Notas sobre Interpolación, fórmula de Taylor y resolución aproximada de ecuaciones.

Antonio Luis Martínez Rico

25 de junio de 1998

Índice General

1 Interpolación **7**
1.1 Generalidades 7
1.2 Interpolación polinómica 10
1.2.1 Introducción 10
1.2.2 Fórmula de Lagrange para la interpolación polinómica 13
1.2.3 El problema de interpolación de Taylor con la fórmula de Lagrange 17
1.2.4 Fórmula de Newton para el polinomio de interpolación. Diferencias divididas. 21
1.2.5 Polinomio de interpolación construido mediante diferencias finitas 29

2 Fórmula de Taylor **35**
2.1 Teoremas de Rolle y del valor medio 35
2.2 El teorema de Taylor 38
2.2.1 El teorema de Taylor 38
2.2.2 Desarrollos limitados 41

3 Resolución aproximada de ecuaciones **45**
3.1 Introducción 45
3.2 Separación de raíces 47
3.2.1 Ubicación inicial 47
3.2.2 Refinamiento 48
3.2.3 Metodología general 49
3.3 Primeros métodos de resolución 50
3.3.1 Métodos gráficos 50
3.3.2 Método de bisección 51
3.3.3 Método de las secantes (cuerdas) 53
3.3.4 Método de Newton (tangentes) 56
3.4 Métodos de iteración 58
3.4.1 Introducción 58

3.4.2 Teoremas de convergencia 59

Índice de Figuras

1.1 Parte de la gráfica de la función 1.1. 8
1.2 Parte de la gráfica de la función 1.6 9
1.3 Parte de la gráfica del polinomio 1.29 14
1.4 Parte de la gráfica del polinomio 1.30. 15
1.5 El polinomio básico de Lagrange $l_0(t)$ del ejemplo 5. 16
1.6 Gráficas de la función $\ln(1+x)$ y de su polinomio de Taylor de orden 5 para $x=0$ en las proximidades de este punto. . . . 21
1.7 Parte de la gráfica del polinomio de interpolación del ejemplo 14. 28
1.8 Una malla de puntos sobre la recta real. 30
1.9 Parte de la gráfica del polinomio del ejemplo 17. 34

2.1 La tangente es horizontal en un punto de la curva. 36
2.2 Ilustración del teorema del valor medio. La curva dibujada tiene tangente en todos sus puntos. 36
2.3 El valor $f(a+h)$ se puede obtener utilizando el valor de $f(a)$ y el de la derivada de f en un punto intermedio. 38
2.4 El polinomio de Taylor de orden 3 de la función del ejemplo 20. 41

3.1 Ilustración del teorema de Bolzano. Obsérvese que la función no es derivable en un par de puntos. 47
3.2 Parte de la gráfica de la función $f(x)=x^3-2x^2+x-1$. . . . 50
3.3 La recta corta al eje de abscisas en un punto x_1 próximo a la raíz. 53
3.4 El punto de corte x_2 se aleja de la raíz al tomar el punto equivocado para construir la recta. 54
3.5 Ilustración del caso 1. 55
3.6 Ilustración del caso 2. 55
3.7 Las tangentes tienen puntos de corte cada vez más próximos a la raíz. 57
3.8 Gráfica de la derivada de $y=1+2x^2-x^3$. 61
3.9 Parte de la gráfica de $y=1+2x^2-x^3$. 62

Capítulo 1

Interpolación

1.1 Generalidades

Un problema muy común de la Matemática aplicada consiste en partir de una tabla de valores de una función y evaluar dicha función para valores de la variable que no figuran en la tabla. Por supuesto, esto significa que o bien no conocemos la expresión analítica de la función o bien la conocemos pero nos interesa sustituirla por otra más sencilla. Tal problema se denomina de **interpolación**.

Ejemplo 1 *La siguiente tabla nos muestra los resultados de una experiencia efectuada sobre el movimiento de un objeto con el fin de hallar la relación existente entre el tiempo y la velocidad de dicho objeto. La primera columna nos indica el tiempo en segundos y la segunda la velocidad en metros por segundo. Prescindimos del error de medición con el fin de hacer más sencillos nuestros cálculos.*

t (s)	*v* $(m \cdot s^{-1})$
0	*0*
1	*0.4*
2.5	*1*
3	*1.5*

Una pregunta que nos podemos hacer a la luz de estos datos es la siguiente: ¿Cuál es su velocidad al cabo de 2 segundos? Para responder a esta cuestión es conveniente construir una función lo más sencilla posible cuyos valores en $t = 0$, $t = 1$, $t = 2.5$ *y* $t = 3$ *coincidan con los dados por la tabla. Una vez obtenida tal función bastará hacer la sustitución* $t = 2$ *en su argumento. En* *este sentido, la función polinómica*[1]

$$p(t) = 0.1 \cdot t^3 - 0.35 \cdot t^2 + 0.65 \cdot t \tag{1.1}$$

cumple estos requisitos puesto que es sencilla y sus valores en los puntos dados son los de la tabla. De esta manera, podemos aventurar que la velocidad al cabo de 2 segundos es:

$$p(2) = 0.1 \cdot 2^3 - 0.35 \cdot 2^2 + 0.65 \cdot 2 = 0.7 \ \ m \cdot s^{-1}. \tag{1.2}$$

La función 1.1 se dice que es una interpolación a partir de los datos o bien que interpola a la función velocidad $v = v(t)$ en los puntos de la tabla.

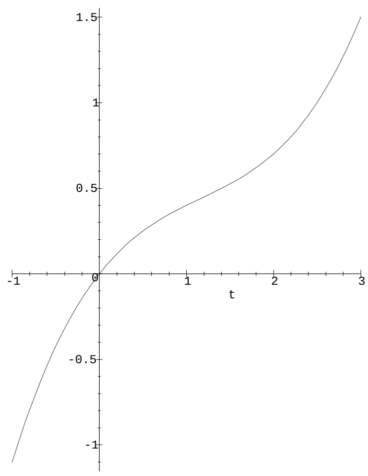

Figura 1.1: Parte de la gráfica de la función 1.1.

Ejemplo 2 *Sea $f(x)$ una función periódica de la que conocemos los siguientes valores*

x (radianes)	$f(x)$
0	*1*
1	*2.3*
2	*3*

[1]Explicaremos más adelante cómo obtenemos este polinomio.

Se nos pide interpolar una función con respecto a estos datos. Como se trata de una función periódica hacemos la hipótesis de que tiene la forma:

$$f(x) = A + B\cos x + C \operatorname{sen} x, \tag{1.3}$$

donde A, B *y* C *son números reales a determinar. Con los valores de la tabla formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:*

$$\left.\begin{array}{c} A + B\cos 0 + C\operatorname{sen} 0 = 1 \\ A + B\cos 1 + C\operatorname{sen} 1 = 2.3 \\ A + B\cos 2 + C\operatorname{sen} 2 = 3 \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Resulta compatible y determinado con solución aproximada:

$$A = 1.647397205,\ B = -0.6473972051,\ C = 1.191238932. \tag{1.5}$$

Sustituyendo en 1.3 resulta la función:

$$h(x) = 1.647397205 + -0.6473972051\cos x + 1.191238932\operatorname{sen} x \tag{1.6}$$

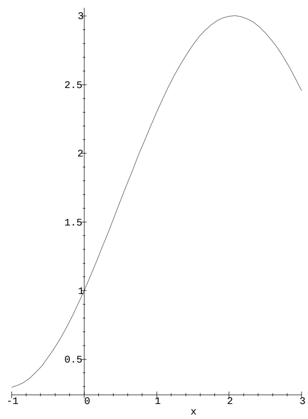

Figura 1.2: Parte de la gráfica de la función 1.6

Un problema de interpolación precisa de dos elementos:

1. Los datos que se desea que sean comunes a la función dada y a la que se va a interpolar.

2. El tipo de función que se va a usar como interpolación.

En el ejemplo 1, los datos los ha proporcionado una tabla y el tipo de función interpoladora ha sido polinómica. En el ejemplo 2, los datos también han venido de una tabla y el tipo de función interpoladora ha sido una combinación lineal de funciones trigonométricas. A partir de ahora, estudiamos el problema de interpolación utilizando sólo funciones polinómicas.

1.2 Interpolación polinómica

1.2.1 Introducción

Las funciones polinómicas se cuentan entre las más simples. Su expresión general adopta la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \tag{1.7}$$

donde n es un entero positivo y los valores a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números reales con a_n no nulo. Estas funciones son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Es decir, son derivables indefinidamente con continuidad en toda la recta real.

Ejemplo 3 *La función real de variable real*

$$p(x) = 2 - 3x + x^2 - 5x^3 \tag{1.8}$$

es una función polinómica de tercer grado, formada por la suma de los monomios 2*,* $-3x$*,* x^2 *y* $-5x^3$*, con coeficientes* 2*,* -3*,* 1 *y* -5*. Su coeficiente director (el correspondiente al monomio de mayor grado) es* -5*. Sus derivadas sucesivas son:*

$$p'(x) = -3 + 2x - 15x^2, \tag{1.9}$$

$$p''(x) = 2 - 30x, \tag{1.10}$$

$$p'''(x) = -30, \tag{1.11}$$

$$p^{(IV)}(x) = p^{(V)}(x) = \ldots = p^{(n)}(x) = 0, \ n \geq 4. \tag{1.12}$$

Obsérvese que las derivadas son también polinómicas y que a partir del orden cuatro son todas nulas.

Supongamos que conocemos los valores de una función f en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Es decir, conocemos $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $\ldots$, $y_n = f(x_n)$. ¿Podemos hallar alguna función polinómica que concida con f en dichos puntos? ¿Será única o habrá más de una? La respuesta a estas interrogantes nos la da la siguiente proposición.

Teorema 1 (Interpolacion polinomica) *Sean* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ $n+1$ *puntos del plano con abscisas* x_i *diferentes. Existe un único polinomio* p_n *de grado* n *que pasa por dichos puntos. Esto es, verifica* $p_n(x_i) = y_i$ *para* $i = 0, 1, \ldots, n$.

Prueba. Sea $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ el polinomio interpolador. En tal caso, las condiciones impuestas implican que

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots n. \tag{1.13}$$

Tales $n+1$ relaciones forman un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas: $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Probamos que es compatible determinado. En efecto, el determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & . & . & x_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & . & . & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & . & x_n^n \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

Este determinante es del tipo Vandermonde y su valor es

$$\Delta = \prod_{j<i}^{n} (x_i - x_j). \tag{1.15}$$

Es decir, es el producto de todos los factores que podemos construir de la forma $(x_i - x_j)$ con $j < i$. Por ello, como hemos supuesto que $x_i \neq x_j$ (los puntos del plano que hemos tomado tienen abscisas diferentes). El determinante no es nulo y la matriz del sistema tiene rango máximo. Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado y tiene solución única. Hallaremos valores únicos para los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, dando lugar a un único polinomio $p_n(x)$. ■

Corolario 1 (al teorema 1) *Sean* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ *puntos distintos del dominio de una función* $f(x)$. *Existe un polinomio único* $p_n(x)$ *que interpola a* f *en dichos puntos.*

Prueba. Bastará utilizar el teorema 1 para los puntos
$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. ■

Ejemplo 4 *Vamos a obtener el polinomio interpolador del ejemplo 1. Recordemos que la tabla de valores de la que partimos es*

t (s)	$v\ (m \cdot s^{-1})$
0	*0*
1	*0.4*
2.5	*1*
3	*1.5*

Como tenemos $n+1 = 4$ *puntos con abscisas distintas, el polinomio interpolador se busca de grado* $n = 3$*:*

$$p_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \tag{1.16}$$

Las condiciones de la tabla permiten escribir el sistema:

$$\begin{aligned} p_3(0) &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = 0, \\ p_3(1) &= a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 0.4, \\ p_3(2.5) &= a_0 + a_1 \cdot 2.5 + a_2 \cdot (2.5)^2 + a_3 \cdot (2.5)^3 = 1, \\ p_3(3) &= a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 = 1.5, \end{aligned} \tag{1.17}$$

que una vez simplificado resulta:

$$\left.\begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.4 \\ a_0 + 2.5 \cdot a_1 + 6.25 \cdot a_2 + 15.625 \cdot a_3 = 1 \\ a_0 + 3 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + 27 \cdot a_3 = 1.5 \end{array}\right\} \tag{1.18}$$

El determinante de este sistema es:

$$\Delta = \left| \begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 6.25 & 15.625 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{array} \right|. \tag{1.19}$$

Aplicando el desarrollo de 1.15 su valor es:

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-0) \cdot (2.5-1) \cdot (2.5-0) \cdot (3-2.5) \cdot (3-1) \cdot (3-0) \\ &= 1 \cdot 1.5 \cdot 2.5 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 3 = 11.25. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Al no ser nulo, el sistema es compatible determinado y podemos resolverlo por Cramer:

$$a_0 = \frac{\left| \begin{array}{llll} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 6.25 & 15.625 \\ 1.5 & 3 & 9 & 27 \end{array} \right|}{11.25} = \frac{0}{11.25} = 0, \tag{1.21}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6.25 & 15.625 \\ 1 & 1.5 & 9 & 27 \end{vmatrix}}{11.25} = \frac{7.3125}{11.25} = 0.65, \tag{1.22}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.4 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 & 15.625 \\ 1 & 3 & 1.5 & 27 \end{vmatrix}}{11.25} = \frac{-3.9375}{11.25} = -0.\,35, \tag{1.23}$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.4 \\ 1 & 2.5 & 6.25 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 1.5 \end{vmatrix}}{11.25} = \frac{1.125}{11.25} = 0.1. \tag{1.24}$$

El polinomio obtenido es 1.1

$$p_3(t) = 0 + 0.65 \cdot t - 0.35 \cdot t^2 + 0.1 \cdot t^3. \tag{1.25}$$

El ejemplo 4 es una pequeña muestra de las dificultades que surgen al aplicar directamente el corolario al teorema 1. Es claro que a medida que obtengamos tablas con un mayor número de puntos, los sistemas lineales son de mayor volumen y dificultad (al menos manual) de cálculo. Esto nos impulsa a buscar otros métodos para obtener el polinomio de interpolación.

