \,|n \geq n_0\} \subset \cup_{i=1}^m B_\varepsilon(y_i).$$

La siguiente definición nos servirá para formalizar lo que entenderemos por *movimientos sencillos*.

Definición 3.3 *Sean x y z dos puntos en I. Decimos que z es punto límite de la órbita de x si existe una subsucesión de $o(x, f)$,*

$$\{f^{n_i}(x) \,|n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\},$$

tal que $\lim_{n_i \to \infty} f^{n_i}(x) = z$. Al conjunto de todos los puntos límite de $o(x, f)$ lo llamaremos el omega conjunto límite de x, y lo denotaremos por $\omega(x, f)$.

Ejemplo 3.2 *Sea $T : I \to I$ la función que definimos antes. Entonces*

i) $\omega\left(\frac{2}{3}, T\right) = \left\{\frac{2}{3}\right\}$, ya que $o\left(\frac{2}{3}, T\right) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$.

ii) $\omega\left(\frac{2}{7}, T\right) = \left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$, ya que $o\left(\frac{2}{7}, T\right) = \left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \ldots\right\}$ y toda subsucesión de ella convergente es constante a partir de un cierto momento.

iii) $\omega\left(\frac{1}{28}, T\right) = \left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$, ya que $T^3\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{2}{7}$ y a partir de ese momento la órbita de $\frac{1}{28}$ es, en esencia, la órbita de $\frac{2}{7}$.

Ejercicio 3.5 *Di si son o no ciertas cada una de las siguientes afirmaciones:*

i) $\omega(x, f) = \omega(f(x), f)$.

ii) $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$.

iii) $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.

Ejercicio 3.6 *Sea T la función conocida por todos. Demuestra que:*

i) si $x \in \mathbb{Q} \cap I$, entonces $\omega(x, T)$ tiene cardinalidad finita, y

ii) si $x \notin \mathbb{Q} \cap I$, entonces $\omega(x, T)$ tiene cardinalidad infinita.

Ejercicio 3.7 *Sea $g : I \to I$ una función no necesariamente en nuestra familia. Demuestra que si la órbita de x es asintóticamente periódica bajo g, digamos a la órbita de z, $z \in Per(g)$, entonces $\omega(x, g) = o(z, g)$. En particular, la cardinalidad de $\omega(x, g)$ es finita.*

El siguiente teorema contiene la afirmación recíproca al resultado obtenido en el ejercicio anterior y nos da una caracterización de los puntos asintóticamente periódicos. Su demostración se encuentra en la página 72 de [Blo].

Teorema 3.1 *Sean $x \in I$ y $g : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Si la cardinalidad de $\omega(x, g)$ es finita, entonces x es un punto asintóticamente periódico.* $\square$

Dado un punto, $x \in I$, diremos que el movimiento representado por su órbita es *sencillo* si la cardinalidad de su $\omega(x, f)$ es finita. Observa que las órbitas sencillas corresponden a movimientos que convergen a órbitas periódicas.

Definición 3.4 *Sea x un punto en I. Decimos que x es un punto aperiódico (o tiene órbita aperiódica) de f si la cardinalidad su $\omega(x, f)$ es infinita.*

Las órbitas aperiódicas describen movimientos no sencillos (a veces llamados *complejos*, *complicados* o *caóticos*). Dedicaremos el final de esta sección a la demostración de que tales órbitas sí se presentan en funciones continuas definidas en el intervalo. En particular demostraremos que todos los elementos de la familia $\mathcal{L}$ presentan este tipo de órbitas. De hecho, una de nuestras metas es demostrar que dada $f \in \mathcal{L}$, existe un conjunto denso en I, digamos Γ (que depende de cada f), tal que si $x \in \Gamma$, entonces la órbita de x bajo f es aperiódica.

Proposición 3.2 *Sea $f \in \mathcal{L}$. Entonces existe $x \in I$ tal que la cardinalidad de su $\omega(x, f)$ es infinita.*

Demostración. Es suficiente mostrar que debe existir un punto $x \in I$ tal que su órbita no es periódica ni preperiódica.

La función f es monótona en una cantidad finita de subintervalos de I. En cada uno de ellos la pendiente es distinta de 1. Por tanto el conjunto $\{z \in I \,|\, f(z) = z\}$ tiene cardinalidad finita. El mismo argumento dice que para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\{z \in I \,|\, f^n(z) = z\}$$

tiene cardinalidad finita. Y así el conjunto

$$E = \cup_{n=1}^{\infty} \{z \in I \,|\, f^n(z) = z\}$$

es numerable, de hecho es infinito numerable. La parte de que la cardinalidad de E es infinita no es necesaria en esta argumentación, así que su demostración la presentaremos en la siguiente sección.

Es casi inmediata la siguiente igualdad $E = Per(f)$ (la demostración se deja a la lectora).

