Sobre el Método de Lyapunov

Luis Manuel Hernández Gallardo

30 de noviembre de 2000

Índice General

Introducción

Con mucha frecuencia ocurre que el estudio de fenómenos de los más variados campos del conocimiento, desde fenómenos naturales hasta económicos o sociales, conduce a leyes dinámicas que, genéricamente, se agrupan bajo el nombre de *ecuaciones diferenciales (ED) no lineales* .

La no linealidad de las ecuaciones diferenciales, aunada a la cantidad de parámetros con interpretación "física" precisa en cada contexto, origina una rica dinámica de relevancia tanto matemática como interpretativa. También, la no linealidad es la responsable de que, por regla general, la búsqueda de soluciones explícitas para dichas ecuaciones sea más bien un deseo y no una realidad. En estos casos, el uso de métodos analíticos mediante los cuales se puedan inferir propiedades cualitativas de las soluciones (*análisis cualitativo*), o bien las técnicas numéricas a través de las cuales se puedan calcular soluciones aproximadas (*numéricas)*, a un problema con condiciones iniciales, son especialmente útiles.

Un concepto de fundamental importancia en la teoría cualitativa de los sistemas de *ED* ordinarias *(EDO)*, es el concepto de la *estabilidad de soluciones.* Una forma de estudiar la estabilidad de las soluciones, es hacerlo directamente después de obtenerlas. Pero como sabemos, el conjunto de las ecuaciones diferenciales para las que pueden obtenerse las soluciones explícitas, *es un conjunto de medida cero.* Por lo que se han buscado formas alternas para hacer este estudio sin necesidad de obtener las soluciones. Actualmente se cuenta con un método de este tipo, que permite estudiar la estabilidad de las soluciones de los sistemas de *EDO* a través de las propiedades de una cierta función llamada *función de Lyapunov,* en honor del matemático ruso Mijail Aleksandrov Lyapunov quien descubrió el también llamado *Método Directo de Lyapunov.*

El concepto de estabilidad de las soluciones de sistemas de *EDO* se fue puliendo paulatinamente. Desde las ideas más incipientes, hasta su definición precisa introducida por Lyapunov. En este proceso de pulimiento, el estudio de la estabilidad del sistema solar jugó un papel fundamental. Por lo que, en la medida de las referencias a las que se tuvo acceso, en el Capítulo 1 se hace un resumen sucinto de los resultados e ideas básicas en esta dirección.

En el Capítulo 2 se establecen la definición de función de Lyapunov y los teoremas de estabilidad, inestabilidad, estabilidad asintótica y el teorema de estabilidad asintótica global de Barbashin-Krasovskii. Todos ellos forman parte del cuerpo del método directo de Lyapunov.

En los Capítulos 3 y 4 se consideran dos familias de sistemas autónomos no lineales de ED en el plano, y para cada una de ellas se enuncian y demuestran cuatro teoremas que garantizan la estabilidad asintótica global de la solución nula de dichos sistemas. El estudio que se hace de estos sistemas es importante por su relación con el problema de Aizerman (véase [4]), que consiste en estudiar la estabilidad asintótica global de sistemas autónomos no lineales de n EDO y que sólo ha sido resuelto completamente para $n = 2$.

Capítulo 1

La Estabilidad: De Arquímedes a KAM

En el lenguaje cotidiano la palabra estabilidad se asocia con lo que no cambia. Sin embargo, en diferentes ramas del conocimiento y para distintos fines, también se utiliza la palabra *estabilidad.* Pero, ¿De qué hablan los economistas y gobernantes de un país, cuando se apresuran a declarar que el sistema financiero y la situación política de dicho país son *estables?* ¿Acaso lo hacen para ganarse la confianza de los inversionistas y de los sectores económicamente privilegiados del mismo? ¿A qué se refiere un ingeniero cuando asegura que un puente, un vehículo o, en general, una estructura es *estable*? ¿A qué propiedad de una molécula se refiere un ingeniero químico cuando dice que dicha molécula es *estable*? ¿Qué quieren dar a entender los ecólogos cuando hablan de que un ecosistema es *estable*? ¿En qué características de un material se fijan los geólogos, para asegurar que ese material tiene la propiedad de ser *estable*? A esta diversidad de sentidos que se le da a la palabra estabilidad, agreguemos uno más ciertamente conspicuo. Cuando un médico, trata de tranquilizar a los parientes de un enfermo bajo su responsabilidad, les dice que su paciente se encuentra estable.

Cada una de las personas que habla en términos semejantes a los anteriores, ¿estará entendiendo lo mismo que entiende un matemático, cuando éste, con la palabra *estable* caracteriza a una propiedad que posee la solución de una ecuación diferencial, o cuando afirma que un sistema de ecuaciones diferenciales es estructuralmente *estable*?

En los ejemplos anteriores con la palabra estabilidad lo mismo se caracteriza a un estado físico de la materia que a un estado clínico de un paciente.

En verdad que, aunque diferentes en sus contextos epecíficos, ellos comparten alguna característica pues se refieren a algo que no cambia o que ofrece resistencia al cambio, que se mantiene en estado estacionario o permanente.

1.1 El equilibrio Arquimediano

Aún cuando hay indicios de que desde hace muchos siglos, se han estudiado una serie de problemas donde ya se encuentra inmersa una idea intuitiva de estabilidad. La formalización matemática del concepto es relativamente reciente.

Por ejemplo, Aristóteles (384-322), consideró la balanza en equilibrio, y estudió las fuerzas que podían alterar dicho estado y los diferentes movimientos que podían resultar[17].

Arquímedes (287-212), estudió el problema de la palanca[20], donde a partir de la sola hipótesis:

"*Si se cuelgan pesos iguales a iguales distancias del punto de apoyo, la palanca queda en equilibrio*"

Dedujo la siguiente ley de la palanca:

"*El peso P a la distancia l se equilibra con el peso $2P$ a la distancia $\frac{l}{2}$*"

Ley que es un caso particular de la ley más general de la palanca: *Si dos pesos P_1 y P_2 están colocados a la distancia l_1 y l_2 respectivamente del fulcro, la palanca queda en equilibrio si los momentos (fuerza por distancia) de ambos pesos son iguales.*

Arquímedes también estudió otro problema de fuerzas en equilibrio, el de los cuerpos flotantes, donde demostró la importancia de la forma de los objetos y de las posiciones de sus centros de gravedad[17]. Este estudio de las leyes de los cuerpos flotantes que convirtió a Arquímedes en el fundador de la hidrostática, tuvo usos muy importantes. Uno de ellos el de la determinación de las densidades de los cuerpos, midiendo su peso en el agua; este procedimiento debido a que sirvió para probar la pureza de los metales preciosos, ya no se abandonó una vez fue conocido. El uso que se le dio para determinar la capacidad de carga de un barco, era conocido tradicionalmente por los armadores de barcos, aunque dicha capacidad no vino a determinarse por medio del cálculo sino hasta el siglo XVII.

Parece que fue el poeta Lucrecio (94-50), quien primero puso por escrito la palabra estabilidad. En su poema *De Rerum Natura*[16], dice:

"Namque papaueris aura potest suspensa leuisque
cogere ut summo tibi diffluat altus aceruus:
at contra lapidum conlectum spica rumque
noenu potest. Igiturt paruissima corpora proquam
et leussima sunt, ita mobilitate fruuntur.
At contra quaecumque magis cum pondere magno
asperaque inueniuntur, eo stabilita magis sun."[1]

En el siglo XVII, Simón Stevin (1548-1620) en sus investigaciones sobre problemas de estática, estableció que en un sistema de poleas en equilibrio, los productos de cada uno de los pesos por las magnitudes de sus respectivos desplazamientos, son iguales. Galileo unos años más tarde, extiende este descubrimiento a otra máquinas simples como la palanca, el torno y el tornillo[21].

