# SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS

RAUL VALLEJO GARAMENDI
Departamento de Matemáticas
Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

**Resumen.** El objetivo es dar nuevas demostraciones del teorema de Morera y del teorema de Montel para las funciones $\Psi$-hiperholomorfas.

1. En el artículo [1] se demuestran algunas propiedades de las soluciones del sistema de Moisil-Theodorescu. Como es conocido el sistema de Moisil-Theodorescu se puede considerar como una generalización del sistema de Cauchy-Riemann, al caso de tres variables. El mencionado sistema es a su vez una clase particular de las así llamadas funciones $\Psi$-hiperholomorfas, ver por ejemplo [2] y [3]. El objeto del presente artículo es demostrar algunas propiedades de las funciones hiperholomorfas. Es pertinente hacer notar que las funciones $\Psi$-hiperholomorfas, contienen como casos particulares a las funciones holomorfas y a las funciones que satisfacen el sistema de Moisil-Theodorescu.

   Haremos aquí un breve recordatorio de las definiciones de funciones hiperholomoras, para mayores detalles ver por ejemplo [2] ó [3].

   Denotaremos por $\Omega \subset \mathbb{R}^{\gtrdot}$ ($\gtrdot = \nVdash, \nsupseteq$), una región acotada con frontera $\partial\Omega$ lisa a trozos y compacta y por $S^{m-1}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{\gtrdot}$.

   Por $i_0, i_1, i_2, i_3$ denotremos las unidades habituales en el sistema de cuaterniones.

   Sea $f = \sum_{k=0}^{3} f_k i_k : \Omega \to H$ y $\vec{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ una función con valores en $\mathbb{R}^{\nsupseteq}$.

   Sean $\Psi := \{\Psi^{4-m}, \ldots, \Psi^3\} \in H^m$, $\bar{\Psi} := \{\bar{\Psi}^{4-m}, \ldots, \bar{\Psi}^3\}$, se definen en $C^1(\Omega, H)$ los operadores ${}^{\Psi}D$ y $D^{\Psi}$ por las fórmulas:

$$ {}^{\Psi}D[f] = \sum_{k=4-m}^{3} \Psi^k \partial_k f $$

$$ D^{\Psi}[f] = \sum_{k=4-m}^{3} \partial_k f \cdot \Psi^k $$

   Denotaremos por $\Delta_H$ el operador de Laplace $m-$dimensional, es conocido (ver [2] ó [3]) que para que se cumplan las igualdades siguientes:

$$ {}^{\Psi}D \cdot^{\bar{\Psi}} D =^{\bar{\Psi}} D \cdot^{\Psi} D = D^{\Psi} \cdot D^{\bar{\Psi}} = D^{\bar{\Psi}} D^{\Psi} \cdot = \Delta_H $$

   es necesario y suficiente que

$$ \Psi^j \overline{\Psi^k} + \Psi^k \overline{\Psi^j} = 2\delta_{jk} \quad \forall j, k \tag{1} $$

Estas igualdades son equivalentes a

$$\left\langle \vec{\Psi^j}, \vec{\Psi^k} \right\rangle_{R^4} = \delta_{jk} \qquad \begin{array}{rcl} j & = & 0,1,2,3 \\ k & = & 0,1,2,3 \end{array}$$

Cualquier conjunto $\Psi$ de cuaterniones con la propiedad (1) se le llama conjunto estructural.

Es fácil de comprobar también las igualdades siguientes:

$$^{\Psi}D[f \cdot g] =^{\Psi} D[f] \cdot g + \sum_{k=4-m}^{3} \Psi^k \cdot f \cdot \partial_k g$$

$$D^{\Psi}[f \cdot g] = \sum_{k=4-m}^{3} \partial_k f \cdot g \cdot \Psi^k + f \cdot D^{\Psi}[g].$$

Sea $\Psi$ un conjunto estructural y una región $\Omega$. Se definen los conjuntos siguientes:

$$^{\Psi}M(\Omega) := ker^{\Psi}D = \{f \in C^1(\Omega, H) | ^{\Psi}D[f] = 0\}$$

$$M^{\Psi}(\Omega) := kerD^{\Psi} = \{f \in C^1(\Omega, H) | D^{\Psi}[f] = 0\}$$

Llamaremos a los elementos del primer conjunto las funciones izquierdas $\Psi-$hiperholomorfas y a los elementos del segundo conjunto las funciones derechas $\Psi-$hiperholomorfas, estos conjuntos se llamarán, por brevedad, clases de funciones hiperholomorfas.