1.2.2 Fórmula de Lagrange para la interpolación polinómica

Para hallar el polinomio de interpolación en los $n+1$ puntos

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ resulta cómodo construir un polinomio que valga cero en n de tales puntos y uno en el restante. Por ejemplo, si queremos un polinomio de grado $n = 3$ que valga cero en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$ y uno en el punto de abscisa $x = 3$, podemos escribir

$$p_3(x) = a(x-1)(x-2)(x-4). \tag{1.26}$$

El coeficiente a lo determinamos con la condición $p_3(3) = 1$. En concreto:

$$p_3(3) = a(3-1)(3-2)(3-4) = 1, \tag{1.27}$$

que simplificado proporciona la ecuación

$$-2a = 1. \tag{1.28}$$

Es decir $a = -\frac{1}{2}$, quedando 1.26 como:

$$p_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4) \tag{1.29}$$

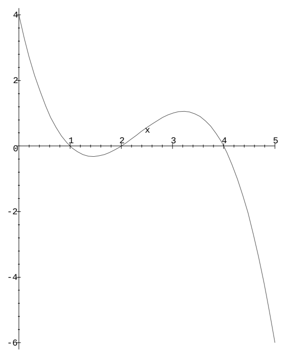

Figura 1.3: Parte de la gráfica del polinomio 1.29

Observamos que si multiplicamos el polinomio 1.29 por un número arbitrario, obtenemos un polinomio cuyo valor en $x = 3$ es ese número arbitrario. Así, el polinomio:

$$p_3(x) = -5 \cdot \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4) \tag{1.30}$$

vale cero en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$ y 5 en $x = 3$.

Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

Definición 1 (Polinomio basico de Lagrange) *Sean $n+1$ puntos de la recta real: $x_0, x_1, \ldots, x_n$. El polinomio básico de Lagrange $l_k(x)$ para x_k es aquel polinomio de grado n que cumple:*

1. $l(x_j) = 0$ para todo $j \neq k$.

2. $l(x_k) = 1$.

Su expresión es

$$l_k(x) = \frac{1}{\left(\prod_{i\neq k}^{n}(x_k - x_i)\right)} \prod_{i\neq k}^{n}(x - x_i) \tag{1.31}$$

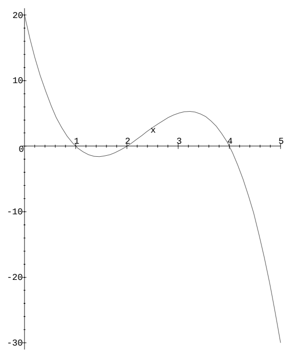

Figura 1.4: Parte de la gráfica del polinomio 1.30.

Ejemplo 5 *Volvemos al ejemplo 1 y a los datos de la tabla:*

t (s)	v $(m \cdot s^{-1})$
0	0
1	0.4
2.5	1
3	1.5

El polinomio básico de Lagrange $l_0(t)$ para $t = 0$ es aquel de grado tres que vale cero en todos los puntos restantes: $t = 1$, $t = 2.5$ y $t = 3$ y uno en $t = 0$. Aplicando la expresión 1.31 queda

$$l_0(t) = \frac{1}{(0-1)(0-2.5)(0-3)} \cdot (t-1)(t-2.5)(t-3), \tag{1.32}$$

Los polinomios básicos de Lagrange para $t = 1$, $t = 2.5$ y $t = 3$ son, respectivamente:

$$l_1(t) = \frac{1}{(1-0)(1-2.5)(1-3)} \cdot (t-0)(t-2.5)(t-3), \tag{1.33}$$

$$l_2(t) = \frac{1}{(2.5-0)(2.5-1)(2.5-3)} \cdot (t-0)(t-1)(t-3), \tag{1.34}$$

$$l_3(t) = \frac{1}{(3-0)(3-1)(3-2.5)} \cdot (t-0)(t-1)(t-2.5). \tag{1.35}$$

Utilizando los polinomios básicos de Lagrange podemos dar una expresión relativamente cómoda del polinomio de interpolación.

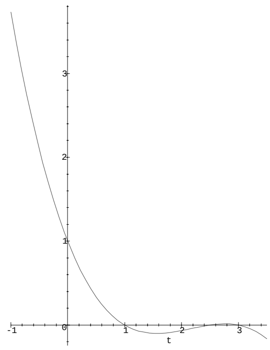

Figura 1.5: El polinomio básico de Lagrange $l_0(t)$ del ejemplo 5.

Teorema 2 *Sea f una función real y sean $n+1$ puntos del plano:*
$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$*, con abscisas x_i diferentes, y ordenadas $y_i = f(x_i)$. El polinomio de interpolación de f en dichos puntos es*

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x), \tag{1.36}$$

donde los $l_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ son los polinomios básicos de Lagrange de los respectivos x_k.

Prueba. Sabemos por corolario al teorema 1 que existe un único polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Claramente, el polinomio 1.36 verifica $L_n(x_k) = y_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ ya que

$$L_n(x_k) = y_0 l_0(x_k) + y_1 l_1(x_k) + \ldots + y_k l_k(x_k) + \ldots + y_n l_n(x_k) \tag{1.37}$$

y los valores $l_i(x_k)$ son nulos para $i \neq k$, siendo $l_k(x_k) = 1$. La unicidad exige que el polinomio 1.36 sea el polinomio de interpolación. ■

El polinomio de interpolación 1.36 se dice obtenido mediante la fórmula de Lagrange. De forma concisa tal fórmula es

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{1}{\left(\prod_{i \neq k}^{n} (x_k - x_i)\right)} \prod_{i \neq k}^{n} (x - x_i) \right) \tag{1.38}$$

Ejemplo 6 *Aplicando la fórmula de Lagrange para polinomio de interpolación del ejemplo 1 obtenemos:*

$$\begin{aligned}
L_3(x) = {} & 0 \cdot \frac{1}{(0-1)(0-2.5)(0-3)} \cdot (t-1) \cdot (t-2.5) \cdot (t-3) + \\
& +0.4 \cdot \frac{1}{(1-0)(1-2.5)(1-3)} \cdot (t-0) \cdot (t-2.5) \cdot (t-3) + \\
& +1 \cdot \frac{1}{(2.5-0)(2.5-1)(2.5-3)} \cdot (t-0) \cdot (t-1) \cdot (t-3) + \\
& +1.5 \cdot \frac{1}{(3-0)(3-1)(3-2.5)} \cdot (t-0) \cdot (t-1) \cdot (t-2.5). \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Este polinomio desarrollado nos tiene que dar el mismo resultado que 1.1 del ejemplo 1 puesto que es único.

1.2.3 El problema de interpolación de Taylor con la fórmula de Lagrange

Aunque en el capítulo 2 vemos con detalle la fórmula de Taylor, podemos emplear la fórmula de Lagrange para hallar el **polinomio de Taylor**, el cual es la parte principal de la fórmula (pero no toda). La clave de esto consiste en que el polinomio de Taylor no es más que un polinomio de interpolación que cumple ciertas condiciones.

Definición 2 (Polinomio de Taylor) *Sea f una función n veces diferenciable en un abierto A de la recta real y sea $x_0 \in A$. El polinomio de Taylor $T_n(x)$ de orden n para $f(x)$ en el punto x_0 es el polinomio de grado n a lo sumo que verifica:*

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), \ k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (1.40)$$

Es decir, se trata del polinomio de grado $\leq n$ cuyas derivadas[2] coinciden con las derivadas de la función en el punto x_0.

No toda función admite un polinomio de Taylor en un determinado punto de su dominio. Las condiciones que permiten garantizar su existencia se expondrán en el capítulo 2. En los párrafos siguientes se asume que las funciónes estudiadas tienen polinomio de Taylor en los puntos dados.

[2] Recordemos que la derivada de orden cero es la propia función.

Ejemplo 7 *Sea la función real de variable real $f(x) = \operatorname{sen} x$, definida en el abierto $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Esta función es indefinidamente derivable con continuidad. Sea también el punto $x_0 = \frac{\pi}{4} \in A$. El polinomio de Taylor $T_3(x)$ de orden 3 para f en el punto x_0 es aquel polinomio de grado ≤ 3 que cumple:*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = T_3\left(\frac{\pi}{4}\right), f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = T_3'\left(\frac{\pi}{4}\right), \\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = T_3''\left(\frac{\pi}{4}\right), f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = T_3'''\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Sustituyendo[3]*, tenemos:*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = T_3\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\sqrt{2}}{2} = T_3'\left(\frac{\pi}{4}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} = T_3''\left(\frac{\pi}{4}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} = T_3'''\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{1.42}$$

Ahora bien, ¿cómo hallamos dicho polinomio? Vemos que las consideraciones que hemos utilizado para la fórmula de Lagrange son aplicables. En efecto, la expresión de un polinomio $q_k(x)$ de grado n a lo sumo y cuyas derivadas son todas nulas en x_0, a excepción de la k-ésima derivada, es

$$q_k(x) = (x - x_0)^k. \tag{1.43}$$

Esto es así debido a que

$$q_k'(x) = k(x - x_0)^{k-1}, \tag{1.44}$$

$$q_k''(x) = k(k-1)(x - x_0)^{k-2}, \tag{1.45}$$

$$\ldots$$

$$q^{(k)}(x) = k!(x - x_0)^0 = k!. \tag{1.46}$$

Si queremos que además dicho polinomio tenga la derivada k-ésima igual a la unidad, debemos dividirlo por $k!$. En efecto,

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)^k}{k!} \tag{1.47}$$

es una función cuya derivada k-ésima es igual a uno en x_0 y las restante nulas (dejamos al lector que lo compruebe). Retomando nuestro ejemplo, tenemos que un polinomio $l_0(x)$ de grado 3 a lo sumo, cuya derivada de orden cero en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ es uno y las restantes nulas es, aplicando 1.47:

$$l_0(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^0}{0!}. \tag{1.48}$$

[3]Recordemos que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Un polinomio $l_1(x)$ de grado 3 a lo sumo, cuya primera derivada en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ es uno y las restantes nulas es:

$$l_1(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1!}. \tag{1.49}$$

Un polinomio $l_2(x)$ de grado ≤ 3, cuya segunda derivada en $\frac{\pi}{4}$ es uno y las restantes nulas es:

$$l_2(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}. \tag{1.50}$$

Finalmente, un polinomio de grado ≤ 3, con tercera derivada en $\frac{\pi}{4}$ igual a uno y las restantes nulas es:

$$l_3(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}. \tag{1.51}$$

Afirmamos que el polinomio $T_3(x)$ de Taylor buscado es

$$T_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} l_1(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_2(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_3(x). \tag{1.52}$$

Así es, ya que

$$\begin{aligned} T_3\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} l_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} l_1\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned} T_3'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} l_0'\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} l_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_2'\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_3'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned} T_3''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} l_0''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} l_1''\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_2''\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_3''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned} T_3'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} l_0'''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} l_1'''\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_2'''\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} l_3'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Obsérvese que este polinomio lo hemos obtenido multiplicando cada término $l_k(x)$ por el valor de la k-ésima derivada en x_0 y sumando los resultados de estos productos. Es decir,

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(x_0)\, l_k(x) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(x_0)\, \frac{(x-x_0)^k}{k!}. \tag{1.57}$$

Con las consideraciones del ejemplo 4 podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3 (Formula del polinomio de Taylor) *Sea $f(x)$ una función n veces diferenciable con continuidad en un entorno del punto x_0 de su dominio. El polinomio de Taylor de orden n para f es:*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\, \frac{(x-x_0)^k}{k!} \tag{1.58}$$

Ejemplo 8 *Vamos a hallar el polinomio de Taylor de orden 5 para $f(x) = \ln(1+x)$ en el punto $x_0 = 0$. De acuerdo con 1.58 resulta:*

$$T_5(x) = \sum_{k=0}^{5} f^{(k)}(0)\, \frac{(x-0)^k}{k!}. \tag{1.59}$$

En la fórmula anterior intervienen las derivadas de la función f, asi que es conveniente hallar su expresión general. Vemos que:

$$f^{(0)}(x) = \ln(1+x), \tag{1.60}$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \tag{1.61}$$

$$f''(0) = (-1)(1+x)^{-2}, \tag{1.62}$$

$$f'''(x) = (-2)(-1)(1+x)^{-3}. \tag{1.63}$$

De esta manera, podemos suponer que:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(1+x) \;\; si\ es\ n = 0 \\ (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \;\; si\ es\ n \geq 1 \end{cases} \tag{1.64}$$

La expresión 1.64 se demuestra por inducción (dejamos esto a cuidado del lector) y sustituida en 1.59 da lugar a:

$$\begin{aligned} T_5(x) &= \ln(1+0) + \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \cdot (k-1)! \cdot (1+0)^{-k} \cdot \frac{(x-0)^k}{k!} = \\ &= \ln 1 + \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \cdot 1^{-k} \cdot \frac{x^k}{k} = 0 + \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Simplificando un poco más obtenemos el polinomio de Taylor buscado:

$$T_5(x) = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}. \tag{1.66}$$

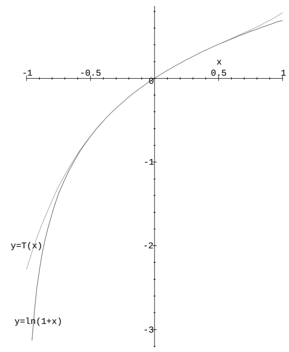

Figura 1.6: Gráficas de la función $\ln(1+x)$ y de su polinomio de Taylor de orden 5 para $x = 0$ en las proximidades de este punto.