Ahora, sea $z \in Per(f)$. Nuevamente por el hecho de que f es monótona en una cantidad finita de subintervalos, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ la cardinalidad del conjunto

$$\{y \in I \,|\, f^n(y) = z\}$$

es finita. Por lo tanto el siguiente conjunto es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos numerables:

$$F = \cup_{z \in Per(f)} \{y \in I \,|\, f^n(y) = z \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}.$$

Así el conjunto formado por todos los puntos periódicos de f y por todos los puntos preperiódicos de f, esto es F, forma un conjunto numerable. Por tanto, su complemento en $[0,1]$ es denso en I e infinito no numerable.

Cada $x \in I \setminus F$ tiene órbita que no es periódica ni preperiódica, por tanto no es asintóticamente periódica. Y con ello la cardinalidad de su $\omega(x, f)$ es infinita. $\square$

En la siguiente sección daremos otra demostración de la existencia de estas órbitas aperiódicas para elementos de nuestra familia. La argumentación que desarrollaremos es más general en tanto que se puede aplicar también a funciones que no necesariamente son quebraditas. Además de esta ventaja, tal argumentación nos llevara de la mano al descubrimiento, para elementos de nuestra familia, de puntos cuyo omega conjunto límite no sólo es de cardinalidad infinita sino que contiene un intervalo con interior distinto del vacío.

4 Órbitas aperiódicas

La existencia de órbitas aperiódicas está relacionada con una propiedad llamada *transitividad topológica*. He aquí su definición.

Definición 4.1 *Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Decimos que f es topológicamente transitiva (o sólo transitiva) en I si para todo par de intervalos abiertos no vacíos, $A = (a, b)$ y $B = (\alpha, \beta)$, $A \subset I$ y $B \subset I$, existen $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) \in B$ (o, de manera equivalente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \phi$).*

Esta definición puede modificarse para el caso de conjuntos no vacíos e invariantes bajo f. Sea $J \subset I$ un conjunto cerrado e invariante bajo f, $f(J) \subset J$. Decimos que $f|_J : J \to J$ es transitiva en J si para todo par de subintervalos abiertos de I, $A = (a, b)$ y $B = (\alpha, \beta)$, tales que $A \cap J \neq \phi$ y $B \cap J \neq \phi$, existen $x \in A \cap J$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) \in B \cap J$.

Ejercicio 4.1 *Sea $T : I \to I$ la función que definimos anteriormente.*
i) Dibuja las gráficas de T^2 y T^3.
ii) Demuestra que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda

$$l \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n - 1\},$$

se tiene que la imagen bajo T^n del intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ es igual al intervalo I, $T^n\left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1]$.
iii) Demuestra que dado un intervalo abierto no vacío en I, digamos (a, b), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n((a, b)) = [0, 1]$.
iv) Demuestra que T es transitiva en I.

Ejercicio 4.2 *Sea $g : I \to I$ no necesariamente quebradita. Demuestra que si g es transitiva en I, entonces g es suprayectiva.*

El concepto de la transitividad nos ayudará mucho. Resulta que, como veremos en seguida, transitivo implica aperiódico para funciones definidas en el intervalo.

La herramienta principal en esta sección es el llamado *Teorema de Baire*. A continuación te presentamos una versión de él. Su demostración la puedes encontrar en [Roy], página 139.

Teorema 4.1 *(Baire). Sea J un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{R}$. Sea $\{O_1, O_2, \ldots\}$ una colección numerable de subconjuntos de J, abiertos y densos en J. Entonces la intersección de todos ellos forma un conjunto distinto del vacío, $\cap_{n=1}^{\infty} O_n \neq \phi$.* $\square$

Ahora te mostraremos un puente entre la idea de transitividad y la existencia de órbitas aperiódicas.

Teorema 4.2 *Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Si f es transitiva en I, entonces existe $x \in I$ tal que su órbita es aperiódica.*

Demostración. Construiremos una familia numerable de conjuntos abiertos y densos en el intervalo I. Por el Teorema de Baire, la intersección de todos ellos será no vacía. Mostraremos luego que cada punto en esta intersección tiene una órbita aperiódica. De hecho, la órbita de cada punto en esa intersección formará un conjunto denso en I.

Sean $B_{11}{=}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $B_{12}{=}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Afirmación 1. La unión infinita $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})$ es un conjunto denso y abierto en el intervalo I.

Observa que f y cada una de sus iteraciones, $f^2, f^3, \ldots$, es una función continua. Dado un subconjunto abierto en el intervalo, digamos A, la imagen inversa de él bajo cada iteración de f es a su vez un conjunto abierto en I. Además, $f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Y, por último, la unión de conjuntos abiertos es a su vez un conjunto abierto. Por lo tanto la $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})$ forma un conjunto abierto.

Mostremos ahora que esa unión forma un conjunto denso en I.

Sea (a, b) un intervalo no vació en I. Es suficiente mostrar que $(a, b) \cap \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \neq \phi$.

Como f es transitiva en I, existe $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (a, b)$ tales que $f^k(x) \in B_{11}$. Por tanto, $(a, b) \cap f^{-k}(B_{11}) \neq \phi$, y con ello, $(a, b) \cap \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \neq \phi$.