Se introducen ahora las formas diferenciales:

$$\sigma_{\Psi x}^{(m-1)} = -sgn\Psi \sum_{k=4-m}^{3} (-1)^k \Psi^k d\hat{x}^k \qquad m = 3,4$$

donde $d\hat{x}^k$ es la forma diferencial $dx^{4-m} \wedge \ldots \wedge dx^3$ con el múltiplo $dx^k$ omitido.

Sean $f, g \in C^1(\bar{\Omega}, H)$, entonces calculando directamente se obtiene:

$$d(g\sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f) = (-1)^{m-1} sgn\Psi (D^{\Psi}[g] \cdot f + g^{\Psi}D[f])dx.$$

donde $dx$ es la forma diferencial del volumen $m-$dimensional en $\mathbb{R}^{>}$.

Si ponemos $g = 1$ en la expresión anterior obtenemos:

$$d(g\sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f) = (-1)^{m-1} sgn\Psi ^{\Psi}D[f]dx.$$

El kernel de Cauchy $K_{\Psi}$, generado por un conjunto estructural $\Psi$.

Sea

$$\theta_m(x) = \frac{1}{|x|^{m-2}} \qquad m = 3, 4$$

Definimos

$$K_\Psi(x) = \frac{1}{(m-2)|S^{m-1}|}\, {}^{\bar{\Psi}}D[\theta_m](x) = \frac{1}{|S^{m-1}||x|^m} \sum_{k=4-m}^{3} \overline{\Psi^k} x^k.$$

Aquí

$$|S^{m-1}| = \begin{cases} 4\pi & si \quad m = 3 \\ 2\pi^2 & si \quad m = 4 \end{cases}$$

Este es el volumen de la esfera $(m-1)$ dimensional en $\mathbb{R}^{>}$.

Formularemos todas las afirmaciones para las funciones $\Psi-$hiperholomorfas izquierdas, pero es obvio que los resultados son válidos para las funciones $\Psi-$ hiperholomorfas derechas y ya no mencionaremos lo de izquierda o derecha.

Es necesario hacer notar que el núcleo $K_\Psi$ es una función $\Psi-$hiperholomorfa y que vale la fórmula integral de Cauchy, es decir si $f$ es $\Psi-$hiperholomorfa y $\partial\Omega$ es suave a trozos entonces:

$$(-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{\partial\Omega} K_\Psi(\tau - x)\sigma^{(m-1)}_{\Psi,\tau} f(\tau) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in R^m \backslash \bar{\Omega} \end{cases}$$

Ver por ejemplo [2] ó [3].

El propósito principal del presente trabajo es dar una nueva demostración de los teoremas de Morera y de Montel para las funciones hiperholomorfas.

2. **Teorema (Morera)**. Sea $\Omega \subset R^m$ $m = 3, 4$ un abierto y $f : \Omega \to H$ una función contínua, entonces para que $f$ sea $\Psi-$hiperholomorfa es necesario y suficiente que para cualquier bola $B(a, r)$ tal que $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$ se tenga que $\displaystyle\int_{\partial B(a,r)} \sigma^{(m-1)}_{\Psi,x} f = 0$.

**Demostración**: La necesidad de la condición se sigue inmediatamente del teorema de Stokes, en efecto:

$$\int_{\partial B(a,r)} \sigma^{(m-1)}_{\Psi,x} f = \int_{B(a,r)} d(\sigma^{(m-1)}_{\Psi,x} f) = (-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{B(a,r)} {}^{\Psi}D[f]dx = 0.$$

Pasemos ahora a la demostración de la afirmación recíproca. Supongamos primero que $f \in C^1(\Omega, H)$, si $f$ no fuera $\Psi-$hiperholomorfa, existiría una bola $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$ tal que ${}^{\Psi}Df(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{B(a, r)}$ pero entonces se tendría:

$$\int_{\partial B(a,r)} \sigma^{(m-1)}_{\Psi,x} f = (-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{B(a,r)} {}^{\Psi}D[f]dx \neq 0.$$

Una contradicción con el hecho de que $\int_{\partial B(a,r)} \sigma^{(m-1)}_{\Psi,x} f = 0$.