1.2.4 Fórmula de Newton para el polinomio de interpolación. Diferencias divididas.

La fórmula de Lagrange para el polinomio de interpolación resulta muy sensible a la adición de valores de interpolación. En efecto, si queremos pasar del polinomio de grado n que interpola a una función f en los puntos $x_0, x_2, \ldots, x_n$ al polinomio de grado $n+1$ que interpola a dicha función en los puntos $x_0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, debemos efectuar de nuevo todos los cálculos pues los polinomio básicos de Lagrange cambian. Para soslayar este inconveniente exponemos a continuación un método de tipo recursivo que se presta muy bien al empleo del ordenador. Introducimos tal método con un ejemplo teórico.

Ejemplo 9 *Supongamos que el polinomio* $p_{k-1}(x)$, $1 \leq k \leq n$, *interpola a* $f(x)$ *en los puntos* $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. *Sea* x_k *un punto distinto de los anteriores y* $p_k(x)$ *el polinomio que interpola a* $f(x)$ *en los puntos* $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$.

¿Qué tienen en común tales polinomios interpoladores? Evidentemente, coinciden sus valores para $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, por lo que su diferencia

$$q_k(x) = p_k(x) - p_{k-1}(x) \tag{1.67}$$

es un polinomio de grado $\leq k$ que se anula para $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Es decir, debe tener la forma[4]:

$$q_k(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}), \tag{1.68}$$

donde A_k es una constante real. En resumen, utilizando 1.67 y 1.68, el polinomio $p_k(x)$ resulta igual a la suma:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x) = p_{k-1}(x) + A_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}). \tag{1.69}$$

*Esta expresión **recursiva** es válida para todo $1 \leq k \leq n$ y su aplicación reiterada hacia atrás (es decir, tomando $k = n, n-1, \ldots, 1$), nos permite definir el polinomio de interpolación $p_n(x)$ para los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en la forma:*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_0(x) + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \qquad (1.70) \\ &\quad + A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Para determinar completamente este polinomio sólo resta hallar el valor de $p_0(x)$ y de los coeficientes A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. En este sentido, si tomamos $x = x_k$ en 1.68, resulta:

$$q_k(x_k) = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}). \tag{1.71}$$

Ninguno de los monomios $(x_k - x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ es nulo ya que x_k se ha tomado distinto a los x_i. Por ello, podemos despejar el valor de A_k de 1.71:

$$A_k = \frac{q_k(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})}. \tag{1.72}$$

Como $1 \leq k \leq n$, el valor de $p_0(x)$ no puede obtenerse por 1.72. Pero es $f(x_0) = p_n(x_0)$, por lo que si hacemos $x = x_0$ en 1.70 queda:

$$f(x_0) = p_0(x_0). \tag{1.73}$$

Para unificar notaciones, convenimos en que $A_0 = p_0(x_0)$ y entonces 1.70 presenta el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \qquad (1.74) \\ &\quad + A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \qquad (1.75) \end{aligned}$$

[4] Ver los párrafos iniciales de la subsección 1.2.2

Cuando añadimos un punto de interpolación más x_{n+1}, sólo tenemos que incluir el término $A_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$ en 1.74 para conseguir el nuevo polinomio de interpolación.

Definición 3 (Polinomio de interpolacion de Newton) *Sean $n+1$ puntos del plano: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, con abscisas x_i diferentes y ordenadas $y_i=f(x_i)$. La expresión*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots \\ &\quad +A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1.76}$$

se llama fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de f en dichos puntos si y sólo si verifica $p_n(x_i)=y_i$ para $i=0,1,\ldots,n$.

Evidentemente, si se nos dan los mismos puntos, el polinomio de interpolación para f obtenido por la fórmula de Lagrange y el obtenido por la fórmula de Newton han de coincidir puesto que, según el teorema 1, tal polinomio es único. Tan sólo difieren en su forma de calcularse. A propósito de cálculos, observaremos que no hemos determinado cómo calcular los coeficientes A_i en la fórmula de Newton.

Ejemplo 10 *Supongamos que queremos hallar la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación del ejemplo 1. Como los puntos son $t_0=0, t_1=2.5$ y $t_2=3$ la fórmula pedida es:*

$$p_3(x)=A_0+A_1(t-0)+A_2(t-0)(t-1)+A_3(t-0)(t-1)(t-2.5). \tag{1.77}$$

Para hallar los coeficientes planteamos las condiciones:

$$p_3(0)=0,\ p_3(1)=0.4,\ p_3(2.5)=1,\ p_3(3)=1.5. \tag{1.78}$$

Que llevadas a la fórmula 1.77 dan lugar a:

$$0=p_3(0)=A_0, \tag{1.79}$$

$$0.4=p_3(1)=A_0+A_1, \tag{1.80}$$

$$1=p(2.5)=A_0+2.5A_1+1.5A_2, \tag{1.81}$$

$$1.5=p_3(3)=A_0+3A_1+6A_2+3A_3. \tag{1.82}$$

Las ecuaciones obtenidas forman un sistema lineal sencillo cuyas soluciones son:

$$A_0=0, \tag{1.83}$$

$$A_1 = 0.4 - A_0 = 0.4 - 0 = 0.4, \tag{1.84}$$

$$A_2 = \frac{1 - A_0 - 2.5A_1}{1.5} = \frac{1 - 0 - 2.5 \cdot 0.4}{1.5} = 0, \tag{1.85}$$

$$A_3 = \frac{1.5 - A_0 - 3A_1 - 6A_2}{3} = \frac{1.5 - 0 - 3 \cdot 0.4 - 6 \cdot 0}{3} = 0.1. \tag{1.86}$$

El polinomio de interpolación queda:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= 0 + 0.4 \cdot t + 0 \cdot t(t-1) + 0.1 \cdot t(t-1)(t-2.5) = \\ &= 0.4 \cdot t + 0.1 \cdot t(t-1)(t-2.5) \end{aligned} \tag{1.87}$$

Si desarrollamos este polinomio resulta el polinomio 1.1 obtenido en el ejemplo 1:

$$p_3(t) = 0.65 \cdot t - 0.35 \cdot t^2 + 0.1 \cdot t^3. \tag{1.88}$$

El siguiente resultado nos proporciona un método generalizado para hallar los coeficientes A_i de la fórmula de Newton.

Teorema 4 *Sea* $p_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$ $+A_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$ *la fórmula de Newton para el polinomio de de* $f(x)$ *en los puntos* $x_0, x_1, \dots, x_n$*. El coeficiente* A_0 *es igual a* $f(x_0)$ *y los coeficientes* A_k*,* $k = 1, 2, \dots, n$ *se obtienen mediante la expresión:*

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)}. \tag{1.89}$$

Prueba. Evidentemente es $p_n(x_0) = f_n(x_0) = A_0$. Probaremos que los restantes A_k se consiguen con 1.89. En efecto, sea $1 \leq k \leq n$, la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_k$ puede ponerse de manera concisa como:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \left(A_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right), \tag{1.90}$$

donde hacemos el convenio de que $\prod_{j=0}^{-1}(x - x_j) = 1$ con el fin de obtener A_0 como primer sumando. La fórmula de Lagrange para este mismo polinomio de interpolación también puede ponerse de forma concisa (ver 1.38) como:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \left(f(x_i) \cdot \frac{1}{\left(\prod_{i \neq j}^{k} (x_i - x_j) \right)} \prod_{i \neq j}^{k} (x - x_i) \right). \tag{1.91}$$

Los términos de grado k de ambos polinomios tiene por coeficientes, respectivamente:

$$A_k, \quad \sum_{i=0}^{k} \left(f(x_i) \cdot \frac{1}{\left(\prod_{i \neq j}^{k} (x_i - x_j) \right)} \right) \tag{1.92}$$

Por ello:

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\left(\prod_{i \neq j}^{k} (x_i - x_j) \right)}. \tag{1.93}$$

Esto termina nuestra prueba. ■

Los coeficientes A_k se llaman diferencias divididas de f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ y se notan por

$$A_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \tag{1.94}$$

Ejemplo 11 *Sean los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y la función $f(x) = 2^x$. La diferencia dividida de f en tales puntos es:*

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ + \frac{f(x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} &= \frac{2^1}{(1-2) \cdot (1-3)} + \frac{2^2}{(2-1) \cdot (2-3)} + \\ + \frac{2^3}{(3-1) \cdot (3-2)} &= \frac{2}{2} + \frac{4}{-1} + \frac{8}{2} = 1 - 4 + 4 = 1. \end{aligned} \tag{1.95}$$

La fórmula 1.74 queda ahora como

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right), \tag{1.96}$$

donde convenimos en que $\prod_{j=0}^{-1} (x - x_0) = 1$ y $f[x_0] = f(x_0)$.

Las diferencias divididas cumplen una serie de propiedades (que no demostraremos) entre las cuales destacan las dos siguientes:

1. Las diferencias divididas son funciones simétricas de sus argumentos. Es decir, cualquier permutación de tales argumentos deja inalterado el valor de la diferencia dividida.

2. Se verifica la siguiente relación:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_k]}{x_0 - x_k}. \tag{1.97}$$

La segunda de estas propiedades nos da la clave para un algoritmo sencillo y eficiente que nos permitirá obtener las diferencias divididas y, en consecuencia, la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación. El ejemplo siguiente nos muestra tal algoritmo.

Ejemplo 12 *Partimos por enésima vez de los datos del ejemplo 1:*

t (s)	v $(m \cdot s^{-1})$
0	0
1	0.4
2.5	1
3	1.5

Convenimos en que $v(t_i) = v[t_i]$. Es decir, los valores de la función son las diferencias divididas de primer orden. De acuerdo con 1.97, tenemos:

$$v[t_0, t_1] = \frac{v[t_0] - v[t_1]}{t_0 - t_1} = \frac{0 - 0.4}{0 - 1} = 0.4, \tag{1.98}$$

$$v[t_1, t_2] = \frac{v[t_1] - v[t_2]}{t_1 - t_2} = \frac{0.4 - 1}{1 - 2.5} = 0.4, \tag{1.99}$$

$$v[t_2, t_3] = \frac{v[t_2] - v[t_3]}{t_2 - t_3} = \frac{1 - 1.5}{2.5 - 3} = 1, \tag{1.100}$$

$$v[t_0, t_1, t_2] = \frac{v[t_0, t_1] - v[t_1, t_2]}{t_0 - t_2} = \frac{0.4 - 0.4}{0 - 2,5} = 0, \tag{1.101}$$

$$v[t_1, t_2, t_3] = \frac{v[t_1, t_2] - v[t_2, t_3]}{t_1 - t_3} = \frac{0.4 - 1}{1 - 3} = 0.3, \tag{1.102}$$

$$v[t_0, t_1, t_2, t_3] = \frac{v[t_0, t_1, t_2] - v[t_1, t_2, t_3]}{t_0 - t_3} = \frac{0 - 0.3}{0 - 3} = 0.1. \tag{1.103}$$

En este caso la fórmula 1.96 del polinomio de interpolación de Newton es:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= v[t_0] + v[t_0, t_1](t - t_0) + v[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1) + \\ &\quad + v[t_0, t_1, t_2, t_3](t - t_0)(t - t_1)(t - t_2). \end{aligned} \tag{1.104}$$

Sustituyendo los valores hallados queda:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= 0 + 0.4 \cdot (t - 0) + 0 \cdot t(t - 1) + 0.1 \cdot t(t - 1)(t - 2.5) = \\ &= 0.4 \cdot t + 0.1 \cdot t(t - 1)(t - 2.5). \end{aligned} \tag{1.105}$$

El lector observará que es el mismo resultado que en el ejemplo 10.

Con objeto de facilitar los cálculos de las diferencias divididas, se suelen disponer los datos en una tabla de la forma:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f[x_3] & & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
 & & f[x_3,x_4] & & & \\
x_4 & f[x_4] & & & &
\end{array}
$$

donde $f[x_i] = f(x_i)$ y el resto de diferencias divididas se calcula mediante la propiedad 1.97. Obsérvese que los coeficientes de la fórmula de Newton son los elementos de la parte superior de la tabla.