1.2 De la astrología a la astronomía

La búsqueda del origen y posterior desarrollo del concepto de estabilidad, muy bien se puede hacer siguiendo el desarrollo de diferentes ramas de la ciencia. Aquí ese seguimiento se hace a través de ir viendo el camino que siguió el estudio del movimiento, específicamente el de los cuerpos celestes. El interés en los cuerpos celestes existía aún en las sociedades más primitivas. La luz y el calor del sol, los espectaculares colores que toman el sol y la luna siempre han maravillado al hombre. Las brillantes luces de los planetas que aparecen y desaparecen en varias épocas del año, la Vía Láctea con su miriada de estrellas y los eclipses que causan admiración, especulación y, en algunos casos terror, siempre han atraido su atención. Desde los tiempos más remotos, la humanidad ha observado los cielos y tratado de entender y desentrañar sus más recónditos secretos y misterios.

[1] "Pues, de la amapola, puede hacer el aura leve y suspensa * que se esparza, desde lo sumo, para ti un alto acervo; * más, al revés, uno de piedra reunido, y de espigas, * no puede. En efecto, cuanto los cuerpos parvísimos * y pulidísimos son, de movilidad tanto disfrutan.* Más al revés, cualesquier que con peso más magno * y ásperos se encuentran, más son estables por eso."

La mayoría de las culturas en su momento han emprendido el estudio del universo y acumulado gran cantidad de información. También han logrado deducir una serie de conocimientos muchas veces empíricos, que les premite formarse una concepción de dicho universo. Visión que necesariamente se refleja no sólo en la manera de enfocar los estudios de todos los fenómenos naturales y sociales de esas culturas, sino que las mismas estructuras organizativas se ven afectadas notablemente, por la influencia de tales concepciones.

Durante siglos y siglos los hechos siderales habían estado presentes ante los ojos humanos y, sin embargo, lo que estos hechos le mostraban al hombre, lo que le patentizaban no era una realidad, sino un enigma, un arcano, un problema ante el que se estremecía de pavor. La astronomía contribuyó a que todo esto quedara atrás, al disipar los temores producidos por los fenómenos celestes, destruyendo los errores nacidos de la ignorancia de nuestras verdaderas relaciones con la naturaleza. El creciente desarrollo de la astronomía la llevó a un grado de importancia tal, que en los siglos XV, XVI y XVII los emperadores, reyes y gobiernos locales de las ciudades empleaban a matemáticos y astrónomos para que se ocuparan de elaborar registros con pronósticos que iban desde las predicciones del clima, de eclipses, de catástrofes naturales y plagas, hasta las perspectivas económicas que se abrían por la creciente producción de mercancías producto de la novedosa y floreciente manufactura, así como de perspectivas políticas. Desde cientos de años atrás la astronomía venía satisfaciendo las necesidades de la astrología, dotándola de datos astronómicos para la confección de horóscopos. La astronomía da un salto cualitativo superando estas limitaciones, cambiando de rumbo y atendiendo la nueva necesidad de obtener datos que permitan resolver problemas como los de los navegantes. Esta información se utilizaba en el diseño de almanaques y mapas estelares, conteniendo las posiciones de estrellas y constelaciones. Estos documentos eran esenciales para la orientación de las naves lejos de las costas. Dotados de esta ayuda, los marinos de la época estaban en mejores posibilidadesde dar mayor seguridad a los viajes marítimos, aumentando con ello las posibilidades del comercio.

Pero no todo eran tareas "mundanas" para estos científicos. Además de lo anterior, les quedaba tiempo para dedicarse a observar y estudiar los cielos en la búsqueda de respuestas al gran misterio del "funcionamiento y estructura del cosmos". En esa época dicho cosmos se restringía prácticamente al sistema solar y a las llamadas estrellas fijas.

Algunas de las investigaciones, invenciones y descubrimientos realizados durante estos siglos, fueron claves para el desarrollo posterior tanto de la cultura en general, como de la ciencia en particular. La curiosidad sin límites y el ansia de saber que se generó durante el Renacimiento, acompañados de la agudeza de visión y el espíritu de aventura, condujeron a las grandes travesías por los mares. Llevaron a la búsqueda de nuevas rutas comerciales (que en algunos casos llevaron al descubrimiento de nuevos horizontes). Muchas de estas inquietudes cristalizaron, entre otras, como magníficas obras de descripción, o descubrimientos e invenciones trascendentes; a la vez que realimentaron dicho interés por los problemas celestes, creando algunos problemas prácticos. Las repercusiones de toda la actividad creativa que se desarrolló durante esta época, fueron en todos los terrenos y en todos los ámbitos de la sociedad. En particular en el terreno científico, toda una pléyade de matemáticos, astrónomos y otros estudiosos, pudieron dar rienda suelta a sus inquietudes. El ambiente de estudio e investigación que se generó alrededor de problemas de todo tipo, propició el rompimiento no sólo con la física aristotélica, sino con la visión escolástica del mundo y de la naturaleza, desterrando la argumentación metafísica del ámbito de la ciencia. Los progresos de la ciencia abrieron amplias brechas en esa caduca concepción de la naturaleza. Uno de los tantos frutos que fueron cosechados, incluso entrando en fuerte conflicto con la iglesia, fue la adopción del *modelo heliocéntrico* o copernicano del cosmos, que no sólo tuvo repercusiones astronómicas, con resultados inmediatos como la deducción de las leyes de Kepler, sino que trascendió a otras ramas del conocimiento. Se destruyó la visión medieval de un orden social inmutable, en un universo amurallado, con su jerarquía fija de valores morales regidos por la iglesia, donde todo era forma convencional, estatuida, fija, y todo era ritual infinitamente complicado. La revolución científica en marcha acabó transformando por entero a la sociedad, la cultura y las costumbres. Para enfrentar los nuevos retos, la misma iglesia tuvo que reformarse.

1.3 El experimento como fuente de conocimiento

Al liberar a la ciencia de la pesada carga de la escolástica, se allanó el camino para el advenimiento de la ciencia actual. Se preparó la transición del mundo en el que todo era "más o menos" al "universo de la precisión", superando las limitaciones de la metodología escolástica. Se le dió forma a un verdadero método experimental, en donde el *experimentum* tomado como fuente de conocimiento, consiste en interrogar metódicamente a la naturaleza; interrogación que presupone e implica un lenguaje con el que se puedan formular las preguntas y que, ante todo, permita descifrar y comprender las respuestas.

Galileo Galilei (1564-1642), el científico que, junto con Copérnico, Kepler y Newton, tuvo una participación central en esta revolución científica, se expresa[23] en los siguientes términos:

> *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderme umanamente parole; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."*[2]

Galileo, siendo congruente con sus ideas, al aplicar coherentemente la matemática a la física y la física a la astronomía, las unió por vez primera, de una forma verdaderamente significativa y fructífera para cada una de ellas y para el desarrollo de la ciencia. Lo que lo mueve y anima es la gran idea arquimediana de la física matemática, de la reducción de lo real a lo geométrico. De este modo geometriza el universo, es decir, identifica el espacio físico con el de la geometría euclidiana. Esta forma completamente nueva de concebir el universo es la que le permite formular el concepto de movimiento, que sirve de base a la dinámica clásica. En su obra maestra poderosamente argumentada y bellamente escrita, *Diálogo sobre los dos grandes sistemas del mundo*, publicada en 1632, Galileo hace una valoración comparativa de las antiguas y las nuevas teorías del movimiento celeste y, en consecuencia, de las dos visiones del mundo. Su aparición tuvo una repercusión inmediata,