Supongamos ahora que $f$ es únicamente continua. Es conocido el hecho de que existe una función $\varphi \in C^{\infty}(R^m, R)$, tal que

$$supp\varphi \subset \{x \in R^m | |x| \leq 1\} \text{ y } \int_{R^m} \varphi(t)dt = 1 \text{ y } \varphi(t) \geq 0.$$

Definimos $\varphi_\epsilon$ de la manera siguiente:

$$\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-m}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$$

y formemos la convolución con $f$

$$f_\epsilon(x) := \int_{R^m} \varphi_\epsilon(t)f(x-t)dt.$$

No es difícil de ver que $f_\epsilon$ está definida para $\epsilon$ suficientemente pequeñas y es de clase $C^{\infty}$. Sea ahora $B(a,r)$ una bola tal que $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\overline{B(a, r+\epsilon_0)} \subset \Omega$.

Entonces para $0 < \epsilon < \epsilon_0 f_\epsilon$ está definida en $\overline{B(a,r)}$ y además $f_\epsilon$ converge uniformemente a $f$ en $\overline{B(a,r)}$ cuando $\epsilon \to 0$. En efecto:

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| = |f(x) - \int_{|t|\leq\epsilon_0} \varphi_\epsilon(t)f(x-t)dt| =$$

$$= |\int_{|t|\leq\epsilon_0} \varphi_\epsilon(t)f(x)dt - \int_{|t|\leq\epsilon_0} \varphi_\epsilon(t)f(x-t)dt| =$$

$$= |\int_{|t|\leq\epsilon_0} (f(x) - f(x-t))\varphi_\epsilon(t)dt| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{3} \int_{|t|\leq\epsilon} |(f_j(x) - f_j(x-t))\varphi_3(t)dt| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{3} \int_{|t|\leq\epsilon_0} |f_j(x) - f_j(x-t)|\varphi_\epsilon(t)dt.$$

Por la continuidad uniforme de $f_j$ en $\overline{B(a, r+\epsilon_0)}$ se tiene que
$\forall\eta > 0_{\exists}\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ se obtiene $|f_j(x) - f_j(x-t)| < \frac{\eta}{4}$ tomando $\epsilon < \delta$ obtenemos de la desigualdad anterior que

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| \leq \sum_{j=0}^{3} \frac{\eta}{4} \int_{|t|\leq\epsilon_0} \varphi_\epsilon(t)dt = \eta. \quad \forall x \in \overline{B(a,r)}$$

Esto demuestra la convergencia uniforme de $f_\epsilon$ a $f$ en $\overline{B(a,r)}$. Demostremos que para cualquier bola $\overline{B(b,\rho)} \subset \overline{B(a,r)}$ se tiene que

$$\int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\varphi,x}^{(m-1)} f_\epsilon(x) = 0 \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

En efecto

$$\int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f_\epsilon(x) = \int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} \int_{|t|\leq\epsilon_0} \varphi_\epsilon(t) f(x-t)dt$$

Cambiando el orden de integración se obtiene

$$\int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f_\epsilon(x) = \int_{|t|\leq\epsilon_0} \varphi_\epsilon(t)dt \int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f(x-t).$$

En la integral $\int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f(x-t)$ hacemos el cambio de variable $y = x - t$, entonces $\sigma_{\Psi,y+t}^{(m-1)} = \sigma_{\Psi,y}^{(m-1)}$ y la integral nos queda $\int_{\partial B(b-t,\rho)} \sigma_{\Psi,y}^{(m-1)} f(y)$.

Como $|t| \leq \epsilon_0$ entonces $\overline{B(b-t,\rho)} \subset \Omega$ y por lo tanto
$\int_{\partial B(b-t,\rho)} \sigma_{\Psi,y}^{(m-1)} f(y) = 0$.

Por consiguiente $\int_{\partial B(b,\rho)} \sigma_{\Psi,x}^{(m-1)} f_\epsilon(x) = 0$.

como $f_\epsilon \in C^\infty(\overline{B(a,r)})$ se sigue que ${}^\Psi D f_\epsilon(x) = 0$ $\forall x \in \overline{B(a,r)}$ $0 < \epsilon < \epsilon_0$

Por lo tanto $f_\epsilon$ es hiperholomorfa, y por la representación integral se tiene que $\forall x \in B(a,r)$.

$$f_\epsilon(x) = (-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{\partial B(a,r)} K_\Psi(t-x)\sigma_{\Psi,t}^{(m-1)} f_\epsilon(t).$$

Por la convergencia uniforme de $f_\epsilon$ a $f$ en $\overline{B(a,r)}$ pasando al límite en la igualdad anterior cuando $\epsilon \to 0$ obtenemos

$$f(x) = (-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{\partial B(a,r)} K_\Psi(t-x)\sigma_{\Psi,t}^{(m-1)} f(t).$$

y ésto demuestra que ${}^\Psi D f(x) = 0$ $\forall x \in B(a,r)$, como $B(a,r)$ es arbitrario se sigue que ${}^\Psi D f(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$.