De manera similar a como hemos procedido se puede argumentar que la unión infinita $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12})$ forma un conjunto abierto y denso en I.

Sea $N_1 = \left(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right) \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12})\right)$. Es inmediato (el lector es llamado a aportar los detalles) que N_1 es un conjunto abierto y denso en I. Nótese que si $x \in N_1$, entonces existen dos números naturales, k y l, tales que $f^k(x) \in B_{11}$ y $f^l(x) \in B_{12}$.

Para construir N_2 procederemos de manera análoga. Consideramos ahora $4 = 2^2$ subintervalos abiertos en el intervalo I. Sean $B_{21}=\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $B_{22}=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $B_{23}=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, y $B_{24}=\left(\frac{3}{4}, 1\right)$. La prueba de la siguiente afirmación se obtiene haciendo cambios mínimos a la argumentación utilizada en la demostración de la *Afirmación 1.*

Afirmación 2. Las siguientes uniones de conjuntos son cada una de ellas conjuntos densos y abiertos en el intervalo I : $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{21}\right)$, $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{22}\right)$, $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{23}\right)$ y $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{24}\right)$.

Definimos N_2 así:

$$N_2 = \cap_{k=1}^{4}\left(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{2k}\right)\right).$$

Nuevamente es inmediato que N_2 es un conjunto abierto y denso en I. Además, si $x \in N_2$, entonces su órbita visita, en distintos momentos, los cuatro intervalos B_{2k}, $k = 1, 2, 3, 4$.

Para definir N_k, k un número natural cualquiera, seguimos el procedimiento descrito anteriormente.

Primero. Sean $B_{kl}=\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right)$, $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k$.

Segundo. Los conjuntos $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{kl}\right)$ son abiertos y densos en I para cada $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k$.

Tercero. Sea $N_k = \cap_{l=1}^{2^k}\left(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{kl}\right)\right)$. Este conjunto es abierto y denso en I.

Por último, una vez que hemos definido para cada k el conjunto N_k, sea $N = \cap_{k=1}^{\infty} N_k$. Por el Teorema de Baire, este conjunto es no vacío.

Afirmación 3. Si $x \in N$, entonces la órbita de x forma un conjunto denso en I. Es decir, la cerradura del conjunto $o\left(x, f\right)$ es todo el intervalo I.

Tomemos $x \in N$. Sea (a, b) un intervalo no vacío en I. Es suficiente demostrar que $(a, b) \cap o\left(x, f\right) \neq \phi$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3}$. Es inmediato que existe $l \in \left\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\right\}$, tal que $\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right) \subset (a, b)$. Como $x \in N_k$, $x \in \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\left(B_{kl}\right)$. Por tanto existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{j}\left(x\right) \in \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right)$. Y con ello nuestra afirmación es cierta.

Afirmación 4. Si $x \in N$, entonces $\omega\left(x, f\right) = I$.

Sean $x \in N$ y $y \in I$. La idea es construir una subsucesión de la órbita de x que sea convergente a y.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ considera $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. El primer elemento de nuestra subsucesión lo determinamos de la siguiente manera: Como la $o\left(x, f\right)$ es densa en I, existe n_1 tal que $|f^{n_1}(x) - y| < \varepsilon_1$. Para decidir el segundo elemento de la subsucesión consideramos a ε_2. Como el conjunto

$$o(x, f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{n_1}(x)\}$$

es denso en I, existe $n_2 > n_1$ tal que $|f^{n_2}(x) - y| < \varepsilon_2$. Y así nos seguimos. Supongamos que ya escogimos a n_k con las dos propiedades siguientes: $n_k > n_{k-1}$ y $|f^{n_k}(x) - y| < \varepsilon_k$. Dado que, nuevamente, el conjunto que se obtiene al quitarle a la órbita de x una cantidad finita de puntos es denso en I, es claro que existe n_{k+1} con propiedades similares a las mencionadas: $n_{k+1} > n_k$ y $|f^{n_{k+1}}(x) - y| < \varepsilon_{k+1}$. Es ahora inmediato que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$.

Con las afirmaciones anteriores en la mano podemos concluir que si $x \in N$, entonces la cardinalidad de $\omega(x, f)$ es infinita (de hecho, es infinita no numerable ya que $\omega(x, f) = I$). Y con ello, la órbita de cada punto del conjunto N es aperiódica. $\square$

Ejercicio 4.3 *Demuestra que el conjunto N, encontrado en el teorema anterior, es infinito no numerable. Sugerencia: El Teorema de Baire puede ser útil.*

Ejercicio 4.4 *En algún momento, en la demostración del teorema anterior, se utilizó un resultado sobre conjuntos densos que diría así: Si $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ es un conjunto denso en I, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ es denso en I. En este ejercicio se te pide dar su demostración.*

Ejercicio 4.5 *Demuestra (lo que casi es) el recíproco del teorema anterior: Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Si f tiene una órbita densa en I, entonces f es transitiva en I.*

Un poco más adelante utilizaremos una versión del teorema que acabamos de presentar ligeramente distinta. A continuación la redactaremos. Su demostración es, con ligeros cambios, la misma que ya ofrecimos.