Ejemplo 13 *De nuevo utilizamos la tabla*

$t\ (s)$	$v\ (m \cdot s^{-1})$
0	0
1	0.4
2.5	1
3	1.5

Disponemos en forma tabular los cálculos del ejemplo 12:

$$
\begin{array}{lllll}
0 & 0 & & & \\
 & & \frac{0-0.4}{0-1} = 0.4 & & \\
1 & 0.4 & & \frac{0.4-0.4}{0-2,5} = 0 & \\
 & & \frac{0.4-1}{1-2.5} = 0.4 & & \frac{0-0.3}{0-3} = 0.1 \\
2.5 & 1 & & \frac{0.4-1}{1-3} = 0.3 & \\
 & & \frac{1-1.5}{2.5-3} = 1 & & \\
3 & 1.5 & & &
\end{array}
$$

Los elementos de la parte superior de la tabla, comenzando por la segunda columna, son los coeficientes A_i de la fórmula de Newton

Ejemplo 14 *Vamos a aplicar la metodología tabular de las diferencias divididas para hallar la fórmula de Newton del polinomio que interpola a la función $f(x)$ en los puntos de la tabla:*

x	$f(x)$
0	1
1.3	2.1
2	2.2
3.2	4

Sabemos que la expresión buscada es de la forma:

$$p_3(x) = A_0 + A_1(x-0) + A_2(x-0)(x-1.3) + A_3(x-0)(x-1.3)(x-2). \tag{1.106}$$

Los coeficientes A_i se obtienen (de forma aproximada en este caso) de la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{llllll}
0 & 1 & & & & \\
 & & \frac{1-2.1}{0-1.3} = 0.84615 & & & \\
1.3 & 2.1 & & \frac{0.84615-0.14286}{0-2} = -0.35165 & & \\
 & & \frac{2.1-2.2}{1.3-2} = 0.14286 & & \frac{-0.35165-0.71428}{0-3.2} = 0.3331 & \\
2 & 2.2 & & \frac{0.14286-1.5}{1.3-3.2} = 0.71428 & & \\
 & & \frac{2.2-4}{2-3.2} = 1.5 & & & \\
3.2 & 4 & & & &
\end{array}$$

La fórmula de Newton para el polinomio de interpolación[5] *es:*

$$p_3(x) = 1 + 0.84615x - 0.35165x(x-1.3) + 0.3331x(x-1.3)(x-2) \tag{1.107}$$

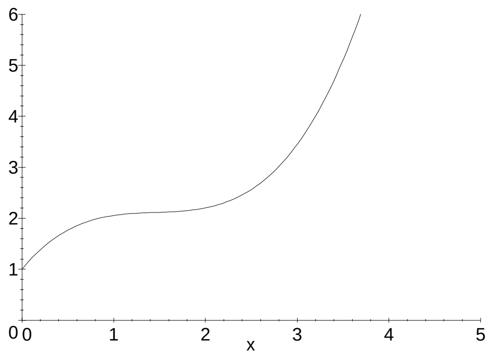

Figura 1.7: Parte de la gráfica del polinomio de interpolación del ejemplo 14.

Un apartado muy interesante del problema de interpolación es el estudio del error cometido. No trataremos este tema, tan sólo mencionamos que *el aumentar número de puntos interpolación no garantiza que el polinomio de interpolación se aproxime más a la función interpolada.*

[5] Esta es una expresión aproximada puesto que los coeficientes son aproximados. El lector puede efectuar los cálculos exactos en la tabla para obtener los coeficientes exactos.

1.2.5 Polinomio de interpolación construido mediante diferencias finitas

Con frecuencia nos encontramos que las tablas sobre las que interpolamos tienen igualmente espaciados los argumentos. En este caso, las llamadas diferencias finitas son de gran utilidad.

Definición 4 (Diferencias finitas) *Sea $y = f(x)$ una función real definida en una "malla" de puntos equiespaciados de la recta real, con distancia $h > 0$ entre dos puntos consecutivos y punto "base" x_0, es decir:*

$$x_k = x_0 + kh, \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.108}$$

Se denomina diferencia finita progresiva de primer orden de f en el punto x_k, al valor:

$$\Delta y_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k). \tag{1.109}$$

Si aplicamos de nuevo el mismo proceso a la función 1.109 obtenemos la diferencia finita progresiva de segundo orden de f en x_k:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= \Delta(\Delta y_k) = (f(x_{k+1} + h) - f(x_k + h)) - (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \quad (1.110) \\ &= f(x_{k+2}) - f(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) - f(x_k). \end{aligned}$$

Reiterando, obtenemos la diferencia finita progresiva de orden $n \geq 3$ para f en x_k. Es decir,

$$\Delta^n y_k = \Delta\left(\Delta^{n-1} y_k\right), \; n \geq 2. \tag{1.111}$$

Para facilitar la notación, convenimos en la diferencia progresiva de orden cero de $y = f(x)$ en x_k es el valor de la función en x_k. En símbolos: $\Delta^0 y_k = y_k$.

Ejemplo 15 *Sea el polinomio $p(x) = 3x^3 - 2x + 1$. Sea la malla de paso $h = 1$ y punto inicial $x_0 = 0$:*

$$x_k = 0 + 1 \cdot k = k, \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \tag{1.112}$$

En tal caso, la diferencia finita progresiva de primer orden de $p(x)$ en x_k es

$$\begin{aligned} \Delta p(x_k) &= p(x_k + 1) - p(x_k) = p(k+1) - p(k) = \\ &= \left(3(k+1)^3 - 2(k+1) + 1\right) - \left(3k^3 - 2k + 1\right) = \quad (1.113) \\ &= 3\left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) - 2k - 2 + 1 - 3k^3 + 2k - 1 = \\ &= 3k^3 + 9k^2 + 9k + 3 - 2k - 2 + 1 - 3k^3 + 2k - 1 = 9k^2 + 9k + 1. \end{aligned}$$

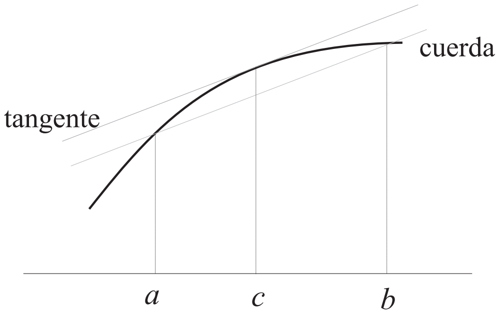

Figura 1.8: Una malla de puntos sobre la recta real.

La diferencia de segundo orden es:

$$\begin{aligned} \Delta^2 p(x_k) &= \Delta(\Delta p(x_k)) = \Delta p(x_k+1) - \Delta p(x_k) = \Delta p(x_{k+1}) - \Delta p(x_k) = \\ &= \left(9(k+1)^2 + 9(k+1) + 1\right) - \left(9k^2 + 9k + 1\right) = 18k + 18. \end{aligned} \tag{1.114}$$

La de tercer orden:

$$\begin{aligned} \Delta^3 p(x_k) &= \Delta\left(\Delta^2 p(x_k)\right) = \Delta^2 p(x_k+1) - \Delta p^2(x_k) = \Delta^2 p(x_{k+1}) - \Delta^2 p(x_k) = \\ &= (18(k+1)+18) - (18k+18) = 18. \end{aligned} \tag{1.115}$$

La de cuarto orden:

$$\begin{aligned} \Delta^4 p(x_k) &= \Delta\left(\Delta^3 p(x_k)\right) = \Delta^3 p(x_k+1) - \Delta p^3(x_k) = \Delta^3 p(x_{k+1}) - \Delta^3 p(x_k) = \\ &= 18 - 18 = 0. \end{aligned} \tag{1.116}$$

Las diferencias de orden 5, 6, 7, etc. son todas nulas. Esta circunstancia es válida para todo polinomio en el siguiente sentido: un polinomio de grado n tiene la diferencia n-ésima constante. En particular, si es

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \;\; con \;\; a_n \neq 0, \tag{1.117}$$

su diferencia n-ésima de paso h es

$$\Delta^n p(x_k) = n! a_n h. \tag{1.118}$$

y las diferencias de orden mayor son nulas. En nuestro ejemplo, es $n = 3$, $a_3 = 3$ y $h = 1$. Por ello, $\Delta^3 p = 3! \cdot 3 \cdot 1 = 18$ y $\Delta^n p = 0$, para $n \geq 4$.

La mayoría de las ocasiones es conveniente disponer los cálculos de diferencias finitas en forma tabular.

Ejemplo 16 *Para el polinomio del ejemplo 15 y la malla $x_k = k$, supongamos que $x_0 = 0$ es el primer punto conocido*[6]*. Entonces una posible tabla horizontal de diferencias finitas progresivas es:*

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	1	2-1=1	19-1=18	36-18=18	18-18=0
1	2	21-2=19	55-19=36	54-36=18	
2	21	76-21=55	109-55=54		
3	76	185-76=109			
4	185				

Una posible tabla diagonal de diferencias finitas es:

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	1				
		2-1=1			
1	2		19-1=18		
		21-2=19		36-18=18	
2	21		55-19=36		18-18=0 .
		76-21=55		54-36=18	
3	76		109-55=54		
		185-76=109			
4	185				

Las diferencias finitas tienen muchas propiedades interesantes. En particular,

1. Para dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas sobre la misma malla, se tiene
$$\Delta (f + g)(x_k) = \Delta f(x_k) + \Delta g(x_k). \tag{1.119}$$

2. Si C es una constante y $f(x)$ una función definida sobre una malla, entonces:
$$\Delta C f(x_k) = C \Delta f(x_k). \tag{1.120}$$

3. Sean m y n dos enteros no negativos y $f(x)$ una función definida sobre una malla. Se cumple que
$$\Delta^m (\Delta^n f(x_k)) = \Delta^{m+n} f(x_k). \tag{1.121}$$

Podemos entender el símbolo delta Δ como un operador, aplicable sobre funciones definidas en conjuntos discretos de tipo malla. En este sentido, las propiedades 1 y 2 nos dicen que dicho operador es lineal. Por otro lado, hay

[6] En toda malla hay que partir de algún punto para poder establecer las diferencias.

una relación entre las diferencias finitas progresivas y las diferencias divididas. Esta relación nos servirá para dar una expresión alternativa de la fórmula de interpolación de Newton cuando los puntos de la tabla estén equiespaciados.

Teorema 5 (Diferencias finitas y divididas) *Sea $x_k = x_0 + kh$ una malla de punto base x_0 y paso $h > 0$. Para todo $n \geq 0$ se verifica que*

$$\Delta^n f(x_k) = n!h^n f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}]. \tag{1.122}$$

Prueba. La prueba se hace por inducción sobre n y se deja al cuidado del lector. ■

Sean x_0, $x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ puntos, ordenados de menor a mayor y equiespaciados una distancia $h > 0$. Recordemos que la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de una función $f(x)$ con valor conocido en tales puntos es:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right), \tag{1.123}$$

con el convenio de que $\prod_{j=0}^{-1}(x - x_0) = 1$ y $f[x_0] = f(x_0)$. Utilizando el teorema 5 podemos obtener las diferencias divididas a través de las diferencias finitas. En efecto, de 1.122 es:

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}] = \frac{\Delta^n f(x_k)}{n!h^n}, \tag{1.124}$$

donde $h > 0$, $n \geq 0$ y $x_k = x_0 + kh$. Tomando $n = i$ y $k = 0$, tenemos:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_i] = \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i}, \tag{1.125}$$

expresión que puede sustituirse en 1.123, resultando:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right). \tag{1.126}$$

La fórmula 1.126 se llama fórmula de Newton progresiva para el polinomio de interpolación.

Ejemplo 17 *Supongamos que de una función polinómica $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tan sólo se conoce que $p(-2) = -16$, $p(-1) = -5$, $p(0) = -2$, $p(1) = -1$ y que su grado es menor que cuatro. Probaremos que sólo existe un polinomio con tales condiciones y lo hallaremos mediante interpolación. De acuerdo con el teorema 1, sólo existe un polinomio de grado tres que pasa por los* *puntos dados. Tal polinomio debe coincidir con el buscado. Además como los puntos dados están equiespaciados una distancia $h = 1$, podemos hallar tal polinomio utilizando la fórmula de interpolación de Newton progresiva. A tal efecto, construimos una tabla de diferencias finitas:*

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
-2	*-16*			
		-5-(-16)=11		
-1	*-5*		*3-11=-8*	
		-2-(-5)=3		*-2-(-8)=6*
0	*-2*		*1-3=-2*	
		-1-(-2)=1		
1	*-1*			

Los valores que se encuentran en las primeras filas de cada columna (a partir de la segunda) son los correspondientes a las diferencias finitas progresivas de orden $n = 0, 1, 2, 3$ en x_0. Estos valores son los que debemos emplear en la fórmula 1.126. Así pues:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\Delta^i p(x_0)}{i!h^i}\cdot\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right) = \frac{\Delta^0 p(x_0)}{0!1^0}\cdot\prod_{j=0}^{-1}(x-x_j) + \\
&\quad + \frac{\Delta^1 p(x_0)}{1!1^1}\cdot\prod_{j=0}^{0}(x-x_j) + \frac{\Delta^2 p(x_0)}{2!1^2}\cdot\prod_{j=0}^{1}(x-x_j) + \\
&\quad + \frac{\Delta^3 p(x_0)}{3!1^3}\cdot\prod_{j=0}^{2}(x-x_j) \\
&= p(x_0)\cdot 1 + \Delta^1 p(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\Delta^2 p(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \\
&\quad \frac{\Delta^3 p(x_0)}{6}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \\
&= -16 + 11\cdot(x-(-2)) - \frac{8}{2}\cdot(x-(-2))\cdot(x-(-1)) + \\
&\quad + \frac{6}{6}\cdot(x-(-2))\cdot(x-(-1))\cdot(x-0) \\
&= -16 + 11(x+2) - 4(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x = \\
&= -2 + x - x^2 + x^3.
\end{aligned} \tag{1.127}$$

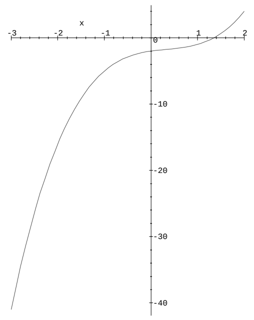

Figura 1.9: Parte de la gráfica del polinomio del ejemplo 17.