3. Antes de demostrar el teorema de Montel veremos algunos resultados preliminares.

   Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^>$ una región acotada con frontera lisa a trozos y $f, g : \partial\Omega \to H$ dos funciones contínuas, entonces se tiene la estimación siguiente:

   $$|\int_{\partial\Omega} g(t)\sigma_{\Psi,t}^{(m-1)} f(t)| \leq M \begin{pmatrix} sup|g(t)| \\ t \in \partial\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sup|f(t)| \\ t \in \partial\Omega \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Esta estimación se obtiene por los métodos habituales para desigualdades de este estilo.

Tiene lugar el teorema siguiente que es análogo a uno de las funciones holomorfas.

**Teorema**: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{>}$ una región $(m = 3, 4)$ y $A \subset^{\Psi} M(\Omega)$ un subconjunto de funciones $\Psi-$hiperholomorfas, acotado uniformemente por compactos en $\Omega$, entonces $A$ es equicontinuo por compactos.

**Demostración**: Demostremos primero que la familia $A$ es equicontinua en las bolas cerradas $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$. Como en la demostración del teorema anterior existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\overline{B(a, r+\epsilon_0)} \subset \Omega$; por la fórmula integral $\forall x \in \overline{B(a,r)}$ se tiene

$$f(x) = (-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{\partial B(a,r+\epsilon_0} K_{\Psi}(t-x)\sigma_{\psi,t}^{(m-1)} f(t)$$

Sean $x, x' \in \overline{B(a,r)}$ y veamos la expresión siguiente.

(2) $f(x) - f(x') = (-1)^{m-1} sgn\Psi \int_{\partial B(a,r+\epsilon_0)} [K_{\Psi}(t-x')]\sigma_{\Psi,t^{(m-1)}} f(t)$.

Examinemos la diferencia

$$K_{\Psi}(t-x) - K_{\Psi}(t-x') = \frac{1}{|S^{m-1}|} \sum_{k=4-m}^{3} \overline{\Psi^k}[\frac{t^k - x^k}{|t-x|^m} - \frac{t^k - {x'}^k}{|t-x'|^m}] =$$

$$\frac{1}{|S^{m-1}|} \sum_{k=4-m}^{3} \overline{\Psi^k} \frac{(t^k - x^k)|t-x'|^m - |t-x|^m |t^k - {x'}^k|}{|t-x|^m |t-x'|^m}$$

Estimando, obtenemos

$$|K_{\Psi}(t-x) - K_{\Psi}(t-x')| \leq \frac{1}{|S^{m-1}|} \sum_{k=4-m}^{3} \frac{|(t^k - x^k)|t-x'|^m - |t-x|^m (t^k - {x'}^k)|}{|t-x|^m |t-x'|^m}$$

Puesto que $t \in \partial B(a, r+\epsilon_0)$ y $x, x' \in \overline{B(a,r)}$ obtenemos

$$|t-x| \geq |t-a+a-x| \geq |t-a| - |a-x| \geq \epsilon_0$$

y análogamente $|t-x'| \geq \epsilon_0$.

Luego entonces

$$|K_{\Psi}(t-x) - K_{\Psi}(t-x')| \leq M' \sum_{k=4-m}^{3} |(t^k - x^k)|t-x'|^m - |t-x|^m (t^k - {x'}^k)| =$$

donde $M'$ es una cierta constante,

$$= M' \sum_{k=4-m}^{3} |(t^k - x^k)|t - x'| - (t^k - x^k)|t - x|^m + (t^k - x^k)|t - x|^m - |t - x|^m (t^k - x'^k)|$$

$$\leq M' \sum_{k=4-m}^{3} \{|t^k - x^k|||t - x'|^m - |t - x|^m| + |t - x|^m |x^k - x'^k|\} \leq$$

$$\leq M' \sum_{k=4-m}^{3} \{|t - x||x - x'|(|t - x'|^{m-1} + \cdots + |t - x|^{m-1}) + |t - x|^m |x - x'|\}$$