Teorema 4.3 *Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Sea J un subconjunto de I cerrado y de cardinalidad infinita. Supongamos que J es invariante bajo f, $f(J) \subset J$. Si $f|_J : J \to J$ es transitiva en J, entonces existe $x \in J$ tal que su órbita es aperiódica (de hecho, densa en J).* $\square$

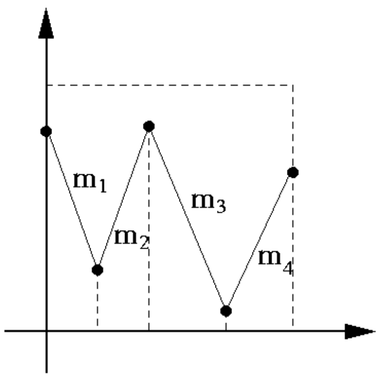
Ejercicio 4.6 *Sea $g : I \to I$, no necesariamente en nuestra familia. Sea $J \subset I$, $J \neq \phi$, un conjunto cerrado e invariante bajo g. Supongamos que $g\,|_J$ es transitiva en J. Demuestra que si J tiene un punto aislado ($x_0 \in J$ es aislado si existe $\delta > 0$ tal que $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap J = \phi$), entonces los puntos que forman a J son los puntos de una órbita periódica bajo g.*

Para que esta idea de transitividad tenga utilidad en la búsqueda de órbitas aperiódicas para funciones de nuestra familia, $f \in \mathcal{L}$, es necesario encontrar un subconjunto J de I, cerrado e infinito, tal que sea invariante bajo f y tal que $f\,|_J : J \to J$ es transitiva en J. Las secciones 5 y 6 se orientan a esta meta. En la sección 5 proporcionamos algunos lemas técnicos y en la 6 obtenemos el conjunto J (pasando en el camino por el concepto de *caos*).

5 Regreso a la familia

En esta sección presentamos algunas propiedades que cumplen los elementos de la familia $\mathcal{L}$. Y luego en la siguiente haremos uso de ellas.

Sea $f \in \mathcal{L}$. Sea $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_l = 1\}$ la partición mencionada en la definición de f, y sean $m_1, m_2, \ldots, m_l$, las pendientes de los segmentos de recta que componen la gráfica de f.



Sea $m_f = \min \{|m_i|\,|1 \leq i \leq l\}$.

Lema 5.1 *La siguiente desigualdad es cierta: $m_{f^2} \geq (m_f)^2$. De hecho, para toda $n \geq 2$, se tiene que $m_{f^n} \geq (m_f)^n$.*

Demostración. Sea $x \in I$ tal que $x \neq t_i$ y tal que $f(x) \neq t_i$ para toda i, $1 \leq i \leq l$. Utilizando la regla de la cadena obtenemos lo siguiente:

$$\left| \left(f^2\right)'(x) \right| = |f'(f(x))| \, |f'(x)| \geq (m_f)^2,$$

de aquí se sigue que $m_{f^2} \geq (m_f)^2$.

Por un argumento similar y utilizando inducción matemática obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $m_{f^n} \geq (m_f)^n$. □

Una observación antes de continuar. Como $m_f > 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} m_{f^n} = \infty.$$

Lema 5.2 *Supongamos que $m_f > 2$. Sea $\delta_f = \min\{t_i - t_{i-1} \,|1 \leq i \leq l\}$. Sea J un subintervalo de I con interior distinto del vacío, $int(J) \neq \phi$. Entonces existe $k \geq 1$ tal que la longitud de $f^k(J)$ es mayor que δ_f. Denotaremos esto último así: $l\left(f^k(J)\right) > \delta_f$.*

Demostración. Sea J un intervalo con las características mencionadas. Supongamos que para todo $k \geq 1$ se tiene que $l\left(f^k(J)\right) \leq \delta_f$. Se sigue que para cualquier k el intervalo $f^k(J)$ tiene en su interior a lo más un punto de la partición P. Por tanto las longitudes de los intervalos $f^k(J)$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
l(f(J)) &\geq \frac{m_f}{2} l(J), \\
l\left(f^2(J)\right) &\geq \left(\frac{m_f}{2}\right)^2 l(J), \\
&\vdots \\
l\left(f^k(J)\right) &\geq \left(\frac{m_f}{2}\right)^k l(J), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dado que $\frac{m_f}{2} > 1$, tenemos que $\left(\frac{m_f}{2}\right)^k \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Y así, $l\left(f^k(J)\right) \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Pero esto último es una contradicción ya que siempre nos mantenemos en el intervalo $[0,1]$. □

Corolario 5.1 *Dada $f \in \mathcal{L}$, existe $\delta > 0$ tal que para todo subintervalo J de I con interior distinto del vacío, $int\,(J) \neq \phi$, existe $k \geq 1$ tal que $l\left(f^k(J)\right) > \delta$.*