[2] "La Filosofía está escrita en ese libro grandioso (yo digo el universo), que permanece abierto continuamente a nuestra mirada, pero que no puede ser entendido a menos que uno, para comprenderlo, primero aprenda el lenguaje en el que está escrito. Este libro está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin dicho lenguaje es imposible entender humanamente una sola palabra de él; sin éste uno se encuentra errando en un obscuro laberinto."

pues las ideas de Copérnico que permanecían sepultadas desde alrededor de un siglo antes (en la casi olvidada obra del astrónomo polaco, ignoradas fuera del estrecho círculo de los estudiosos) súbitamente se exponen a la luz de los debates. Esto propicia amplias adhesiones a la nueva visión del mundo pero, al mismo tiempo, los adversarios de Galileo consideraron este el momento propicio para tratar de abatir al gigante, y lo acusaron ante la Inquisición. La denuncia prosperó y fue procesado por herejía. Mediante una acusación de este tipo, la Inquisición había condenado a Giordano Bruno a morir en la hoguera; pero en el caso de Galileo existía una diferencia, se trataba de un científico de prestigio con amigos poderosos y de que, salvo en asuntos científicos, Galileo no era considerado un revolucionario. Por lo mismo sólo fue condenado a permanecer prisionero en su casa, durante el resto de su vida.

1.4 La ciencia se reforma y organiza

En esta etapa de gran auge científico no sólo la ciencia sufrió cambios. También la conciencia del hombre fue alterada, en el sentido de sensibilizar a éste acerca de la existencia de un mundo real exterior a él e independiente de su conciencia; que puede ser estudiado y entendido a partir de considerar el tiempo, la velocidad y el movimiento no como cualidades misteriosas sino como variables medibles y calculables matemáticamente. Algunas de las leyes y principios fundamentales para el desarrollo de la ciencia fueron descubiertos. A manera de ejemplo citemos algunas: la ley de la caída de los cuerpos, la circulación de la sangre y la ley de la inercia.

Dos principios fundamentales de la nueva metodología fueron establecidos: 1. *las deducciones matemáticas de una ley científica formulada matemáticamente tienen la misma validez que la ley* y, 2. *ésta es la forma de hacer ciencia teórica.*

Surgieron las primeras sociedades e Instituciones Científicas: la *Royal Society* de Londres y *la Académie des Sciences* de París, el *Royal Observatory* de Greenwich *y el Observatorie Royal* de París, respectivamente. La formación de las sociedades científicas fue un factor muy importante en el establecimiento de la ciencia como parte de la cultura, y por tanto, plenamente reconocida. La fundación de la *Royal Society* estuvo influenciada por el pensamiento de Francis Bacon, quien junto con Descartes consiguió elevar la estimación por la ciencia experimental en los círculos cultos, a un nivel comparable al de la literatura. Bacon tenía la convicción de que, contando con un cuerpo de trabajadores científicos bien organizado y bien equipado, la actividad científica sería altamente fructífera. No se consideraba él mismo, como hombre de ciencia o inventor, sino como un inspirador de la ciencia y de la invención*[3]*. Y decía:

"Sólo he tocado la campana para exhortar a los demás a que se asocien para aprender".

1.5 La maquinaria empieza a funcionar

Una primera gran síntesis en la que culmina esta revolución científica en curso, es la publicación en 1687, de la obra cumbre de la dinámica clásica y obra maestra de Isaac Newton (1642-1727): *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Aquí, Newton rompe las barreras aristotélicas que separaban los cielos de la tierra, pues no importando si el movimiento se efectuaba sobre la tierra, hacia ésta o en el cielo, logró probar que todos, absolutamente todos los movimientos obedecen una sola y la misma ley: la *ley de la gravitación universal*, que se expresa como: *cualesquiera dos cuerpos de masas* m_1 y m_2 *se atraen con una fuerza cuya magnitud es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.* Desde ese instante, en el mundo no pueden existir casualidades de ningún género. Predomina la causalidad, por lo que todo está predeterminado. Es imposible cualquier arbitrariedad. La sinfonía del mundo se interpreta como por notas y en la orquesta universal reina la más perfecta armonía. Para la formulación de sus leyes de movimiento, Newton tuvo que introducir una matemática adecuada. Así, teniendo como motivación la descripción del movimiento de los cuerpos (de todos), Isaac Newton inventa el Cálculo Diferencial e Integral y es precisamente en sus términos como expresa sus leyes de movimiento (Leibniz, con motivaciones de tipo grométrico, independientemente de Newton también llega a la invención del Cálculo Diferencial e Integral). Con los *Principia* no solo se realiza la primera gran síntesis de la ciencia, sino que entre otras, abre la posibilidad de hacer realidad uno de los más viejos sueños de la humanidad: *entender el movimiento de los cuerpos celestes.*

1.6 ¿Los cielos permanecen?

El estudio del movimiento de los cuerpos celestes, tenía el reto de dar respuesta a preguntas como las siguientes:

1. *¿En el futuro, durante miles de millones de años, los planetas seguirán las mismas trayectorias o en algún momento algunos de ellos chocarán entre si o quizá alguno escapará del sistema solar?*

2. *¿Los efectos de las interacciones mutuas de todos los cuerpos del sistema solar, no modificarán de manera significativa las trayectorias actuales de los planetas y demás cuerpos de dicho sistema o, por el contrario las transformarán de una forma radical e irreversible?*

A las cuales no se les había podido dar una respuesta. La búsqueda de respuesta a éstas y otras preguntas fue una de las motivaciones que guiaron las investigaciones que se emprendieron sobre el movimiento.

Una formulación que recoge en esencia lo que plantean las preguntas 1 y 2, y que además sintetiza el planteamiento de un problema que ha estado durante mucho tiempo en la mira de los estudiosos del movimiento del sistema solar, es la siguiente:

¿El Sistema Solar es Estable?

Al no estar definido en forma precisa el concepto de estabilidad, el sentido de la pregunta no necesariamente iba a ser entendido unívocamente. Por principio de cuentas había que precisar el significado de ser estable. En efecto una muestra de lo vaga que podría ser la idea de estabilidad que se manejaba, nos la proporciona la enciclopedia francesa del siglo XVIII, coordinada por Denis Diderot y Jean Le Rond D'Alambert, donde se transcribe inmovilidad por estabilidad[17]. Sin embargo, en la respuesta de quienes abordaron este problema, va implícito en qué sentido se maneja la idea de ser estable. Sobre el particular se abunda más adelante.

Antes de los *Principia* de Newton, prácticamente era imposible resolver esta interrogante. Es en los *Principia* donde por primera vez, se plantea el problema del movimiento en términos de ecuaciones diferenciales *no lineales* asociadas a la posición de masas puntuales que se atraen con una fuerza cuya magnitud está dada por la *ley de la gravitación universal.*

1.7 Las perturbaciones meten ruido

De la ley de la gravitación universal se deduce que si cualquier cuerpo del sistema solar fuese atraido únicamente por el sol, entonces dicho cuerpo se movería alrededor de él exactamente como lo establecen las leyes de Kepler.[3] A este tipo de movimiento se le llama movimiento no perturbado. En realidad todos los cuerpos del sistema solar tienen atracciones mutuas. Por esta razón, ningún cuerpo del sistema solar se mueve describiendo exactamente una trayectoria elíptica, es decir, sus trayectorias reales tienen desviaciones respecto a esta ley. Por la misma razón, respecto a las otras dos.