Puesto que $t \in \partial B(a, r+\epsilon_0)$, $x, x' \in \overline{B(a,r)}$ se tiene que $|t-x| \leq 2r+\epsilon_0$ y $|t-x'| \leq 2r+\epsilon_0$ y por lo tanto

$$|K_\Psi(t-x) - K_\Psi(t-x')| \leq M''|x - x'| \qquad \begin{array}{l} \forall t \in \partial B(a, r+\epsilon_0) \\ \forall x, x' \in \overline{B(a,r)} \end{array}$$

donde $M''$ es una cierta constante.

Por lo tanto

(**) $\sup |K_\Psi(t-x) - K_\Psi(t-x')| \leq M''|x - x'| \qquad t \in \partial B(a, r+\epsilon_0)$

Puesto que $A$ está uniformemente acotada por compactos, se tiene que existe $M'''$ tal que $|f(x)| \leq M''' \; \forall x \in \partial B(a, r+\epsilon_0) \; \forall f \in A$. de (*), (**) y (2) se sigue entonces que

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'| \quad \forall f \in A \qquad \forall x, x' \in \overline{B(a,r)}$$

y ésto demuestra la equicontiniuidad de $A$ en $\overline{B(a,r)}$.

Demostremos la equicontinuidad de la familia $A$ en un compacto cualquiera. Sea $K \subset \Omega$ compacto, entonces $\forall x \in K \; \exists r_x > 0$ tal que $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega$, las bolas $B(x\frac{r_x}{3})$ forman una cubierta abierta de $K$, por lo tanto existe una subcubierta finita.

$$B(x_1, \frac{r_1}{3}) \ldots, B(x_s, \frac{r_s}{3}).$$

Por lo que se demostró anteriormente, para cada cada una de las bolas $B(x_1, r_1), \ldots, B(x_s, r_s)$ existen constantes $M_j, j = 1, 2, \ldots, s$ tales que $\forall x, x' \in B(x_j, r_j)$ se tiene $|f(x) - f(x')| \leq M_j|x - x'|$. Sea $M = max\{M_1, M_2, \ldots, M_s\}$.

Damos $\epsilon > 0$ arbitrario y escogemos $\delta$ tal que $0 < \delta < min\{\frac{r_1}{3}, \ldots \frac{r_s}{3}, \frac{\epsilon}{M}\}$ entonces si $|x-x'| < \delta$ es fácil de ver que $|f(x)-f(x')| < \epsilon \, \forall f \in A$. Esto demuestra la equicontinuidad de la familia $A$ en $K$. El teorema está demostrado.

Demostraremos ahora el teorema de Montel. La demostración sigue las líneas de una de las demostraciones de éste teorema para las funciones holomorfas de una variable.

**Teorema de Montel**. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{>} \; m = 3, 4$ una región y $\{f_n\} \subset^{\Psi} M(\Omega)$ una sucesión de funciones $\Psi-$hiperholomorfas uniformemente acotada por compactos, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente por compactos a una función $f \in^{\Psi} M(\Omega)$.

**Demostración**. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ un conjunto denso numerable en $\Omega$, consideremos la sucesión $\{f_n(a_1)\}$, puesto que $\{a_1\}$, es un compacto, esta sucesión tiene una subsucesión convergente, que denotaremos por $\{f_n^1(a_1)\}$ así

$$\{f_n^1(a_1)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1^1(a_1), f_2^1(a_1), \ldots, f_n^1(a_1), \ldots\} \to b_1.$$

Valuemos la subsucesión $f_n^1$ en $\{a_2\}$, entonces por consideraciones análogas al caso anterior, la sucesión $\{f_n^1(a_2)\}$ tiene una subsucesión convergente que denotaremos por

$$\{f_n^2(a_2)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1^2(a_2), f_2^2(a_2), \ldots, f_n^2(a_2), \ldots\} \to b_2.$$

Repitiendo el proceso inductivamente obtenemos

$$\begin{array}{c} f_1^1(a_1), f_2^1(a_1) \ldots f_n^1(a_1), \ldots \to b_1 \\ f_1^2(a_2), f_2^2(a_2) \ldots f_n^2(a_2), \ldots \to b_2 \\ f_1^3(a_3), f_2^3(a_3) \ldots f_n^3(a_3), \ldots \to b_3 \\ ----------------------------- \\ f_1^k(a_k), f_2^k(a_k) \ldots f_n^k(a_k), \ldots \to b_k \\ ----------------------------- \end{array}$$

Cada sucesión $\{f_n^k\}_{n\in N}$ es subsucesión de la anterior $\{f_n^{k-1}\}_{n\in N}$ $k \geq 2$.