Demostración. Sea J un intervalo con interior distinto del vacío. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_{f^n} > 2$. Sea $\delta = \delta_{f^n} > 0$, donde δ_{f^n} es el siguiente mínimo:

$$\delta_{f^n} = \min\left\{t_i - t_{i-1}\,|1 \leq i \leq l\right\},$$

y donde $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_l = 1\}$ es la partición que se mencionaría en la definición de f^n. Por el lema anterior se concluye que existe $m \geq 1$ tal que $l\left(f^{nm}(J)\right) = l\left((f^n)^m(J)\right) > \delta$. Tomando $k = mn$ la demostración está completa. $\square$

6 La familia $\mathcal{L}$ y las digráficas

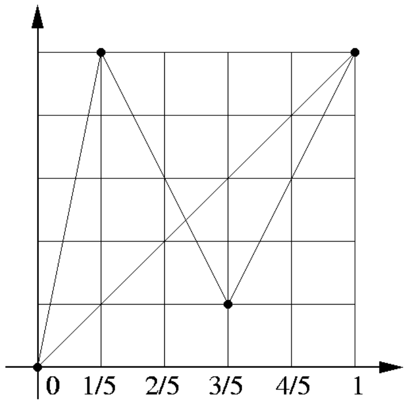
En esta sección a cada miembro de nuestra familia le asociaremos una digráfica.

Sea $f \in \mathcal{L}$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo subintervalo J de I con interior distinto del vacío, $int\,(J) \neq \phi$, existe $n \geq 1$ tal que $l\left(f^n(J)\right) > \delta$. Considera una partición, $Q = \{s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_m = 1\}$, de I cuya norma cumpla la siguiente propiedad: $\|Q\| < \frac{\delta}{2}$.

Las digráficas están formadas por una colección de vértices y una colección de flechas. Dada f y la partición Q construimos la digráfica G. Pondremos un vértice por cada uno de los m intervalos de la forma $[s_{i-1}, s_i] = A_i$. Por comodidad llamaremos a esos m vértices también A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Pondremos una flecha de A_i hacia A_j si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A_i) \supset A_j$ y la longitud del intervalo $f^n(A_i)$ es mayor o igual que δ, $l\left(f^n(A_i)\right) \geq \delta$.

A continuación ofrecemos un ejemplo de f y su digráfica G.

Ejemplo 6.1 *Sea $f : I \to I$ la función cuya gráfica es así:*



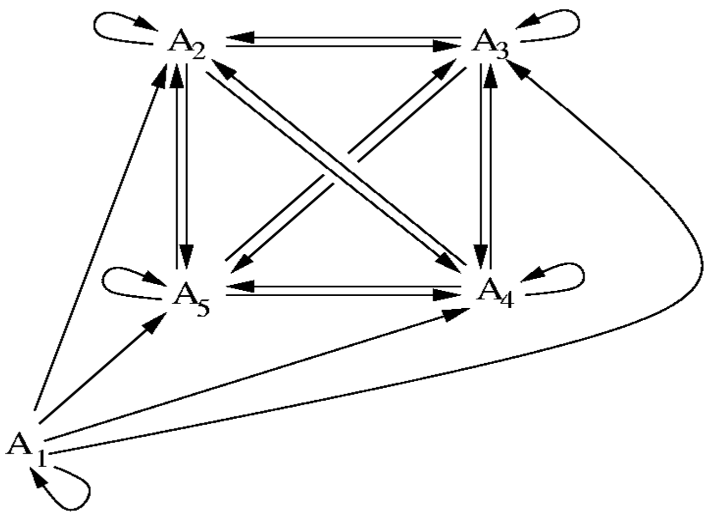
Sea $\delta = \frac{1}{2}$. No es inmediato pero la lectora está invitada a probar lo siguiente:

i) Si $(a,b) \subset \left[\frac{1}{5}, 1\right]$, $a < b$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $f^n((a,b)) = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$.

ii) Si $(a,b) \subset \left[0, \frac{1}{5}\right]$, $a < b$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $f^n((a,b)) = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$.

De estas dos afirmaciones se sigue que para todo subintervalo de I con interior distinto del vacío, llamemosle J, existe un número natural k tal que $l\left(f^k(J)\right) > \delta$.

La partición $Q = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$ cumple la condición $\|Q\| < \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4}$. La digráfica asociada a f, y que Q nos ayuda a construir, es la siguiente:



Regresemos a nuestra argumentación general. La función f, la $\delta > 0$, y la digráfica G cumplen las condiciones que mencionamos antes del ejemplo.

Los siguientes dos lemas describen propiedades de G.