A las desviaciones de los movimientos respecto de las leyes de Kepler se les llama *perturbaciones*,y, en consecuencia, al movimiento real de los cuerpos se le llama *movimiento perturbado*. Las perturbaciones son de dos clases:

1. *Movimientos oscilatorios con periodos relativamente cortos, del orden de unos cuantos años.*

2. *Pequeños cambios en los parámetros de la elipse, cambios que pueden ser oscilatorios con períodos muy largos, quizá del orden de decenas de miles de millones de años o pueden ser no oscilatorios.*

A las de la primera clase se les llama *desigualdades periódicas*, y pueden concebirse como la respuesta de un cuerpo a las fuerzas periódicas ejercidas sobre él por sus vecinos al describir sus órbitas. Las de la segunda clase se conocen como *desigualdades seculares,* y para el sistema solar lo importante es saber si estas desigualdades a través de los milenios provocarán la destrucción del sistema[1] y [29].

Muchos matemáticos y astrónomos en el siglo XVIII, dedicaron parte de sus investigaciones a mostrar que estas perturbaciones de las trayectorias de

[3] Leyes de Kepler:

1. La órbita de un planeta alrededor del sol es una elipse, con el sol colocado en uno de sus focos.

2. El vector de posición entre el sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. El cuadrado del periodo órbital de un planeta es proporcional al cubo del eje mayor de su órbita.

los cuerpos del sistema solar, es decir, su desviación respecto a las trayectorias que se deducían a partir de las leyes de Kepler, estaban en concordancia con la ley de la gravitación. Esto generó importantes trabajos en Mecánica Celeste.

1.8 El problema de los n cuerpos

En el transcurso de los siglos XVIII y XIX casi todos los matemáticos, en alguna etapa de su labor científica se dieron a la tarea de estudiar el problema de la estabilidad de sistema solar, cuya formulación matemática en su forma general, consiste en estudiar cómo se mueven n partículas en el espacio tridimensional, si la ley que rige el movimiento se obtiene de la gravitación universal. Este es el conocido problema de los n cuerpos. Más de 800 artículos relacionados con este problema fueron publicados entre 1750 y principios del siglo XX.

Aquí sólo mencinamos algunos de los resultados sobre el problema:

En 1767 Leonhard Euler (1707-1783), publicó un estudio del problema de los tres cuerpos. En él obtuvo una clase completa de soluciones periódicas. Probó que si tres partículas de masas arbitrarias inicialmente están colocadas sobre una línea en los puntos A, B y C respectivamente, si se cumple que $\frac{AB}{BC}$ tiene un valor dado, y se le asignan velocidades adecuadas a cada una de las partículas, entonces éstas se mueven en órbitas elípticas, manteniendo todo el tiempo su configuración colineal. A este tipo de soluciones se les conoce como *soluciones eulerianas* del problema de los tres cuerpos.

Pierre Simon Laplace (1749-1827), en su "*Memoria sobre la Estabilidad*", publicada en 1773 enunció y demostró el siguiente teorema:

Teorema 1.1 *[6]"En la primera aproximación de las series de potencias de las excentricidades, los ejes mayores de los planetas no tienen términos seculares."*

Los términos seculares dependen de la variable tiempo. Si los términos seculares no aparecían, era claro, que por no aparecer el tiempo, los ejes mayores de las órbitas de los planetas permanecían acotados, es decir. son funciones acotadas del tiempo.

Con este trabajo basado en el método de aproximación por series de potencias, Laplace inició lo que se conoce como *teoría de perturbación.* Dicho a grandes rasgos ésta consiste en lo siguiente. Para resolver un problema, se toma una solución conocida para un problema semejante más simple, y sucesivamente se modifica para aproximar mejor la solución correcta, que no se puede calcular exactamente. Para aplicar este método se requiere un pequeño parámetro en términos del cual hacer la expansión en series de potencias, Laplace usó las excentricidades. Otro aspecto importante es que también con este trabajo formalmente nació la Mecánica Celeste, y fue precisamente Laplace quien le puso dicho nombre.

En 1772 Joseph Louis Lagrange (1736-1813), encontró otra clase importante de órbitas en el problema de los tres cuerpos. Mostró que si, en el momento inicial las tres partículas se colocan en los vértices de un triángulo equilátero, y tienen velocidades adecuadas, entonces se moverán periódicamente sobre elipses, preservando su configuración equilátera a pesar de que el tamaño del triángulo y la orientación de las órbitas se modifican. A esta clase de soluciones del problema de los tres cuerpos se les llama *soluciones lagrangianas*. Entre 1774 y 1776, Lagrange extendió el resultado de Laplace sobre la estabilidad del sistema solar al probar que para todos los órdenes de aproximación del seno del ángulo de las inclinaciones mutuas, y para las perturbaciones de primer orden con respecto a las masas, los términos seculares no aparecen. En 1778 publicó su obra maestra Méchanique Analytique donde introduce por primera vez la idea de que la mecánica es la geometría de cuatro dimensiones: *tres coordenadas espaciales y una temporal.*

1.9 El paraiso del determinismo

Con Laplace y Lagrange y, apartir de ellos, la Mecánica Celeste, que junto con la Mecánica de Fluidos y la Teoría de la Elasticidad fueron logros de la mecánica newtoniana, alcanzó niveles de perfección hasta ese momento no alcanzados en ninguna de las ciencias, como quedó fehacientemente establecido con el que se puede considerar el máximo logro de esta magnífica y precisa "maquinaria", construida con base en la mecánica newtoniana como resultado de la abstracción matemática. El acontecimiento al que nos referimos es el descubrimiento de Neptuno. Esta hazaña del razonamiento tuvo su concreción el 23 de septiembre de 1846. Los astrónomos J. Gottfried Galle y Heinrich D'Arrest, en esa fecha localizaron un nuevo planeta (que posterirmente se le llamó Neptuno), en el lugar que habían determinado teóricamente los matemáticos John Couch Adams y Urban Joseph Leverrier, cada uno trabajando independientemente del otro. Fue éste, uno de los más brillantes resultados de la ciencia, un descubrimiento "en la punta de la pluma", y un gran triunfo del razonamiento humano, pero ante todo un punto a favor del determinismo que permeaba mentes y ecuaciones.

Con este descubrimiento se acabó de convencer a los especialistas, de la existencia de leyes de la naturaleza que podían ser utilizadas para revelar el pasado y predecir el futuro a partir de información del presente, y además con muy buenos resultados.

La formulación más clara del determinismo radical en que se transformó esta forma de ver el mundo, la hace Laplace en su *Essai Philosophique sur les Probabilités[12].*

"Nous devons done envisager l'état présent de l'univers comme l'effect de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaitrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plux léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et Géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de compendre dans les mêmes expressions analytiques les etats passés et futurs du système du monde."[4]

[4] "Debemos, pues, considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que debe seguirlo. Una inteligencia que en un instante conociera los datos y todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la conforman, si además, fuera suficientemente vasta para someter estos datos al Análisis, podría abarcar en una misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo, y los de los átomos más ligeros; para ella nada sería incierto, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un tenue esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y en geometría, junto con la gravitación universal lo han puesto en condiciones de abarcar en las mismas expresiones analíticas los estados pasados

¡El determinismo en su máxima expresión!