Capítulo 2

Fórmula de Taylor

2.1 Teoremas de Rolle y del valor medio

La mayoría de los teoremas sobre derivabilidad de funciones reales de variable real exigen en sus hipótesis la continuidad en compactos del tipo $[a, b]$ y la diferenciabilidad en el interior (a, b) de dichos compactos. Un par de estos teoremas de gran importancia práctica, fundamentales a la hora de deducir el teorema de Taylor, son los llamados teorema de Rolle y teorema del valor medio (o de Cauchy).

Teorema 6 (Rolle) *Si una función $f(x)$ real de variable real es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y toma en los extremos valores iguales: $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Prueba. Como la función f se supone continua en un compacto $[a, b]$, tendrá un máximo y un mínimo absolutos en dicho compacto (esto es consecuencia del teorema de Weierstrass). Si ambos extremos se alcanzan en a y b, la hipótesis $f(a) = f(b)$ nos lleva a concluir que la función es constante, pues su máximo y su mínimo coinciden y, en consecuencia $f'(x) = 0$ para todo x. Si alguno de los extremos los alcanza en un punto c interior, la derivada se anula en él. Esto termina nuestra demostración. ■

Geométricamente, el teorema de Rolle expresa que en el arco de una curva uniforme con tangente en todos sus puntos y extremos a una misma "altura", hay un punto cuya tangente es paralela al eje x.

Teorema 7 (Valor medio) *Si una función $f(x)$ real de variable real es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.1}$$

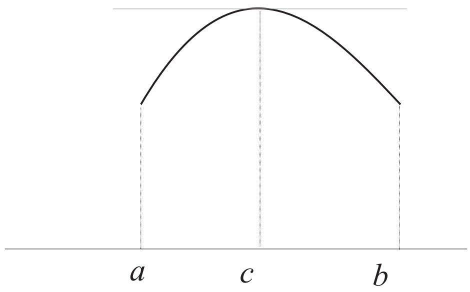

Figura 2.1: La tangente es horizontal en un punto de la curva.

Prueba. La prueba de este teorema se basa en el teorema de Rolle y se deja a cargo del lector. ■

Es decir, existe un punto c en el interior del compacto $[a, b]$ para el que la derivada coincide con el cociente incremental medio. Geométricamente significa que en todo arco de curva uniforme con tangente en todos sus puntos, hay un punto al menos con tangente paralela a la cuerda

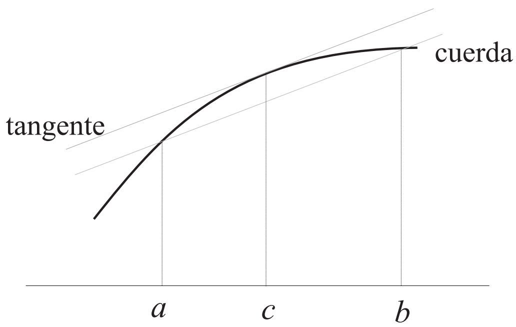

Figura 2.2: Ilustración del teorema del valor medio. La curva dibujada tiene tangente en todos sus puntos.

Ejemplo 18 *La función $f(x) = x^2 - 2x$ es derivable con continuidad en toda la recta real. Así pues, podemos afirmar que es continua en el intervalo $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$ y podemos aplicarle el teorema del valor medio. Existe, al menos, un valor $0 < c < 1$ que es solución de la ecuación:*

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}. \tag{2.2}$$

Como $f'(x) = 2x - 2$, $f(1) = -1$ y $f(0) = 0$, la ecuación 2.2 queda:

$$2c - 2 = -1, \tag{2.3}$$

cuya solución es única:

$$c = \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Utilizando 2.1 podemos expresar el valor de la función f en b como:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(c). \tag{2.5}$$

Si consideramos que f es derivable en un abierto $A \subset \mathbb{R}$, entonces para cualquier punto a interior a dicho abierto y para $h \in \mathbb{R}$, tal que $a+h$ también pertenece a dicho intervalo, se consigue un compacto $[a, a+h]$ donde es aplicable el teorema del valor medio. Por ello, existirá un punto $c \in (a, a+h)$ para el que es cierta la ecuación:

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.6}$$

Esto significa que el valor de f en $a+h$ es:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(c). \tag{2.7}$$

Si hacemos el cambio de variable

$$x = a + h, \tag{2.8}$$

la ecuación 2.7 queda

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(c). \tag{2.9}$$

Esta última igualdad nos indica que f puede ponerse como suma del valor de la función en un punto y un término complementario.

Ejemplo 19 *La función $f(x) = \ln(1+x)$ es derivable en el abierto $A = (-1, +\infty)$. Si tomamos $a = 0$ y $x = a + h \in A$, podemos aplicar 2.9:*

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + (x-0)\frac{1}{c} = \ln 1 + x\frac{1}{c} = x\frac{1}{c}, \tag{2.10}$$

donde ξ pertenece al intervalo abierto definido por 0 y x. Para $x = 2$, tenemos

$$\ln 3 = 2\frac{1}{c}, \text{ con } 0 < c < 2. \tag{2.11}$$

La fórmula de Taylor es una generalización de 2.9.

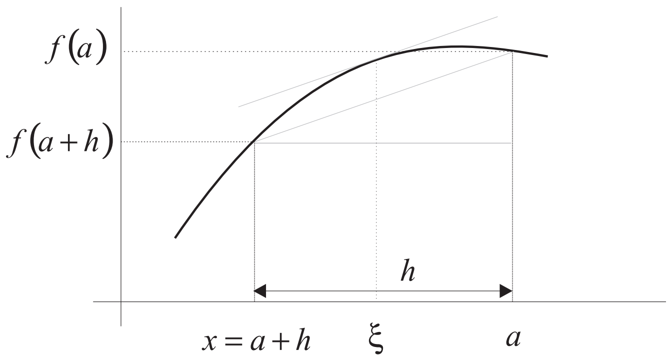

Figura 2.3: El valor $f\,(a+h)$ se puede obtener utilizando el valor de $f\,(a)$ y el de la derivada de f en un punto intermedio.

2.2 El teorema de Taylor

2.2.1 El teorema de Taylor

Teorema 8 *Sea f una función real de variable real derivable hasta el orden n en $[a,b]$, tal que $f^{(n+1)}\,(x)$ existe en (a,b). Entonces se puede expresar $f\,(b)$ en forma de un polinomio de grado n en $(b-a)$ más un término complementario. A saber:*

$$\begin{aligned} f\,(b) &= f\,(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'\,(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''\,(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}\,(a) + \\ &\quad + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\,(c)\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $a < c < b$.

Prueba. Consideremos la función ϕ definida en $[a,b]$ mediante

$$\phi\,(x) = f\,(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}\,(x) \right) - \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{2.13}$$

donde λ es un número real a determinar. Es claro que esta función está bien definida, puesto que todos sus términos existen. Como $\phi\,(b) = 0$, vamos a determinar λ con la condición de que $\phi\,(a) = 0$. Esto es,

$$f\,(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}\,(a) \right) - \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \tag{2.14}$$

quedando:

$$\lambda = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right). \tag{2.15}$$

La función $\phi(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) (esto es consecuencia directa de las hipótesis del teorema sobre $f(x)$). Además, para el valor de λ hallado en 2.15 cumple $\phi(a) = \phi(b)$. De esta forma, podemos aplicarle el teorema de Rolle y existe un punto $c \in (a,b)$ para el que $\phi'(c) = 0$. Como

$$\phi'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) + \lambda \frac{(b-x)^n}{n!}. \tag{2.16}$$

Simplificando los sumatorios, resulta

$$\phi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(\lambda - f^{(n+1)}(x) \right). \tag{2.17}$$

Finalmente, de la condición $\phi'(c) = 0$ se deduce que:

$$\phi'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!} \left(\lambda - f^{(n+1)}(c) \right) = 0, \tag{2.18}$$

y como $a < c < b$, se tiene:

$$\lambda - f^{(n+1)}(c) = 0. \tag{2.19}$$

Esto implica que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ y, en consecuencia, sustituyendo en 2.15 se llega a:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(c) &= \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned} \tag{2.20}$$

El teorema queda así probado. ■

El polinomio $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$ se denomina polinomio de Taylor de orden n en el punto $x = a$ (ver la sección 1.2.3) y el sumando $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

es el llamado resto de Taylor y nos indica el "error" cometido al suplantar la función por el polinomio de Taylor. Haciendo $b = a + h$, **??** queda:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{2.21}$$

La fórmula 2.21 con $a = 0$ recibe el nombre de fórmula de Mac-Laurin.

Ejemplo 20 *Sea $f(x) = e^x$ y supongamos que queremos aproximar tal función con un polinomio de segundo grado. Como $f(x)$ es indefinidamente derivable con continuidad en toda la recta real, podemos elegir un par de puntos a, x, de forma que se pueda aplicar el teorema de Taylor en el intervalo cerrado que definen. Por sencillez, tomaremos $a = 0$ y entonces obtenemos la fórmula de Mac-Laurin:*

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-0)}{1!}f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}f'''(c), \tag{2.22}$$

siendo c un punto entre 0 y x. Como $(e^x)^{(n)} = e^x$ para todo $n \geq 1$, resulta:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}e^c. \tag{2.23}$$

Obtenemos así un valor aproximado de e^x con $x > 0$:

$$1 + x + \frac{x^2}{2}, \tag{2.24}$$

con error:

$$\frac{x^3}{3}e^c. \tag{2.25}$$

En la fórmula de Taylor

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \tag{2.26}$$

el error

$$E(b,c) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{2.27}$$

es un infinitésimo cuando b tiende a a (esto es, su límite es cero). Es más, se trata de un infinitésimo de orden inferior[1] a $(b-a)^n$ ya que

$$\frac{E(b,c)}{(b-a)^n} = \frac{(b-a)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \tag{2.28}$$

[1]Esto quiere decir que va a cero "más deprisa".

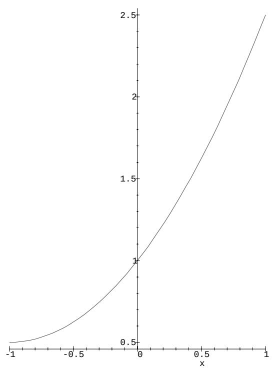

Figura 2.4: El polinomio de Taylor de orden 3 de la función del ejemplo 20.

y como $a < c < b$, es claro que si $b \to a$, entonces $c \to a$ y el término de la derecha de la igualdad es nulo. Para indicar que un infinitésimo $\alpha(x)$ es de orden inferior a otro $\beta(x)$ se escribe

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), \tag{2.29}$$

y se dice que $\alpha(x)$ es "o minúscula" respecto $\beta(x)$. La notación 2.29 permite escribir la fórmula de Taylor como:

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) + o\left((b-a)^n\right). \tag{2.30}$$

2.2.2 Desarrollos limitados

Al aplicar el teorema de Taylor sobre entornos de puntos obtenemos los llamados desarrollos limitados.

Definición 5 (Desarrollo limitado) *Sea f una función real de variable real y sea a un punto de su dominio. Supongamos que para cierto $\varepsilon > 0$, la función f es derivable hasta el orden n en el entorno cerrado $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y existe $f^{(n+1)}(x)$ en el entorno abierto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. La expresión*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \tag{2.31}$$

con $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y c un punto intermedio entre a y x, se llama desarrollo limitado de orden n de f un entorno del punto a. Utilizando la notación "o minúscula" puede ponerse como

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)+o\left((x-a)^n\right). \tag{2.32}$$

El desarrollo limitado no es más que la fórmula de Taylor aplicada en el intervalo $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. En efecto, 2.31 resulta de **??** haciendo $b=x$.

Ejemplo 21 *Vamos a obtener el desarrollo limitado de orden 4 de $f(x)=\cos x$ en un entorno del punto $x=\frac{\pi}{2}$. Evidentemente, f es derivable con continuidad hasta el orden que queramos en toda la recta real. Por ello, tomando cualquier $\varepsilon>0$, resulta que $f(x)=\cos x$ es derivable hasta el orden $n=3$ en $\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right]$ y existe la derivada de orden cuatro en $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$. El desarrollo pedido es:*

$$\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k}{k!}f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}f^{(n+1)}(c), \tag{2.33}$$

donde c es un punto intermedio entre $\frac{\pi}{2}$ y x. Como

$$f'(x)=-\operatorname{sen}x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\operatorname{sen}x,\ f^{(IV)}(x)=\cos x \tag{2.34}$$

obtenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{24}\cos(c). \tag{2.35}$$

Sustituyendo por sus valores numéricos: $-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{24}\cos(c)$. El término final del desarrollo limitado nos indica el error. En este caso, el error es igual a

$$\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{24}\cos(c), \tag{2.36}$$

valor que depende de x y del punto intermedio c. Utilizando la notación "o minúscula" podemos escribir:

$$-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right).$$

Las funciones indefinidamente derivables como las del ejemplo 21 tienen la peculiaridad de que su "error" puede reducirse tanto como se desee. En efecto, para conseguir mejores aproximaciones mediante la fórmula de Taylor, bastará tomar un orden mayor de derivación ya que entonces el error, al ser un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$ se hace cada vez menor. A continuación damos una tabla con los desarrollos limitados en un entorno de cero de las principales funciones elementales.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \ x \in \mathbb{R} \tag{2.37}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.38}$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + o\left(x^n\right), \, a > 0, \, x \in \mathbb{R}, \tag{2.39}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.40}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0\left(x^{2n+1}\right), \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.41}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} +, \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.42}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right), \, x \in \mathbb{R}, \, x \neq 1, \tag{2.43}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + 0\left(x^n\right), \ x > -1. \tag{2.44}$$

Los desarrollos limitados admiten ciertas operaciones sencillas. Así, podemos combinarlos mediante sumas, diferencias, productos y cocientes. También tienen cierta utilidad en el cálculo de límites e integrales.