Lema 6.1 *Desde cada vértice A_i, $1 \leq i \leq m$, sale al menos una flecha.*

Demostración. Dada i, $1 \leq i \leq m$, es inmediato que existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $l\left(f^{n_i}\left(A_i\right)\right) \geq \delta$ (ya que A_i tiene interior distinto del vacío). Como para cualquier j tenemos que $l\left(A_j\right) < \frac{\delta}{2}$ (ya que $\|Q\| < \frac{\delta}{2}$), podemos encontrar un A_j tal que $A_j \subset f^{n_i}\left(A_i\right)$. $\square$

Lema 6.2 *Si existe una flecha que va de A_i a A_j y existe una flecha que va de A_j hacia A_k, entonces existe una flecha que va de A_i a A_k.*

Demostración. Las flechas $A_i \to A_j$ y $A_j \to A_k$ nos proporcionan dos números naturales n_i y n_j tales que $f^{n_i}(A_i) \supset A_j$ y $f^{n_j}(A_j) \supset A_k$. Además, $l\left(f^{n_i}(A_i)\right) \geq \delta$ y $l\left(f^{n_j}(A_j)\right) \geq \delta$. Por lo tanto $f^{n_i+n_j}(A_i) \supset f^{n_j}(A_j) \supset A_k$, y $l\left(f^{n_i+n_j}(A_i)\right) \geq \delta$. $\square$

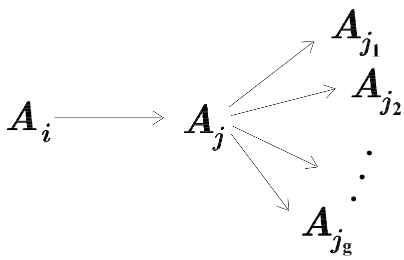
El *grado* de A_i, que denotaremos por $gd\left(A_i\right)$, será el número de flechas que inician en A_i. Si existe una flecha de A_i hacia A_j diremos que A_j es *accesible* desde A_i.

Observación. Es inmediato, a partir del lema 6.2, que si A_j es accesible desde A_i, entonces $gd(A_i) \geq gd(A_j)$. Todos los vértices que son accesibles desde A_j son también accesibles desde A_i.

Tomemos un número fijo i, $1 \leq i \leq m$, y consideremos el vértice A_i. De entre todos los vértices accesibles desde A_i escogemos el vértice A_j que cumple la siguiente propiedad:

$$gd(A_j) = \min\{gd(A_k) \,|A_k \text{ es accesible desde } A_i\}.$$

Sea $g = gd(A_j)$ y sean $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_g}$ los g vértices accesibles desde A_j.



Como cualquier A_{j_k}, $1 \leq k \leq g$, es accesible desde A_i, entonces $gd(A_{j_k}) \geq g = gd(A_j)$. Por otro lado, por el lema 6.2, $gd(A_{j_k}) \leq gd(A_j) = g$. Así, para cualquier A_{j_k} se tiene que $gd(A_{j_k}) = g$. De hecho, gracias al mismo lema, los g vertices accesibles desde cada uno de los A_{j_k} deben ser $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_g}$.

Tomemos ahora el intervalo A_{j_1} y con todas sus posibles imágenes bajo las distintas iteraciones de f formamos el siguiente conjunto:

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_1}).$$

Las demostraciones de las siguientes observaciones no son difíciles.

Observaciones:

i) $(A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup ... \cup A_{j_g}) \subset B$.

ii) Para cualquier par de números k y l, $1 \leq k \leq g$, $1 \leq l \leq g$, se tiene que:

$$\cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_k}) = \cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_l}).$$

iii) $f(B) = B$.

Sea A la cerradura del conjunto B, $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_1})}$. En el conjunto A, como veremos en seguida, la función f muestra propiedades muy interesantes desde el punto de vista del estudio de su dinámica.

Lema 6.3 *El conjunto A satisface las siguientes tres condiciones:*
i) $int\,(A) \neq \phi$.
ii) Para cada $x \in A$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un intervalo cerrado $[c, d] \subset I$, con $c < d$, tal que $[c, d] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $[c, d] \subset A$. Observa que esta condición implica que todo punto de A es punto de acumulación de A (y con ello, A es un conjunto perfecto).
iii) $f\,(A) = A$.

Demostración.
i) Es inmediata, ya que $int\,(B) \neq \phi$.
ii) Observemos primero que f cumple la siguiente condición: Si C es cualquier subintervalo de I con la propiedad de que $int\,(C) \neq \phi$, entonces $int\,(f\,(C)) \neq \phi$ también.
Ahora, sean $x \in A$ y $\varepsilon > 0$. Existe $y \in \cup_{n=1}^{\infty} f^n\,(A_{j_1})$ tal que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f^{n_1}\,(A_{j_1})$. Por tanto

$$f^{n_1}\,(A_{j_1}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \phi.$$

Como $f^{n_1}\,(A_{j_1})$ es un intervalo cerrado con interior distinto del vacío, existen u y $\eta > 0$ tales que