1.10 Los excesos del determinismo

Habían transcurrido más de 150 años después de Newton, y la supeordenación de la mecánica newtoniana aún proporcionaba a los físicos la máxima satisfacción. Por estos tiempos, los científicos solamente se sentían satisfechos cuando lograban meter en el marco del mecanicismo, a cualquier parte nueva del mundo desconocida hasta entonces. Y la intrepretación de la naturaleza, durante cierto tiempo permaneció sometida al capricho de las ideas newtonianas. Pero esto no podía continuar indefinidamente, con excesos tales como el de Spinoza, quien trató de reducir la Etica a principios matemáticos. Los científicos nuevamente se tuvieron que convencer de que nada hay menos sólido que los dogmas petrificados. De una forma absolutamente inevitable, se fueron descubriendo fenómenos que ya no fue posible introducir en el marco del determinismo mecanicista, a pesar de complicar más y más los modelos utilizados para la explicación de algunos de ellos. A finales del siglo XIX estalló la crisis de la mecánica newtoniana y se sintió tambalear este determinismo del tiempo y el espacio absolutos, que reinaba desde hacía casi dos siglos. Las investigaciones en Termodinámica revelaron la existencia de procesos irreversibles para los que la flecha del tiempo tiene un único efecto: avanzan hacia estados de máxima entropía. Estos descubrimientos marcan nuevos rumbos. Aquí se empezó a gestar una nueva visión del mundo. El determinismo fracasa en su afán de abarcarlo todo. Con este fracaso del determinismo se dan los primeros pasos para diseñar el nuevo vocabulario, los nuevos conceptos que permitirán afrontar *el azar, el tiempo, lo complejo, el caos, la vida y la vida humana en el mundo. Así,* conceptos como: *sistemas fuera del equilibrio, atractor, bifurcación, evolución, rompimiento de simetría, entropía, irreversibilidad,* y otros más, se introdujeron. Todo ello conducirá a un cambio notable en el planteamiento de los problemas y en la visión del universo. Aquí, el problema de la realidad y la existencia humana son inseparables. En esta forma de ver la naturaleza, la reversibilidad y la simplicidad clásicas son sólo casos particulares[25].

---

y futuros del mundo."

1.11 Nuevos horizontes

En 1809, Siméon Denis Poisson (1781-1840), obtuvo una mejor aproximación que la de Lagrange, al probar que *los ejes mayores de los planetas no tienen términos seculares en las perturbaciones de segundo orden respecto a las masas.* Además de la demostración de que los ejes mayores de las órbitas permanecían acotados, él introdujo una definición en la que precisa lo que entiende por estabilidad de un sistema de partículas. Esta es:

Definición 1.2 *(Poisson [6]) "El movimiento de un sistema de partículas es estable, si su configuración regresa a una posición cercana a la posición inicial una y otra vez."*

Los diferentes intentos que se hicieron por mejorar la aproximación de Poisson no tuvieron exito, durante mucho tiempo. Fue hasta 1878 cuando se obtuvo que abría nuevas perspectivas al problema. El matemático rumano Spiru Haretu (1851-1912), demostró que *en la tercera aproximación de las series de potencias con respecto a las masas, aparecen términos seculares en el valor de los ejes mayores de las órbitas de los planetas.* Con este resultado se daba la posibilidad de que las órbitas de los planetas no sólo cambiaran de tamaño, sino también de forma, lo cual no necesariamente implica la inestabilidad del sistema solar, porque las variaciones en el tamaño de los ejes no son necesariamente muy grandes. Pero esto al menos ponía en entredicho la estabilidad del sistema solar*[6].*

1.12 Poincaré y el caos

El matemático y físico francés Henri Poincaré (1854-1912), quien con una mente universal incursionó en diversos campos de las matemáticas y de la física de su época. Lo mismo: Mecánica, Astronomía, Mecánica Celeste, Física Matemática y Ecuaciones Diferenciales que Teoría de los Números, Análisis Complejo y Teoría del Potencial; e hizo contribuciones en varios de ellos, ya sea obteniendo nuevos resultados, creando nuevos conceptos o generando nuevas áreas de trabajo como la Topología, la Teoría Ergódica y la Teoría Cualitativa de los Sistemas Dinámicos. Como era de esperarse, también se interesó en el problema de los n cuerpos. En el caso particular $n = 3$, probó la no existencia en general de integrales uniformes, lo que significaba que había la posibilidad de que éste no pudiera resolverse por métodos cuantitativos. En el llamado problema restringido de los tres cuerpos (donde el movimiento es en un plano y una de las masas es muy pequeña respecto a las otras dos), mostró que podían aparecer órbitas doblemente asintóticas a las que llamó *órbitas homoclínicas*. Usando como modelo ilustrativo de un sistema conservativo con dos grados de libertad, un péndulo no amortiguado, pero con la característica de que el peso está unido por medio de una barra rígida al pivote, en el cual se le imprimen impulsos periódicos (de manera semejante como un niño impulsa sus piernas en un columpio), se percató de la existencia no sólo de órbitas homoclínicas, sino de "madejas" homoclínicas. En relación con este extraño comportamiento, en su obra, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Poincaré escribe[24].

"Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infinit dont chacune correspond à une solution doublement asymptotyque, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrés; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les sèries de Bohlin sont divergentes."[5]

La cita es elocuente. Poincaré tenía ante sus ojos la primera manifestación matemática de lo que actualmente se conoce como caos. El científico francés, al darse cuenta de que ésta complejidad está inmersa en el problema de los n cuerpos y de que, con los métodos conocidos hasta ese momento, era

[5] "Cuando uno quiere representar la figura formada por las dos curvas y sus infinitas intersecciones, cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica, estas intersecciones forman una suerte de enrejado, de tejido, de red con mallas infinitamente apretadas; cada una de las dos curvas nunca debe autointersectarse, sino que debe doblarse hacia atrás sobre ella misma de una forma muy compleja a fin de intersectar a todas las mallas de la red una infinidad de veces. Es tal la complejidad de dicha figura, que no he intentado trazarla. Nada es más apropiado para hacernos una idea de la complejidad del problema de los tres cuerpos y en general de todos los problemas de Dinámica que no tienen una integral uniforme y que las series de Bohlin son divergentes."

imposible resolverlo, plantea que se debería empezar un nuevo enfoque del mismo, incorporando los aspectos geométricos y cualitativos en el estudio de dicho problema. Aún cuando se da cuenta de que los comportamientos regulares y "caóticos" de las soluciones de este problema, están íntimamente relacionados, se resiste a aceptar la idea del caos. ¿Cómo podría convencer a sus contemporáneos de que los métodos cuantitativos, efectivamente se encontraban ante barreras insuperables y que el determinismo no implica predicción aproximada? ¿Cómo podría él, convencer al mundo científico de que, a largos intervalos de tiempo, el movimiento gravitacional de tres cuerpos celestes podría ser impredecible como el clima? ¿Quién podría aceptar ésto?

1.13 Sin embargo ... funciona

Este entrelazamiento entre el orden y el caos, posteriormente quedó contemplado en la llamada teoría KAM, nombre debido a que sus iniciadores fueron Andrei Nikolaievich Kolmogorov (1903-1987), Vladimir I. Arnold (1937-) y Jürguen Moser (1928-1999). Los teoremas de KAM tratan con sistemas hamiltonianos generales (sistemas que describen procesos de movimientos no amortiguados), por lo que su importancia va más allá de su aplicación únicamente en problemas de la física. Uno de los principales resultados de esta teoría garantiza la existencia de órbitas cuasiperiódicas para cierta clase de ecuaciones diferenciales en las que queda incluido el problema de los n cuerpos. Se asegura que bajo ciertas condiciones, una perturbación muy pequeña en las condiciones iniciales cambia una órbita *cuasiperiódica* estable en una inestable[19].

Lejos de encontrar la prueba definitiva de la estabilidad del sistema solar, lo que se vislumbra actualmente como cierto acerca de las órbitas planetarias, es su incertidumbre; el sistema solar realmente no marcha como un reloj. La sensibilidad a las condiciones iniciales provocan que el caos aceche por todas partes. No puede mantenerse más, como un modelo de perfección y símbolo de un universo mecánico predecible. El sistema solar ya no se ajusta a la imagen de una máquina de precisión, pues el caos y la incertidumbre han invadido el mecanismo de reloj. Al margen que los matemáticos han demostrado que los comportamientos regular y caótico del sistema solar, están estrechamente ligados en el sentido de que pequeñas perturbaciones de su estado inicial nos pueden llevar a uno u otro; el tiempo que tiene que pasar para que el caos se manifieste, es muy grande en comparación con el tiempo de existencia del sistema solar. Al respecto, Arnold afirma que en los próximos 10^9 años la parte central del sistema solar difícilmente cambiará, y el *mecanismo de reloj* descrito por Newton seguirá funcionando[22].