Ejemplo 22 *Vamos a calcular el límite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{2.45}$$

utilizando desarrollos limitados. Para facilitar nuestro trabajo sólo tomaremos hasta el orden 3:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right), \tag{2.46}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!} + o\left(x^4\right). \tag{2.47}$$

Sustituimos en 2.45 y queda:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)\right)-x}{1-\left(1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}+o\left(x^4\right)\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)}{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}+o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}{\frac{x^2}{8}+o\left(x^4\right)} = \qquad (2.48)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2\left(\frac{x^2}{8}+o\left(x^4\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+o\left(x\right)}{\frac{1}{8}+o\left(x^2\right)} = \\
&= \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{8}} = -4.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que al multiplicar x^2 por una función del tipo $o\left(x^3\right)$ obtenemos un infinitésimo del tipo $o\left(x\right)$.

Capítulo 3

Resolución aproximada de ecuaciones

3.1 Introducción

En muchas ocasiones, nos encontramos con ecuaciones algebraicas o trascendentes relativamente complicadas que no permiten una solución exacta, bien porque no existe fórmula adecuada para ello, bien porque no es conveniente la aplicación de tal fórmula. En tal circunstancia hemos de recurrir a métodos aproximados.

Ejemplo 23 *Sea la ecuación*

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0. \tag{3.1}$$

Si tuviera una raíz entera, ésta es divisor del término independiente. Es decir, -1 *o* 1*. Probamos con estos números pero ninguno es raíz. Concluimos que las raíces no son enteras. Existe una fórmula para las ecuaciones de tercer grado (llamada fórmula de Cardano-Vièta), pero sólo es aplicable cuando tales ecuaciones tienen la forma* $x^3+px+q=0$*. Debemos, pues, transformar 3.1 mediante un cambio de variable. En general, si la ecuación de tercer grado es de la forma* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$*, el cambio de variable pertinente es:*

$$x = u - \frac{a}{3}. \tag{3.2}$$

En nuestro caso,

$$x = u + \frac{2}{3}, \tag{3.3}$$

quedando

$$\left(u + \frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(u + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(u + \frac{2}{3}\right) - 1 = 0. \tag{3.4}$$

Tras las simplificaciones de rigor, obtenemos

$$u^3 - \frac{1}{3}u - \frac{25}{27} = 0. \tag{3.5}$$

La fórmula de Cardano-Vièta para la ecuación $x^3 + px + q$ es:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{3.6}$$

donde hemos de combinar valores complejos en los radicandos para obtener soluciones. Aplicando 3.6 a 3.5 tenemos:

$$u = \sqrt[3]{\frac{\frac{25}{27}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{25}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\frac{25}{27}}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{25}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{27}}}. \tag{3.7}$$

La expresión 3.7 ha de simplificarse trabajando con valores complejos. Esto nos impulsa a buscar por otros métodos las raíces. Tales métodos no serán exactos pero pueden dar un grado razonable de error.

Ejemplo 24 *Sea la ecuación*

$$x^4 - \tan^5 x = \cos^2 x. \tag{3.8}$$

El lector coincidirá en que se trata de una expresión ciertamente difícil. Aquí nos vemos obligados a ensayar una solución aproximada.

Sea la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{3.9}$$

donde la función f está definida y es continua en cierto intervalo (a, b); en algunos casos, exigiremos que sea derivable hasta un determinado orden. La siguiente definición es de gran importancia práctica.

Definición 6 (Raices separadas) *Una ecuación de la forma $f(x) = 0$ tiene raíces separadas si para cada una de sus raíces existe un entorno que no contiene otras raíces de la ecuación. Esto es, si ξ cumple $f(\xi) = 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que en el intervalo abierto $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ no hay más raíces.*

Ejemplo 25 *Una ecuación polinómica*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.10}$$

tiene raíces separadas. En efecto, de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, toda ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas (algunas de las cuales puede estar repetidas). Este número finito de raíces al "disponerse" sobre la recta real lo han de hacer necesariamente de forma separada (esto se deduce topológicamente pero el lector puede comprender este hecho de forma intuitiva).

A partir de ahora, suponemos que las ecuaciones 3.9 tienen raíces separadas. El cálculo aproximado de tales raíces tiene dos etapas:

1. separación de raíces, esto es, establecemos los intervalos $[\alpha, \beta]$ más pequeños posibles que contengan una y solamente una raíz de 3.9;

2. mejora de los valores aproximados, es decir, su manipulación hasta conseguir el grado requerido de exactitud.

Cada una de estas etapas necesita de ciertas herramientas matemáticas que iremos exponiendo a lo largo de los párrafos siguientes.

3.2 Separación de raíces

3.2.1 Ubicación inicial

Asumiendo que la ecuación 3.9 tiene raíces separadas, podemos ubicarlas en intervalos haciendo uso del teorema de Bolzano.

Teorema 9 (Bolzano) *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si es $f(a) f(b) < 0$, entonces existe al menos un punto ξ que cumple $f(\xi) = 0$.*

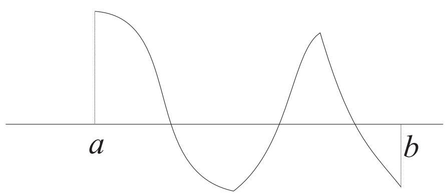

Figura 3.1: Ilustración del teorema de Bolzano. Obsérvese que la función no es derivable en un par de puntos.

Ejemplo 26 *Sea la ecuación del ejemplo 23:* $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$. *Observamos que la función* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ *es polinómica por lo que tendrá raíces separadas. Evidentemente,* f *es continua en toda la recta real. Finalmente, como* $f(0) = -1$ *y* $f(2) = 1$, *aplicando el teorema de Bolzano se tiene que existe al menos una raíz en el intervalo* $(0, 2)$. *Pero, ¿habrá alguna otra en dicho intervalo?*

3.2.2 Refinamiento

La pregunta que dejamos pendiente en el ejemplo anterior puede contestarse con propiedad en algunos casos.

Teorema 10 *Supongamos que la función* f *es derivable con continuidad en el intervalo* (a, b) *y que* $f(a) f(b) < 0$. *Si el signo de* f' *permanece constante en* (a, b), *entonces existe una única solución de* $f(x) = 0$ *en dicho intervalo.*

Prueba. Como f es derivable en (a, b) también es continua y podemos aplicar el teorema de Bolzano. Esto nos asegura que existe al menos una raíz en (a, b). Por otro lado, la continuidad de f' y su constancia de signo nos indican que la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (a, b). De esta manera, si la gráfica de f corta el eje de abscisas (es decir, si f tiene raíz) lo hace una sóla vez. ■

Ejemplo 27 *Retomamos la función* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. *Su derivada es:*

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1. \tag{3.11}$$

Sabemos por el ejemplo 26 que f *tiene una raíz en el intervalo* $(0, 2)$. *La derivada es también continua y se anula para*

$$x = \frac{1}{3}, \; x = 1 \tag{3.12}$$

Esto nos permite estudiar su signo en los intervalos delimitados por este par de números:

$$\begin{array}{ccc} \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{3}, 1\right) & (1, +\infty) \\ f' > 0 & f' < 0 & f' > 0 \end{array}$$

Observamos que el signo no se mantiene constante en el intervalo $(0, 1)$. *Ahora bien, si elegimos el intervalo* $(1, 2)$, *tenemos que* $f(1) f(2) < 0$ *y la derivada tiene signo constante en tal intervalo. Esto nos garantiza que existe una única raíz entre* 1 *y* 2. *Pero, ¿existe alguna otra raíz en otro intervalo?*

3.2.3 Metodología general

Vamos a dar un método general de separación de las raíces de una función continua que tiene una especial relevancia para las ecuaciones polinómicas. Este método consta de los siguientes pasos:

1. establecemos los signos de f en los extremos de su dominio. Si tal dominio es un intervalo ilimitado, entonces tomamos límites laterales según proceda;

2. elegimos una colección finita $\alpha_1 < \alpha_2 <, \ldots < \alpha_k$ de puntos del dominio de f y evaluamos el signo de f en tales puntos;

3. si resulta que $f(\alpha_k) f(\alpha_{k+1}) < 0$, marcamos el intervalo (α_k, α_{k+1}):

4. dividimos el intervalo marcado (α_k, α_{k+1}) por la mitad y evaluamos de nuevo el signo de f en los subintervalos obtenidos;

5. volvemos al paso 3.

Es claro que este algoritmo no tiene “cierre”. En efecto, podemos encontrarnos metidos en un bucle al pasar de 3 a 4. En la práctica, la información adicional que se nos da sobre f permite obviar esta dificultad (por ejemplo, si sabemos que f es una función polinómica). Así, si f' es continua en el dominio de f y podemos calcular fácilmente las soluciones de

$$f'(x) = 0, \tag{3.13}$$

bastará tomar los signos de f en los puntos extremos y en las soluciones de 3.13.

Ejemplo 28 *Aplicamos esta metodología a la ecuación $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$. Su derivada ya la hemos calculado en el ejemplo 27 y es:*

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \tag{3.14}$$

con raíces $x = 1, \frac{1}{3}$, que dividen a la recta real en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, +\infty)$. Estudiamos el signo de la función en los extremos de estos intervalos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 2x^2 + x - 1 = -\infty < 0, \tag{3.15}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{23}{27} < 0, \tag{3.16}$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = -1 < 0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 2x^2 + x - 1 = +\infty > 0. \tag{3.18}$$

Esto nos indica que sólo hay una raíz real en el intervalo $(1, +\infty)$*. En particular, tal raíz se halla en el intervalo* $(1, 2)$ *(como vimos en el ejemplo 27).*

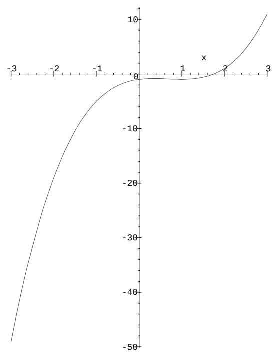

Figura 3.2: Parte de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

3.3 Primeros métodos de resolución

3.3.1 Métodos gráficos

Sea la ecuación $f(x) = 0$. Si conocemos la representación gráfica de la función $f(x)$, podemos obtener de manera aproximada las raíces de tal ecuación observando los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas. En muchas ocasiones, la representación de f es difícil por lo que el método es impracticable. Una salida que se aplica en estos casos es obtener una forma equivalente de $f(x) = 0$ como igualdad de dos funciones de fácil representación:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma(x) = \phi(x). \tag{3.19}$$

Las raíces de la ecuación son ahora los puntos de corte entre las gráficas de $\gamma(x)$ y $\phi(x)$.

Ejemplo 29 *Sea la ecuación* $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$. *Su representación gráfica se muestra en la figura 3.2 y nos indica la posición de su única raíz real entre* 1 *y* 2. *Si no queremos o no podemos representar tal función, es factible escribir la ecuación en la forma*

$$x^3 = 2x^2 - x + 1. \tag{3.20}$$

De esta manera, la solución se encuentra en la intersección de las curvas $\gamma(x) = x^3$ *y* $\phi(x) = 2x^2 - x + 1$, *cuya representación se nos antoja más sencilla.*

El método gráfico suele emplearse para delimitar el intervalo donde se encuentran las raíces y no resulta práctico para evaluarlas con detalle.