$$\begin{aligned} (u - \eta, u + \eta) &\subset f^{n_1}\,(A_{j_1}) \text{ y} \\ (u - \eta, u + \eta) &\subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Tomando $[c, d] = \left[u - \frac{\eta}{2}, u + \frac{\eta}{2}\right]$ la demostración de ii) está completa.
Conviene aquí hacer la siguiente observación: Como $[c, d] \subset f^{n_1}\,(A_{j_1})$, entonces existe un subintervalo de A_{j_1} con interior distinto del vacío, $[s, t] \subset A_{j_1}$, tal que $f^{n_1}\,([s, t]) = [c, d]\,.$
iii) Sea $y \in f\,(A)$ y sea $x \in A$ tal que $f\,(x) = y$. Sea $\{b_i\}$ una sucesión que cumple lo siguiente: $\{b_i\} \subset B$ y $\lim_{i\to\infty} b_i = x$. Como f es continua se sigue que la sucesión $\{f\,(b_i)\}$ converge a $f\,(x) = y$. Y como $f\,(B) = B$, concluimos que $\{f\,(b_i)\} \subset B$, y con ello $y \in \overline{B} = A$. Por tanto $f\,(A) \subset A$.
Dado que $B = f\,(B) \subset f\,(A)\,,$ y que $f\,(A)$ es un conjunto cerrado, entonces $A = \overline{B} \subset f\,(A)\,.$ $\square$

Proposición 6.1 *El conjunto de los puntos periódicos de $f\,|_A : A \to A$ forma un conjunto denso en A.*

Demostración. Sea $(a,b) \subset I$ tal que $(a,b) \cap A \neq \phi$. Es suficiente demostrar que la intersección $Per\,(f\,|_A) \cap ((a,b) \cap A)$ es distinta del vacío.

Gracias a la parte ii) del lema 6.3, existen dos subintervalos cerrados con interior distinto del vacío, $[c,d]$ y $[s,t]$, y un número natural n_1 tales que

a) $[s,t] \subset A_{j_1}$,

b) $[c,d] \subset ((a,b) \cap A)$, y

c) $f^{n_1}([s,t]) = [c,d]$.

Por otro lado, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $l\,(f^{n_2}([c,d])) > \delta$. Por tanto $f^{n_2}([c,d])$ contiene a algún A_{j_k}.

La flecha $A_{j_k} \to A_{j_1}$ nos proporciona un tercer número natural, n_3, con la propiedad de que $A_{j_1} \subset f^{n_3}(A_{j_k})$.

En suma, $[c,d] \subset f^n([c,d])$ donde $n = n_1 + n_2 + n_3$. y con ello concluimos que existe $y \in [c,d]$ tal que $f^n(y) = y$. Es inmediato que $y \in Per\,(f\,|_A) \cap ((a,b) \cap A)$. $\square$

Obsérvese que la proposición anterior implica que para cada f en nuestra familia el conjunto $Per\,(f)$ tiene cardinalidad infinita.

Proposición 6.2 *La función $f\,|_A : A \to A$ es transitiva en A.*

Demostración. Sean $E = (a,b)$ y $C = (\alpha,\beta)$ dos subintervalos de I. Supongamos que las intersecciones $E \cap A$ y $C \cap A$ ambas son distintas del vacío. Por el lema 6.3, existen dos subintervalos cerrados con interior distinto del vacío, $[c,d]$ y $[s,t]$, y un número natural n_1 tales que

a) $[s,t] \subset A_{j_1}$,

b) $[c,d] \subset (C \cap A)$, y

c) $f^{n_1}([s,t]) = [c,d]$.

Sea D un subintervalo de $E \cap A$ con interior distinto del vacío. Sean $n_2 \in \mathbb{N}$ y A_{j_k} tales que $A_{j_k} \subset f^{n_2}(D)$. Y sea n_3, otro número natural, con la propiedad de que $A_{j_1} \subset f^{n_3}(A_{j_k})$.

Es inmediato que $f^{n_1+n_2+n_3}(D) \cap (C \cap A)$ es distinto del vacío. Como $D \subset E \cap A$, la demostración está completa. $\square$

Ejercicio 6.1 *Muestra que el conjunto A es, en realidad, una unión finita de intervalos cerrados.*

Observación. Para los que conocen el concepto de sistema dinámico discreto *caótico* según la definición propuesta por R. L. Devaney (ver [Dev] página 50) es conveniente hacer aquí un pequeño alto en el camino. La función $f\,|_A : A \to A$ es transitiva en A y su conjunto de puntos periódicos forma una conjunto denso en A. Es sabido que estas dos condiciones implican, cuando trabajamos en conjuntos perfectos (ver [Ban]), que $f|_A$ tiene *sensibilidad a las condiciones iniciales* en A (esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $x \in A$ y para toda bola abierta con centro en x, digamos $B_\eta(x)$, $\eta > 0$, existen $y \in B_\eta(x) \cap A$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $|f^m(x) - f^m(y)| > \varepsilon$). Estas tres condiciones (transitividad, densidad de puntos periódicos y sensibilidad) nos dicen que $f|_A : A \to A$ induce un sistema dinámico *caótico* en A.