1.14 Surge la estabilidad

Los grandes esfuerzos encaminados a determinar la estabilidad del sistema solar, que se hicieron durante más de dos siglos arrojaron muchos resultados en torno al problema. Algunos de ellos fueron verdad muy importantes. Aunque nos pudiera parecer extraño, se desarrollaron sin disponer de una definición precisa y acabada del concepto matemático de estabilidad.

En el terreno de la ciencia, muy frecuentemente se dan situaciones parecidas a la descrita; primero se trabaja en una determinada dirección con una idea intuitiva de algún concepto, y cuando se llega a una etapa de madurez adecuada, todo ese trabajo culmina con la correspondiente "formalización". Durante todo este tiempo nadie se había dado a la tarea de desarrollar una teoría matemática completa de la estabilidad.

No obstante, en el caso particular del problema de los n cuerpos, algunos de los matemáticos definieron lo que debía entenderse por estabilidad de ese sistema; entre ellos Poisson, y Poincaré. De hecho, Poincaré introdujo su propia definición que dice:

Definición 1.3 *[24] "Para que haya estabilidad completa en el problema de los tres cuerpos, son necesarias las tres condiciones siguientes:*

1. *ninguno de los cuerpos puede alejarse indefinidamente,*
2. *dos de los cuerpos no pueden chocar uno con el otro, y la distancia de estos dos cuerpos no puede decrecer más abajo de cierto límite,*
3. *el sistema regresa un número infinito de veces tan cerca como se quiera de la posición inicial.*

Si sólo la tercera condición se cumple y, no sabemos si las otras dos se satisfacen, diremos que el sistema es estable en el sentido de Poisson."

A finales del siglo XIX, el matemático ruso Aleksandr Mijailovich Lyapunov en su tesis doctoral *"El Problema General de la Estabilidad del Movimiento"* presentada en 1892, ofreció el primer intento de una teoría matemática completa de la estabilidad, donde lo primero que hace es dar una definición rigurosa de estabilidad del movimiento. A partir de ese momento no se podrían dar malos entendidos al respecto.

La formulación de *estabilidad de Lyapunov* del problema de la estabilidad del movimiento fue en dos direcciones.

1. Por un lado, según el método de la primera aproximación, que es aplicable cuando la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones linealizadas. En este sentido obtuvo la solución completa para los llamados movimientos "estacionarios", en los que las ecuaciones del movimiento perturbado no dependen explícitamente del tiempo; también presentó soluciones para una gran cantidad de movimientos "no estacionarios", así como un detallado estudio de movimientos "periódicos".

2. Por otro lado está el llamado *segundo método directo de Lyapunov*, que permite estudiar la estabilidad, sin ningún conocimiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Basta con que el sistema en estudio tenga una función con características apropiadas, la cual, actualmente se conoce como función de Lyapunov.

La función que se menciona, detecta si el flujo cruza a una pequeña esfera alrededor del punto de equilibrio, de adentro hacia afuera o de afuera hacia adentro.

En el primer caso, tenemos inestabilidad mientras que en el segundo, el equilibrio es estable. Desafortunadamente, esta idea geométrica tan sencilla no es tan fácil de realizar, ya que no existe un procedimiento general para encontrar funciones de Lyapunov.

Es intuitivamente claro que si cerca de un estado de equilibrio de un sistema físico, la energía del sistema es siempre decreciente, entonces el equilibrio es estable. Las funciones de Lyapunov son una simple extensión del concepto de energía. Los teoremas del método directo de Lyapunov, son una generalización de la idea física de equilibrio estable e inestable. Por lo tanto, un caso particular de la teoría de Lyapunov (del método directo), lo representa el teorema de Lagrange (demostrado por Dirichlet), que establece lo siguiente:

Teorema 1.4 *(Lagrange [27]) "Una posición donde la energía potencial es un mínimo aislado, es un equilibrio estable."*

Lyapunov fue el primero que se preguntó:

¿Podría uno establecer que si la energía potencial no tiene un mínimo, entonces el equilibrio es inestable?

Se preguntaba acerca de la invertibilidad del teorema de Lagrange. Para dar respuesta a este cuestionamiento estableció dos teoremas:

Teorema 1.5 *(Lyapunov [18]) Si en una posición de equilibrio aislada la energía potencial no tiene un mínimo, y, olvidándose de los términos de orden superior, ésta puede ser expresada como un polinomio de segundo orden, entonces el equilibrio es inestable.*

Teorema 1.6 *(Lyapunov [18]) Si en una posición de equilibrio aislada la energía potencial tiene un máximo con respecto a las variables de orden más pequeño que aparecen en la expansión de esta función, entonces el equilibrio es inestable.*

La tesis doctoral de Lyapunov se convirtió en el punto de partida de la actual teoría de la estabilidad. El estudio de la estabilidad fue separado del problema específico de la estabilidad del sistema solar, y vino a formar parte de la teoría de las ecuaciones diferenciales, completamente independiente de su origen. Sin duda, su trabajo se constituyó en la piedra angular en los estudios sobre la teoría de la estabilidad en sistemas de dimensión finita (EDO), pero también en sistemas de dimensión infinita (EDP).

Después del trabajo de Lyapunov vino una etapa modificaciones, extensiones, reformulaciones y generalizaciones de sus teoremas de estabilidad e inestabilidad. También se realizaron investigaciones sobre los correspondientes teoremas inversos y las cuestiones relativas a la obtención de funciones de Lyapunov, en donde matemáticos de todo el mundo como: N. A. Chetaev, V. I. Zubov, A. Barbashin, N. N. Krasovskii, W. Hahn, L. S. Pontriaguin, G. D. Birkhoff, y R. Bellman entre otros, han hecho pequeñas o grandes aportaciones a esta teoría de la que Lyapunov es considerado el iniciador.

Una de las tantas investigaciones que se han hecho y que han sido importantes en el desarrollo de la teoría, es la que se refiere al llamado problema de Aizerman y que consiste en estudiar la estabilidad asintótica global en sistemas autónomos no lineales de n ecuaciones diferenciales. Este problema ha sido completamente resuelto solamente en el caso de $n = 2$.

Capítulo 2

Estabilidad

En este capítulo se enuncian y demuestran los teoremas sobre estabilidad e inestabilidad en el sentido Lyapunov. Para lo cual requerimos de algunas definiciones previas.

2.1 Definiciones

Sea W un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

donde,

$$\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ \mathbf{f} \in C^1.$$

Definición 2.1 *Decimos que $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$ es un punto de equilibrio de la ecuación (2.1), si*

$$\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Evidentemente si $\widehat{\mathbf{x}}$ es un punto de equilibrio de (2.1), entonces la función constante $\mathbf{x}(t) \equiv \widehat{\mathbf{x}}$ es una solución de (2.1).

Si W es un espacio de “estados” de algún sistema físico, biológico, económico, químico, ecológico, etc., concreto cuyo modelo es (2.1), entonces $\widehat{\mathbf{x}}$ se interpreta como un “estado de equilibrio”, esto significa que si el sistema está en $\widehat{\mathbf{x}}$, siempre ha permanecido y siempre estará en $\widehat{\mathbf{x}}$.

Por conveniencia podemos suponer que $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, ya que de no ser así bastaría con introducir nuevas coordenadas en $\mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}$, en las cuales $\mathbf{f}$ tiene como punto de equilibrio al origen de coordenadas.