3.3.2 Método de bisección

Supongamos una ecuación $f(x) = 0$, donde la función f es continua en $[a, b]$ y $f(a) f(b) < 0$ y sólo tiene una raíz en dicho intervalo. Para hallarla, podemos dividirlo en dos subintervalos por la mitad. Esto es:

$$I = \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \ J = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \tag{3.21}$$

Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, entonces el punto medio es una raíz de la ecuación. Si no es así, elegimos la mitad I o J donde el signo de f sea distinto en sus extremos y llamamos I_1 a esa mitad. El nuevo intervalo I_1 se divide por la mitad y se vuelve a aplicar el mismo proceso. Obtenemos así una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ cuyos extremos verifican:

$$f(b_n) f(a_n) < 0, \tag{3.22}$$

y sus longitudes:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a), \tag{3.23}$$

es decir, la longitud de cada uno de ellos es la mitad de la del anterior. La sucesión (a_n) de los extremos izquierdos de los intervalos I_n es monótona no decreciente y la sucesión de los extremos derechos (b_n) es monótona no creciente. Ambas están acotadas por lo que tienen límite y resulta de 3.23 que

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n \frac{1}{2^n}(b - a) = 0. \tag{3.24}$$

Luego ambas sucesiones tienen un límite común:

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n = \xi. \tag{3.25}$$

Finalmente, como f es continua conservará las operaciones de paso al límite y se tiene que

$$\lim_n f(b_n) f(a_n) = f\left(\lim_n a_n\right) f\left(\lim_n b_n\right) = f(\xi) f(\xi) = f(\xi)^2. \qquad (3.26)$$

Como es 3.22 entonces

$$\lim_n f(b_n) f(a_n) = f(\xi)^2 \leq 0, \qquad (3.27)$$

de donde $f(\xi) = 0$. Esto significa que el límite común de los extremos es la raíz buscada. Por otro lado, igualdad 3.23 nos permite acotar el error. En efecto, como

$$a_n < \xi < b_n, \qquad (3.28)$$

se tiene que

$$0 < \xi - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a). \qquad (3.29)$$

Así, tomando el extremo izquierdo a_n del subintervalo I_n como valor aproximado, cometemos un error inferior a $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

(insertar imagen de la subdivisión de intervalos)

Ejemplo 30 *Vamos a utilizar el método de bisección para hallar la única raíz real de la ecuación* $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ *en el intervalo* $(1, 2)$ *con un error inferior a la milésima. En primer lugar, calculamos el número de subdivisiones que debemos hacer utilizando 3.29:*

$$0 < \xi - a_n < \frac{1}{2^n}(2-1) = \frac{1}{2^n} < 0.001. \qquad (3.30)$$

La inecuación resultante:

$$\frac{1}{2^n} < 0.001 \qquad (3.31)$$

tiene fácil solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &< 0.001 \Rightarrow 2^n > \frac{1}{0.001} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n \ln 2 > \ln 1000 \Rightarrow \\ &\Rightarrow n > \frac{\ln 1000}{\ln 2} \Rightarrow n > 9.9658. \qquad (3.32) \end{aligned}$$

Debemos efectuar un total de diez divisiones. Comenzamos:

$$I = \left(1, \frac{3}{2}\right), \; J = \left(\frac{3}{2}, 2\right). \qquad (3.33)$$

Como $f(1)\, f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ y $f\left(\frac{3}{2}\right) f(2) < 0$, la raíz se debe hallar en el subintervalo $I = I_1$. De nuevo, dividimos el intervalo I_1 en dos subintervalos:

$$L = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), \quad M = \left(\frac{7}{4}, 2\right). \tag{3.34}$$

Resulta que $f\left(\frac{3}{2}\right) f\left(\frac{7}{4}\right) > 0$ pero $f\left(\frac{7}{4}\right) f(2) < 0$. Así debemos tomar el subintervalo $M = I_2$. Dejamos al lector que continue.

En el método de bisección precisa de un gran número de iteraciones para conseguir una exactitud razonable (ver el ejemplo 30). En la práctica, sólo se usa si queremos una primera aproximación con un método simple.

3.3.3 Método de las secantes (cuerdas)

Supongamos como en la subsección anterior, una ecuación $f(x) = 0$, donde la función f es continua en $[a, b]$ y $f(a)\, f(b) < 0$, con una única raíz en dicho intervalo. Si sustituimos la curva por una recta que una los extremos $f(a)$ y $f(b)$ y buscamos el punto de corte x_1 de la recta con el eje de abscisas, conseguiremos una aproximación de la raíz. Esta aproximación puede usarse para dibujar una nueva recta uno de cuyos puntos es $(x_1, f(x_1))$ y el otro se determina de acuerdo con la forma general de la curva. En esta nueva recta se busca el punto de corte x_2 con el eje de abscisas y se toma como nueva aproximación. El lector observará que si no se eligen adecuadamente los dos puntos de la recta, la iteración no tiene por qué converger a la raíz.

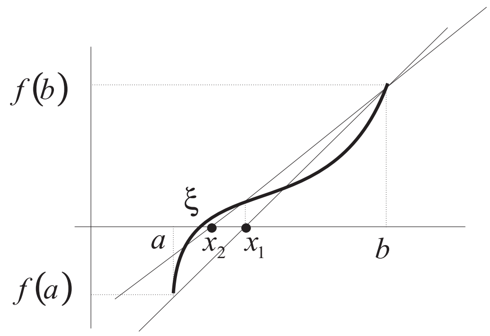

Figura 3.3: La recta corta al eje de abscisas en un punto x_1 próximo a la raíz.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ en la forma punto-pendiente es:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{3.35}$$

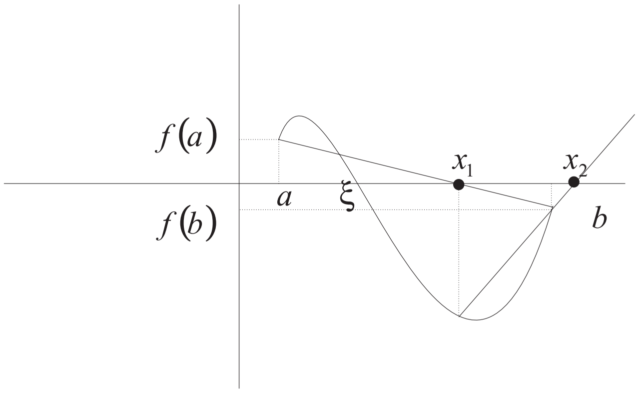

Figura 3.4: El punto de corte x_2 se aleja de la raíz al tomar el punto equivocado para construir la recta.

Haciendo $y = 0$, obtenemos el punto x_1 de corte con el eje x:

$$\begin{aligned} 0 - f(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow x - a = -f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Daremos un método que asegura la convergencia del proceso, sin más que hacer algunas hipótesis adicionales:

1. Si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ y $f''(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$ (convexa), entonces tomamos $x_0 = b$ y el extremo a lo dejamos fijo. Las sucesivas iteraciones tienen la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a). \tag{3.37}$$

La sucesión obtenida, (x_n) es monótona decreciente acotada por lo que tiene límite α, verificando $a < \alpha < b$ y éste es la raíz. En efecto, sabemos que existe una única raíz ξ en (a, b). Pasando al límite 3.37 se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_n x_{n+1} &= \lim_n \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_n x_{n+1} = \lim x_n - \frac{f(\lim_n x_n)}{f(\lim_n x_n) - f(a)}(\lim x_n - a) \Rightarrow \qquad (3.38) \\ &\Rightarrow \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f(\alpha) - f(a)}(\alpha - a) \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\alpha) - f(a)}(\alpha - a) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \text{Como } a < \alpha, \text{ entonces } f(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Al ser única la raíz en (a, b) y cumplir $f(\alpha) = 0$, se deduce que α es dicha raíz.

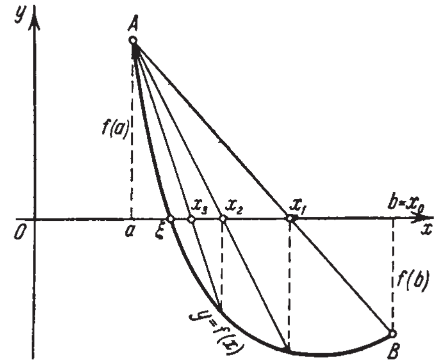

Figura 3.5: Ilustración del caso 1.

2. Si $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ y $f''(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ (de nuevo convexa), entonces tomamos $x_0 = a$ y el extremo b lo dejamos fijo. Las iteraciones son ahora

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n). \tag{3.39}$$

La sucesión (x_n) es monótona creciente y converge a la raíz. La demostración de este aserto es similar a la efectuada para el caso 1.

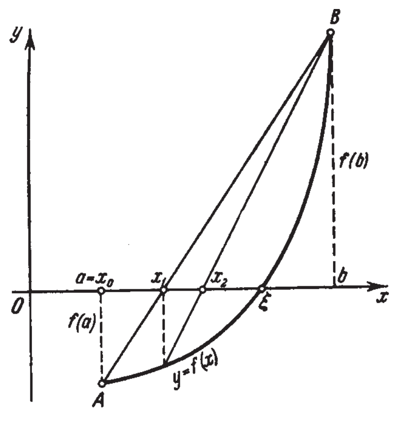

Figura 3.6: Ilustración del caso 2.

Si la función $f(x)$ tiene segunda derivada $f''(x) < 0$ (cóncava), bastará tomar la ecuación $-f(x) = 0$, la cual es equivalente a $f(x) = 0$. Entonces, $-f(x)$ es convexa y podemos utilizar 1 o 2.

Para determinar el error en los supuestos 1 y 2, haremos uso de la fórmula:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \tag{3.40}$$

Es decir, si queremos un error menor que ε, bastará tomar n iteraciones de manera que la distancia entre x_n y x_{n-1} sea menor que ε.

Ejemplo 31 *Vamos a utilizar el método de las secantes para hallar la única raíz real de la ecuación $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ en el intervalo $(1, 2)$ con un error inferior a la milésima. Como $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ y $f''(x) = 6x - 4 > 0$ para todo $x \in [1, 2]$, aplicaremos el supuesto 2, con $x_0 = 1$ y el extremo $b = 2$ fijo. En consecuencia, resulta la tabla:*

x_n	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b - x_n)$
1	*-1*	$-1 - \frac{1}{1-(-1)}(2-1) = -1.5$
-1.5	*-10.375*	$-1.5 - \frac{-10.375}{1-(-10.375)}(2-(-1.5)) = 1.6923$
1.6923	*-0.188915*	$1.6923 - \frac{-0.188915}{1-(-0.188915)}(2-1.6923) = 1.7412$
1.7412	*-0.434240*	$1.7412 - \frac{-0.434240}{1-(-0.434240)}(2-1.7412) = 1.8196$
1.8196	*0.222305*	$1.8196 - \frac{0.222305}{1-0.222305}(2-1.8196) = 1.768$
1.768	*0.042808*	$1.768 - \frac{0.042808}{1-0.042808}(2-1.768) = 1.7576$
1.7576	*0.008788*	$1.7576 - \frac{0.008788}{1-0.008788}(2-1.7576) = 1.7555$
1.7555	*0.002004*	$1.7555 - \frac{0.002004}{1-0.002004}(2-1.7555) = 1.755$
1.755	*0.000393*	$1.755 - \frac{0.000393}{1-0.000393}(2-1.755) = 1.7549$
1.7549	*0.000071*	$1.7549 - \frac{0.000071}{1-0.000071}(2-1.7549) = 1.7549$

Hemos de decir que en esta tabla se ha redondeado y esto ha perjudicado la convergencia. Observamos que, a medida que avanzamos en las iteraciones, se obtienen valores decimales comunes. Cuando conseguimos cuatro decimales iguales de una fila a otra, podemos afirmar que el valor obtenido tiene un error inferior a una milésima respecto a la verdadera raíz. En nuestro caso es

$$x_8 = 1.7549. \tag{3.41}$$

Recordemos que en el método de las bisecciones había que efectuar un total de diez bisecciones, mientras que en este método hemos tenido que hacer ocho iteraciones. Ciertamente, la ganancia no es mucha (aunque esta conclusión no es generalizable).

3.3.4 Método de Newton (tangentes)

Si en lugar de utilizar secantes para hallar puntos de corte que aproximen a la raíz buscada, utilizamos tangentes, la aproximación suele ser mucho más rápida y efectiva. El método de Newton hace uso de esta idea. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua y derivable en su dominio, y sea $f(a) f(b) < 0$. Suponemos que $f(x) = 0$ tiene raíz ξ única en el intervalo cerrado y que $f'(x)$ y $f''(x)$ conservan los signos en dicho intervalo. Si x_n es una aproximación de la raíz ξ, podemos mejorarla considerando el corte de la recta tangente a la curva en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisas. La ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n). \tag{3.42}$$

Por lo que su punto de corte x_{n+1} con el eje x es:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.43}$$

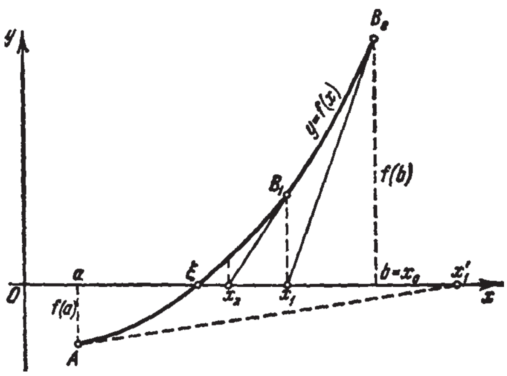

Figura 3.7: Las tangentes tienen puntos de corte cada vez más próximos a la raíz.

También, como en el caso anterior, para conseguir que la convergencia sea posible, es necesario exigir ciertas condiciones previas. Si no se hace así, se corre el riesgo de tomar iteraciones con valores cada vez más alejados de la raíz.

Teorema 11 *Supongamos que f es una función continua en $[a, b]$ y que $f(a) f(b) < 0$, con una única raíz en $[a, b]$. Las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ existen, no son nulas y conservan el signo en dicho intervalo*[1]. *Entonces partiendo, de un punto x_0 de $[a, b]$ que cumpla $f(x_0) f''(x_0) > 0$ (es decir, que tenga el mismo signo que su segunda derivada) se consigue con 3.43 el cálculo de la raíz única con cualquier grado de exactitud.*

[1] La primera y la segunda derivada no tienen por qué tener el mismo signo, sólo se les exige que conserven el que tengan en el intervalo.