Tomamos ahora la subsucesión diagonal, es decir la subsucesión $\{f_n^n\}_{n\in N}$, como es fácil de ver $\begin{array}{ccc} f_n^n(a_k) & \to & b_k \\ n & \to & \infty \end{array}$ $\forall k \in N$.

Demostremos que $\{f_n^n(x)\}$ converge $\forall x \in \Omega$. Para ésto demostraremos que es una sucesión de Cauchy.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y estimemos $|f_n^n(x) - f_l^l(x)|$

Por el teorema anterior $f_n^n$ es equicontinua por compactos, pro lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $\forall y, y' \in \overline{B(x,\delta)} \subset \Omega$, se sigue que

$|f_n^n(y) - f_n^n(y')| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall y, y'$ tales que $|y - y'| < \delta$ y $\forall n \in N$. Puesto que $\{a_n\}$ es denso en $\Omega$ existe $a_k \in B(x,\delta)$, entonces se tiene

$$|f_n^n(x) - f_l^l(x)| = |f_n^n(x) - f_n^n(a_k) + f_n^n(a_k) - f_l^l(a_k) + f_l^l(a_k) - f_l^l(x)| \leq$$

$$|f_n^n(x) - f_n^n(a_k)| + |f_n^n(a_k) - f_l^l(a_k)| + |f_l^l(a_k) - f_l^l(x)|$$

Puesto que $\{f_n^n(a_k)\}$ es sucesión de Cauchy existe $N$ tal que $\forall n, l > N$ se tiene $|f_n^n(a_k) - f_l^l(a_k)| < \frac{\epsilon}{3}$ y puesto que $|x - a_k| < \delta$ se tiene también que $|f_n^n(x) - f_n^n(a_k)| < \frac{\epsilon}{3}$ y $|f_l^l(a_k) - f_l^l(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ y por consiguiente $|f_n^n(x) - f_l^l(x)| < \epsilon\ \forall l, n > N$.

Esto demuestra que $\{f_n^n(x)\}$ converge $\forall x \in \Omega$.

Demostremos que la sucesión $\{f_n^n\}$ converge uniformemente por compactos, para ésto basta demostrar lo siguiente:

Sea $a \in \Omega$, y $\epsilon > 0$ arbitrario, por la convergencia de $f_n^n(a)$ existe $N$ tal que $\forall n, l > N$ se sigue que $|f_n^n(a) - f_l^l(a)| < \frac{\epsilon}{3}$, por la equicontinuidad por compactos, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in B(a, \delta)$ se tiene
$|f_n^n(x) - f_n^n(a)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall n \in N$, entonces de aquí se sigue fácilmente que
$|f_n^n(x) - f_l^l(x)| < \epsilon\ \forall n, l > N\ \forall x \in B(a, \delta)$. Como cualquier compacto lo podemos cubrir por un número finito de estas bolas, de ahí se sigue la convergencia uniforme por compactos. De este hecho se sigue además que la función límite es una función hiperholomorfa.

## Referencias


**1.** O. L. Bezrukova. Estabilidad de la clase de soluciones del sistema de Moisil-Theodoresku. Novisibirsk 1983 50 pags. (Preprint A.C. URSS. Instituo de Matemáticas de Siberia No. 46) (en ruso).

**2.** M. V. Shpario, N. L. Vasilievski. Quaternionic $\Psi-$hiperholomorphe Functions, Singular Operators with Quaternionic Cauchy Kernel and Analogues of the Riemann Boundary (Aparecerá como dos artículos en "Complex variables, theory and applications").

**3.** M. V. Shaprio, Some remarks on Generalizations of the one dimensional Complex Analysis: Hipercomplex Approach. Preprint Dep. of Math. CINVESTAV del IPN No. 131, 1993, México.

**4.** A. Sudbery Quaternionic analysis. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1979) 85, 199.