Es fundamental para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones, el estudio de los puntos de equilibrio, sin embargo para que un punto de equilibrio sea relevante en cuanto su contenido material neto, debe satisfacer algún “criterio de estabilidad”. La estabilidad es una propiedad rara entre las soluciones de las ecuaciones diferenciales y, si se presenta, su existencia es difícil de probar.

La noción de estabilidad más común, por haberse aprobado con los criterios de verdad de la “práctica social y científica” más rigurosos, es la noción asociada al hecho de que un punto de equilibrio es estable, si las soluciones que son cercanas permanecen cercanas en todo tiempo, esta es la noción de estabilidad en el sentido de Lyapunov. La estabilidad en el sentido de Lyapunov implica la robustez del fenómeno físico descrito por la correspondiente solución.

Definición 2.2 *(en el sentido de Lyapunov) Supongamos que* $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$ *es un punto de equilibrio de la ecuación (2.1). Entonces decimos que* $\widehat{\mathbf{x}}$ *es un punto de equilibrio estable, si para toda vecindad* U *de* $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$*, existe otra vecindad* $\widetilde{U}$ *del mismo* $\widehat{\mathbf{x}}$ *tal que toda solución* $\mathbf{x}(t)$ *con punto de inicio* $\mathbf{x}(t_0)$ *en* $\widetilde{U}$ *está definida y permanecerá en* U *para todo* $t > 0$*. La forma usual de decir lo anterior, es la siguiente:* $\widehat{\mathbf{x}}$ *es estable si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|\mathbf{x}(t_0) - \widehat{\mathbf{x}}\| < \delta$ *implica* $\|\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$*, para todo* $t > t_0$*.*

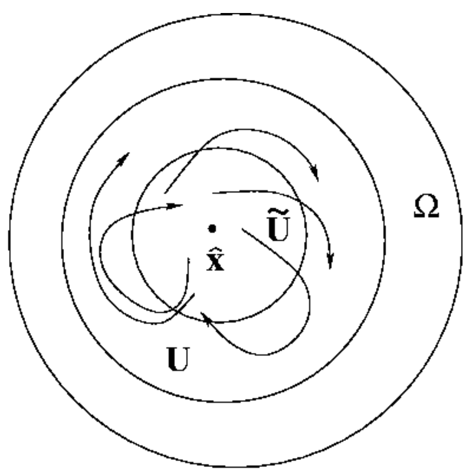

Figura 2.1. El punto de equilibrio $\widehat{\mathbf{x}}$ es estable.

Definición 2.3 *Si bajo las condiciones de la definición anterior, la vecindad* $\widetilde{U}$ *puede elegirse de forma tal que, además de ser* $\widehat{\mathbf{x}}$ *estable se satisfaga que:*

$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}(t) = \widehat{\mathbf{x}}$, *entonces decimos que* $\widehat{\mathbf{x}}$ *es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

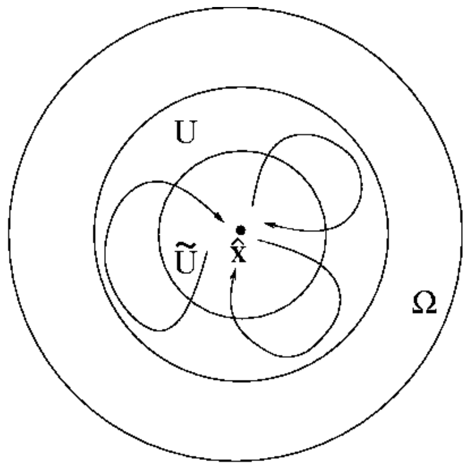

Figura 2.2. El equilibrio $\widehat{\mathbf{x}}$ es asintóticamente estable.

La inestabilidad del equilibrio se obtiene negando la estabilidad, precisémoslo.

Definición 2.4 *A todo punto de equilibrio* $\widehat{\mathbf{x}}$ *que no es estable le llamamos inestable, es decir, la negación de la definición de ser estable:* $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$ *es inestable, si existe al menos una vecindad* U *de* $\widehat{\mathbf{x}}$ *en* Ω, *tal que para toda vecindad* $\widetilde{U}$ *de* $\widehat{\mathbf{x}}$ *haya al menos una solución* $\mathbf{x}(t)$ *que empezando en* $\mathbf{x}(t_0) \in \widetilde{U}$ *abandona* U *(no permanece completamente en* U *).*

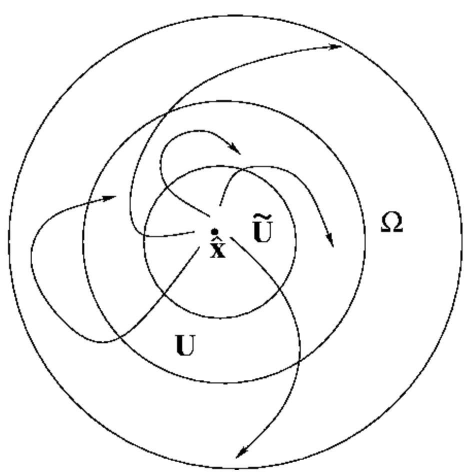

Figura 2.3. El equilibrio $\widehat{\mathbf{x}}$ es inestable.

Una primera forma de determinar la establidad sería encontrar todas las soluciones de la ecuación (2.1), lo cual puede resultar muy difícil si no es que hasta imposible. Por lo mismo, es muy importante contar con criterios de estabilidad que no requieran del conocimiento de las soluciones de (2.1). Lyapunov en su tesis doctoral, presentó un método que nos libera de de obtener las soluciones. Se trata de una generalización de la idea de que para soluciones con ciertos comportamientos, existe una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}\|$ decrece para las soluciones $\mathbf{x}(t)$ "cercanas" a $\widehat{\mathbf{x}}$. Lyapunov mostró que podían usarse otro tipo de funciones (ahora llamadas de Lyapunov), en lugar de la norma para garantizar la estabilidad. Definámoslas:

Definición 2.5 *A una función*

$$V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

con derivadas parciales continuas en la región Ω que incluye al origen y que, para todo $\mathbf{x}$ en $\Omega - \{\mathbf{0}\}$ satisface la desigualdad $V(\mathbf{x}) > 0$, le llamamos definida positiva. Si lo que se cumple es $V(\mathbf{x}) < 0$, entonces decimos que V es definida negativa. En ambos casos decimos que V es una función de signo definido en Ω.

Si en todo Ω se cumple que $V(\mathbf{x}) > 0$, o bien $V(\mathbf{x}) < 0$ a la función V se le llama de signo constante en Ω.

Definición 2.6 *Una función $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con primeras derivadas parciales continuas, decimos que es una función de Lyapunov para el sistema (2.1) en el origen, si:*

i) $V(\mathbf{x}) < 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $V(\mathbf{0}) = 0$,

ii) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{\phi}(t))\,|_{t=0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ *, donde $\boldsymbol{\phi}$ es solución de.*(2.1) *y* $\boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{x}$.

La finalidad de introducir las funciones de Lyapunov, es que a partir del estudio del comportamiento de dicha función a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1) sin necesidad de conocerlas, se deduzca el comportamiento de las mismas. Hasta ahora no existe un método general para encontrar funciones de Lyapunov. El determinarlas se convierte en un juego de "ingenio" o de "ensayo y error". Aún así, si estamos trabajando con sistemas mecánicos y eléctricos, existen funciones "naturales" como la energía con las que se puede probar, y resultan ser funciones de Lyapunov[28].

2.2 Teoremas de Estabilidad

Establezcamos algunos criterios suficientes sobre estabilidad con base en las funciones de Lyapunov.

Consideremos de nuevo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

donde las componentes del vector $\mathbf{f}$, son funciones continuas que satisfacen una condición de Lipschitz en cierta región Ω,que incluye a una vecindad del origen de coordenadas.