Algunos lectores tal vez sospechen que es posible demostrar que $f|_A : A \to A$ es sensible a las condiciones iniciales en A sin recurrir al argumento *externo* que mencionamos antes: *transitividad y densidad de puntos periódicos implican sensibilidad.* Y estos lectores tienen razón. Para ellos es el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6.2 *Sea $f \in \mathcal{L}$.*

i) Demuestra que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en todo el intervalo I.

ii) Demuestra que $f|_A : A \to A$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en A.

Una vez solucionado este último ejercicio la demostración de la siguiente proposición está completa.

Proposición 6.3 *La función $f|_A : A \to A$ es caótica en A.* $\square$

El siguiente resultado resume nuestros avances en la búsqueda de órbitas aperiódicas para elementos de nuestra familia a través de la búsqueda de lugares donde se presente transitividad. Su demostración es inmediata a partir de lo realizado hasta aquí.

Proposición 6.4 *Dada $f \in \mathcal{L}$, existe un conjunto A con interior distinto del vacío y existe un subconjunto de A denso en A, llamémosle J, tal que para todo $x \in J$ se tiene que $\omega(x, f) = A$. Con ello la cardinalidad del $\omega(x, f)$ es infinita no numerable.*

Demostración. De los teoremas 4.2 y 4.3, y de la proposición 6.2, se sigue la afirmación contenida en esta proposición. $\square$

Para finalizar discutiremos un poco sobre los siguientes dos conjuntos: El conjunto de todos los puntos en I cuya órbita es aperiódica, Γ, y el conjunto de todos los puntos cuya órbita es asintóticamente periódica, Ψ. Es decir,

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \{x \in I \,|\text{la cardinalidad de } \omega(x,f) \text{ es infinita}\} \\
\Psi &= I \setminus \Gamma = \{x \in I \,|\text{la cardinalidad de } \omega(x,f) \text{ es finita}\}.
\end{aligned}
$$

Ya demostramos, en la proposición 3.2, que Γ es denso en I. La siguiente proposición contiene otra argumentación de este mismo hecho además de información extra sobre el conjunto Ψ.

Proposición 6.5 *Los conjuntos Γ y Ψ son ambos conjuntos densos en I.*

Demostración. Sean $x \in I$ y $\varepsilon > 0$. Iniciemos modificando ligeramente la partición que definimos al inicio de esta sección. Además de la condición que ya cumple, $\|Q\| < \frac{\delta}{2}$, le pediremos que también cumpla lo siguiente: La norma de Q es tal que existe un subintervalo A_i que está totalmente contenido en $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [0,1]$. Para este vértice A_i encontramos los vértices A_j y $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_g}$ como hicimos antes.

Gracias a las flechas $A_i \to A_j$ y $A_j \to A_{j_1}$ y a la definición del conjunto A, existe un número natural m tal que el conjunto $f^m(A_i) \cap A$ tiene interior distinto del vacío. Por tal razón existen $a \in I$ y $b \in I$ tales que $|x-a| < \varepsilon$, $|x-b| < \varepsilon$, $f^m(a) \in Per(f|_A)$ y $f^m(b) = c$ donde es aperiódico bajo f. Esto implica que $\omega(a,f)$ tiene cardinalidad finita y $\omega(b,f)$ tiene cardinalidad infinita. $\square$

Una posible redacción más simple de lo que hemos demostrado es la siguiente: Lector(a) toma un lápiz; dibuja una línea quebrada en el cuadradito $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Comenzando en el punto $(0,a)$, manteniendo el trazo de izquierda a derecha y terminando en el punto $(1,b)$, $0 \leq a,b \leq 1$. Cuida de que en cada segmento de recta la pendiente sea mayor que uno o menor que menos uno. Al final obtendrás la gráfica de una función definida del $[0,1]$ en el $[0,1]$ con las siguientes propiedades: los puntos que tienen órbita aperiódica forman un conjunto denso en $[0,1]$; los puntos cuya órbita es asintóticamente periódica también forman un conjunto denso en $[0,1]$; y existe un subconjunto cerrado, con interior distinto del vacío, donde la función presenta *caos* desde el punto de vista de R. L. Devaney.

Agradecimientos. Estas notas nacieron a partir de una conferencia que el autor ofreció en el marco del XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (Guadalajara, 1999). Todas las gráficas fueron realizadas por Héctor Miguel Cejudo Camacho del Laboratorio de Visualización

Matemática (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM). Pilar Valencia Saravia leyó una versión preliminar y sus comentarios ayudaron a mejorar esta versión final. El profesor Jefferson King sugirió el acertado (cree el autor) título de *LAS QUEBRADITAS*.

Referencias

[Ban] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Monthly, 1992, 332-334.

[Blo] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension,* Lecture Notes in Math. 1523, Springer Verlag, 1991.

[Dev] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition,* Addison Wesley, 1989.

[Roy] H. L. Royden, *Real Analysis.* Segunda edición. Macmillan Company, 1968.

Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM,
Ciudad Universitaria, CP 04510,
D.F. México.
e-mail: hml@hp.fciencias.unam.mx