Ejemplo 32 *Vamos a utilizar el método de Newton para hallar la única raíz real de la ecuación* $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ *en el intervalo* $(1, 2)$ *con un error inferior a la milésima. Sabemos que* $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 > 0$ *y* $f''(x) = 6x - 4 > 0$. *Es decir, podemos aplicar sin problemas el método de Newton y tomar un punto inicial* x_0 *que tenga imagen con el mismo signo que la segunda derivada. En este caso* $x_0 = 2$. *Pasamos los resultados a una tabla*

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
2	*1*	*5*	$2 - \frac{1}{5} = 1.8$
1.8	*0.152*	*3.52*	$1.8 - \frac{0.152}{3.52} = 1.7568$
1.7568	*0.0062005*	*3.2318387*	$1.7568 - \frac{0.0062005}{3.2318387} = 1.7549$
1.7549	*0.0000719*	*3.2194220*	$1.7549 - \frac{0.0000719}{3.2194220} = 1.7549$

Obtenemos estabilidad en cuatro decimales al cabo de sólo tres iteraciones. Comprobamos que $x_3 = 1.7549$ *es el valor aproximado de la raíz con un error menor que una milésima. Esto nos muestra la rápida convergencia del método de Newton en relación a los anteriores.*

Algunos supuestos más sobre el comportamiento de la función nos concluir que tiene raíz única y tomar cualquier punto inicial x_0 en 3.43.

Teorema 12 *Supongamos que* f *es una función con derivada segunda continua en* $[a, b]$ *y que* $f(a) f(b) < 0$. *Además, la derivada* $f'(x)$ *es no nula en dicho intervalo,* $f''(x)$ *no cambia de signo y el máximo de los dos valores*

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| \tag{3.44}$$

es menor o igual que la longitud $b - a$ *del intervalo. Entonces existe una única raíz de* $f(x) = 0$ *en* $[a, b]$ *y ésta se consigue con 3.43 para cualquier punto* x_0 *de* $[a, b]$.

3.4 Métodos de iteración

3.4.1 Introducción

El procedimiento de iteración merece una sección aparte por su gran importancia. Se trata de uno de los métodos más inmediatamente implementables en ordenador y sus fundamentos tocan algunos temas matemáticos de gran trascendencia. En los párrafos siguientes esbozamos este método.

Sea $f(x) = 0$ una ecuación, donde $f(x)$ es continua. Se desea determinar sus raíces reales. Para ello, sustituimos la expresión $f(x)$ por otra equivalente de la forma

$$\phi(x) = x. \tag{3.45}$$

Utilizando cualquier procedimiento estimamos un valor x_0 aproximado de la raíz y calculamos $\phi(x_0) = x_1$. El nuevo valor se sustituye en $\phi(x)$ para dar $\phi(x_1) = x_2$ y así sucesivamente. Esto nos permite construir una sucesión

$$x_n = \phi(x_{n-1}). \tag{3.46}$$

Dando por supuesto que $\phi(x)$ es continua y que la sucesión (x_n) es convergente a un punto α, se tiene

$$\lim_n x_n = \phi\left(\lim_n x_{n-1}\right) \Rightarrow \alpha = \phi(\alpha). \tag{3.47}$$

En consecuencia, α verifica 3.45 y es una raíz de $f(x) = 0$.

Ejemplo 33 *La ecuación $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ puede ponerse en forma equivalente como*

$$x = 1 + 2x^2 - x^3, \tag{3.48}$$

donde $\phi(x) = 1+2x^2-x^3$ es una función continua. Gráficamente, la ecuación 3.48 se resuelve buscando los puntos de intersección de la recta $y = x$ con la curva $\phi(x) = 1 + 2x^2 - x^3$.

3.4.2 Teoremas de convergencia

Para garantizar la convergencia del método es necesario exigir ciertas condiciones a la función $\phi(x)$.

Teorema 13 *Sea $\phi(x)$ una función real de variable real definida en $[a,b]$. Supongamos que sus valores también pertenecen a $[a,b]$ y que existe $0 < L < 1$ tal que*

$$|\phi(x) - \phi(y)| < L|x - y|, \tag{3.49}$$

para todo x e y pertenecientes a $[a,b]$. Entonces existe una única raíz de $x = \phi(x)$ que se obtiene como límite de la sucesión $x_n = \phi(x_{n-1})$, partiendo de cualquier punto inicial x_0 en el intervalo.

En la práctica, si la función $\phi(x)$ es derivable con continuidad, podemos utilizar la derivada para dar una condición ligeramente más manejable.

Teorema 14 *Sea $\phi(x)$ una función real de variable real definida y derivable con continuidad en $[a,b]$ y cuyos valores también están en $[a,b]$. Si la existe un número positivo p, menor que uno, tal que*

$$|\phi'(x)| < p, \text{ para todo } x \in [a,b], \tag{3.50}$$

entonces el proceso de iteración

$$x_n = \phi(x_{n-1}) \tag{3.51}$$

converge independientemente del valor inicial $x_0 \in [a, b]$ *y su límite es la única raíz de la ecuación* $x = \phi(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$.

El teorema anterior sigue siendo válido si en lugar de considerar un intervalo cerrado, consideramos toda la recta real. Observamos también que en las condiciones del teorema, el método es autocorrector ya que no depende del valor inicial tomado en el intervalo. Así, un error individual en los cálculos que no esté por encima de los límites del intervalo no afecta al valor final (aunque sí al número de iteraciones) pues puede considerarse como un nuevo punto inicial.

Por otro lado, cabe señalar que, al contrario de lo que ocurre los métodos de la secante y de Newton, la estabilidad en el número de decimales obtenidos no garantiza en todos los casos que tales decimales sean exactos.

Ejemplo 34 *Sea la ecuación* $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ *en la forma*

$$x = 1 + 2x^2 - x^3. \tag{3.52}$$

La función $\phi(x) = 1 + 2x^2 - x^3$ *es continua y derivable en toda la recta real. Su derivada es:*

$$\phi'(x) = 4x - 3x^2. \tag{3.53}$$

Desafortunadamente, esta derivada no está acotada en toda la recta real por lo que habremos de buscar un intervalo cerrado $[a, b]$ *para el que la imagen de* $\phi(x)$ *se encuentre también en dicho intervalo y la derivada esté acotada con un número positivo menor que la unidad. Una inspección la derivada nos ayuda a encontrar tal intervalo. En efecto, en el teorema se hace la hipótesis de acotación del valor absoluto de la derivada por un número menor que uno. Como* $\phi'(x) = 4x - 3x^2$ *es una parábola, su representación es sencilla*

La derivada es sólo menor que uno en valor absoluto si tomamos x *entre, aproximadamente,* -0.25 *y* 1.50*. Sin embargo, para este intervalo la función* $\phi(x)$ *no tiene imágenes dentro del mismo ya que, por ejemplo* $\phi(1) = 2$.

En consecuencia, no hallaremos un intervalo adecuado donde el valor inicial x_0 *no tenga importancia.*

Si sabemos que existe una única raíz en un intervalo y tomamos una aproximación inicial adecuada, el método de iteración nos llevará a obtener la raíz.

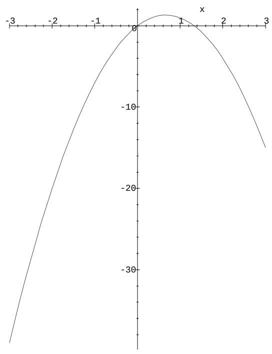

Figura 3.8: Gráfica de la derivada de $y = 1 + 2x^2 - x^3$.

Teorema 15 *Si existe una raíz ξ de $x = \phi(x)$ en el intervalo $[a, b]$, en el cual ϕ tiene derivada continua y verifica $|\phi'(\xi)| < 1$, entonces es posible encontrar un valor inicial x_0, suficientemente próximo a ξ, para el que la sucesión recurrente $x_n = \phi(x_{n-1})$ converge a la raíz.*

Gráficamente, esto significa que si la pendiente de la tangente a la curva el punto con abscisa igual a la raíz tiene una "pequeña" inclinación (entre -1 y 1), entonces acercándonos lo suficiente podemos conseguir una convergencia por iteraciones. En este caso, se puede utilizar la expresión

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1-p}{p}\varepsilon, \text{ donde } \varepsilon \text{ es el error prefijado,} \tag{3.54}$$

para ver el número de iteraciones necesarias para dar una aproximación con un error menor o igual que ε. Así, cuando dos aproximaciones coinciden dentro del margen dado por $\frac{1-p}{p}\varepsilon$, la última aproximación es la adecuda.

Ejemplo 35 *Retomamos la ecuación $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ y la equivalente $x = 1 + 2x^2 - x^3$ del ejemplo 34. Sabemos que tiene una única raíz entre 1 y 2. También sabemos que su derivada es menor que uno en valor absoluto entre, aproximadamente, -0.25 y 1.50. Si afinamos un poco el intervalo inicial, podemos tomar el intervalo $[0, 1.50]$, pero para dicho intervalo no hay cambio de signo en la función original $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$, luego en él no se halla la raíz (cosa que ya sabemos pues la hemos calculado por otros métodos). En definitiva, tampoco podemos aplicar a este ejemplo el teorema 15. ¿Qué*

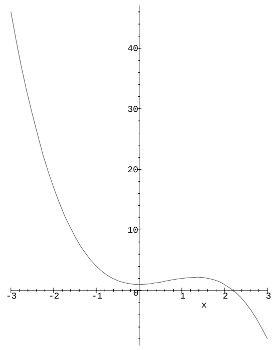

Figura 3.9: Parte de la gráfica de $y = 1 + 2x^2 - x^3$.

pasará si tomamos un valor inicial como $x_0 = 1$*?. La tabla siguiente nos da la respuesta.*

x_n	$\phi(x_n)$
1	*2*
2	*1*
1	*2*

Obtenemos un ciclo entre 1 y 2. Probemos con $x_0 = 1.5$.

x_n	$\phi(x_n)$
1.5	*2.125*
2.125	*0.435546875*
0.435546875	*1.296778448*
1.296778448	*2.182561512*

No observamos ninguna estabilidad. En resumen, este método no es aplicable para la ecuación polinómica.

En general, para las ecuaciones polinómicas son preferibles otros métodos distintos al de iteración (los ejemplos anteriores nos muestran el por qué). Sin embargo, para las ecuaciones trascendentes este método se revela bastante eficiente.

Ejemplo 36 *Vamos a hallar las raíces de la ecuación* $x - \operatorname{sen} x = 0.25$ *con tres decimales exactos. Primero escribimos*

$$x - \operatorname{sen} x - 0.25 = 0. \tag{3.55}$$

A continuación, usamos la metodología de 3.2.3 para separar las raíces. Como la derivada es:

$$f'(x) = 1 - \cos x, \tag{3.56}$$

tenemos que

$$1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = k\pi, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.57}$$

La infinidad de puntos críticos de primera especie que hemos obtenido da lugar a una infinidad de intervalos de la forma

$$(k\pi, (k+1)\pi), \text{ donde } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.58}$$

Calculamos los signos de $f(x)$ en los extremos de cada intervalo:

$$\begin{aligned} f(k\pi) &= k\pi - \operatorname{sen}(k\pi) - 0.25 = k\pi - 0.25, \\ f((k+1)\pi) &= (k+1)\pi - \operatorname{sen}((k+1)\pi) - 0.25 = (k+1)\pi - 0.25. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Si es $k = 0$, tenemos una variación de signo:

$$\begin{aligned} f(0) &= -0.25, \\ f(\pi) &= \pi - 0.25 = 2.8916. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Si $k > 0$ o $k < 0$ entonces no hay variación de signo. Así pues, tendremos una única raíz en el intervalo $(0, \pi)$. Mejoramos esta raíz utilizando el método de bisección. Para ello, dividimos el intervalo en dos subintervalos mitad:

$$I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), J = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \tag{3.61}$$

Como resulta que:

$$f(0) f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \; f\left(\frac{\pi}{2}\right) f(\pi) > 0, \tag{3.62}$$

escogemos el subintervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Aplicamos de nuevo la bisección:

$$\begin{aligned} K &= \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \; L = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \\ f(0) f\left(\frac{\pi}{4}\right) &> 0, \; f\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

La raíz se encuentra en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Seguimos con una bisección más[2]:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right), N = \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right), \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{3\pi}{8}\right) &< 0, f\left(\frac{3\pi}{8}\right) f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

[2] Esto lo hacemos con el fin de conseguir un intervalo pequeño donde la derivada esté acotada por un número menor que uno.

Escogemos el subintervalo $M = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right)$ *y terminamos aquí la bisección y pasamos a estudiar la acotación de* $f'(x)$ *en este intervalo con el fin de aplicar el teorema 15. Escribimos la ecuación en la forma equivalente:*

$$x = \operatorname{sen} x + 0.25. \tag{3.65}$$

Tomamos

$$\phi(x) = \operatorname{sen} x + 0.25. \tag{3.66}$$

La derivada es $\phi'(x) = \cos x$ *y está acotada por un valor menor que uno en el intervalo* $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right)$. *En concreto,*

$$|\phi'(x)| < p = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1. \tag{3.67}$$

Esto significa que si ξ *es la raíz en dicho intervalo, verifica* $|\phi'(\xi)| < 1$ *y podemos aplicar el teorema 15. Usaremos el valor* $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *como primera iteración y para saber el número de iteraciones empleamos 3.54.*

$$\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} 0.001 = 0.0004\,1421. \tag{3.68}$$

Esto significa que detendremos el algoritmo cuando coincidan 5 cifras significativas

x_n	$\phi(x_n)$
$\frac{\pi}{4}$	*.9571067810*
0.9571067810	*1.067528823*
1.067528823	*1.126011355*
1.126011355	*1.152703205*
1.152703205	*1.163864829*
1.168339637	*1.170101535*
1.170101535	*1.170790207*
1.170790207	*1.171058611*
1.171058611	*1.171163101*

El valor aproximado de la raíz es $\bar{\xi} = 1.171$.