Teorema 2.7 *Si para el sistema (2.1), en una región Ω conteniendo al origen existe una función de Lyapunov $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces la posición de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es estable en el sentido de Lyapunov.*

Demostración. Supongamos que existe una función de Lyapunov para (2.1) en el origen. Por ser Ω una región abierta, existe una bola de radio R con centro en el origen $B_R(\mathbf{0}) \subset \Omega$. Mostraremos que existe una bola de radio r, $Br(\mathbf{0})$ totalmente contenida en $B_R(\mathbf{0})$, que satisfaga que para cualquier $\mathbf{x_0} \in Br(\mathbf{0})$, la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ no abandona $B_R(\mathbf{0})$. Consideremos $V_m = \min\limits_{\mathbf{x} \in frB_R(\mathbf{0})} V(\mathbf{x})$ y tomemos $r > 0$ tal que $Br(\mathbf{0}) \subset V^{-1}(-V_m, V_m) \cap B_R(\mathbf{0})$. Si $\mathbf{x_0} \in Br(\mathbf{0})$, y tomamos la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$, entonces como V no crece sobre las trayectorias del sistema, se tiene $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) \leq V(\mathbf{x_0})$, es decir, $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) < V_m$. Entonces dicha solución para $t > 0$, no se sale de la bola $B_R(\mathbf{0})$ ya que para hacerlo tendría que cruzar $frB_R(\mathbf{0})$, pero donde la cruce tendriamos $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) \geq V_m$, lo cual no es posible. Por lo tanto el origen es estable.■

Teorema 2.8 *Si para el sistema (2.1), en una región Ω conteniendo al origen existe una función $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida positiva, tal que $\dot{V}$ es definida negativa, entonces la posición de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.*

Demostración. Como se cumplen las condiciones del teorema de estabilidad, entonces el origen es estable. Sea $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ la solución de (2.1) tal que en $t = t_0$ vale $\mathbf{x_0}$, entonces

$$V(\widehat{\mathbf{x}}(t)) < c_0 = V(\mathbf{x_0}) \text{ para todo } t > t_0,$$

ya que V es decreciente a lo largo de las trayectorias. Luego

$$\lim_{t\to\infty} V\left(\widehat{\mathbf{x}}\left(t\right)\right) = 0$$

pero como V es continua, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} V\left(\widehat{\mathbf{x}}\left(t\right)\right) = V\left(\lim\limits_{t\to\infty} \widehat{\mathbf{x}}\left(t\right)\right) = 0$, por lo que $\lim\limits_{t\to\infty} \widehat{\mathbf{x}}\left(t\right) = 0$.

Por lo tanto, el origen es asintóticamente estable.■

En los dos teoremas que siguen se establecen condiciones bajo las cuales existe inestabilidad.

Teorema 2.9 *Si existe una función $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en una región Ω conteniendo al origen, con $V(\mathbf{0}) = 0$, y $\dot{V}$ es definida positiva o definida negativa, tal que en toda vecindad U que contiene al origen $U \subset \Omega$, existe al menos un punto $\mathbf{x}$ donde V tiene el mismo signo que $\dot{V}$, entonces el origen es inestable.*

Demostración. Supongamos que $\dot{V}$ es definida positiva en Ω, y sea $\|\mathbf{x}\| \leq r$ una esfera de radio r completamente contenida en Ω para algún $r > 0$. Entonces V siendo continua en Ω, lo es en cualquier conjunto cerrado y acotado en Ω y en particular existe una constante $M > 0$ tal que $|V(\mathbf{x})| < M$ para $\|\mathbf{x}\| \leq r$. Para cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (2.1), $\dot{V}$ definida positiva implica

$$\int_0^t \dot{V}\left(\mathbf{x}\left(s\right)\right) ds = V\left(\mathbf{x}\left(t\right)\right) - V\left(\mathbf{x}\left(0\right)\right) > 0 \text{ así que } V\left(\mathbf{x}\left(t\right)\right) > V\left(\mathbf{x}\left(0\right)\right) \text{ para } t > 0.$$

Ahora sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces por hipótesis existe un punto $\mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x_0}\| \leq \min\{\varepsilon, r\}$ tal que $V(\mathbf{x_0}) > 0$. Sea $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ la solución del sistema que satisface la condición inicial $\mathbf{x}(0, \mathbf{x_0}) = \mathbf{x_0}$. Puesto que $V(\mathbf{x})$ es continua sobre Ω y $V(\mathbf{0}) = 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|V(\mathbf{x})| < V(\mathbf{x_0})$ para $\|\mathbf{x}\| < \delta$. Por el teorema de existencia y unicidad, la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ existe en algún intervalo $[0, t)$, donde suponemos -si existe- que t_1 es el primer punto donde $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})\| = r$; si no existe t_1 , sea $t_1 = +\infty$. Mostremos que $t_1 = +\infty$ no es posible. Consideremos la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ en el intervalo $[0, t_1)$. Puesto que $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) \geq V(\mathbf{x_0}) > 0$, $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0}))$ es no decreciente en $0 \leq t < t_1$. Pero $\|\mathbf{x}\| < \delta$ implica $|V(\mathbf{x})| < V(\mathbf{x_0})$ y, por lo tanto, debemos tener $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})\| \geq \delta$ para $0 \leq t < t_1$. Definamos

$$\mu = \min_{0<\delta\leq\|\mathbf{x}\|\leq r} \dot{V}\left(\mathbf{x}\right)$$

Puesto que $\dot{V}$ es continua sobre la región cerrada entre las dos esferas concéntricas, este mínimo existe y es alcanzado en algún punto $\widehat{\mathbf{x}}$, $0 < \delta \leq \|\widehat{\mathbf{x}}\| \leq r$, y puesto que $\dot{V}$ es definida positiva, $\mu > 0$. Por lo tanto tenemos $\dot{V}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) \geq \mu > 0$ para $0 \leq t < t_1$. Entonces $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) \geq V(\mathbf{x_0}) + \mu t$ y por lo tanto también $\lim_{t \to +\infty} V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})) = +\infty$. Pero como $|V(\mathbf{x})| < M$ para $\|\mathbf{x}\| \leq r$, debe existir un primer t_1, $0 < t_1 \leq +\infty$, tal que $\|\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x_0})\| = r$. Por lo tanto, no importa que tan pequeño tomemos $\varepsilon > 0$ (es decir, no importa que tan pequeño sea $\|\mathbf{x_0}\|$), la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ alcanzará la frontera $\|\mathbf{x}\| = r$ en un tiempo finito $t = t_1$ y en consecuencia la solución cero no puede ser estable.■

Teorema 2.10 *Si existe una función* $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *en una región* Ω *conteniendo al origen, tal que* $V(\mathbf{0}) = 0$, *y*

$$\dot{V} = \lambda V + W$$

donde $\lambda > 0$ *es una constante y* W *no negativa o no positiva, tal que en toda vecindad* U *que contiene al origen existe al menos un* $\mathbf{x}$ *para el que* $V(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}) > 0$, *entonces el origen es inestable.*

Demostración. Sabemos que W es de signo definido o es idénticamente cero, por lo que en el caso de W de signo definido, del hecho de que toda vecindad del origen contiene al menos un $\mathbf{x}$ tal que $V(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}) > 0$, se deduce que V y W tienen el mismo signo. Luego V y $\dot{V} = \lambda V + W$, tienen el mismo signo, ya que $\lambda > 0$. Por lo tanto, a partir del teorema anterior se tiene que el origen es inestable.■

2.3 La geometría de las funciones de Lyapunov

La imagen más común que se maneja para funciones de Lyapunov asociadas a un sistema autónomo plano con equilibrio en el origen, es la de una vasija como la que se ilustra en la figura siguiente:

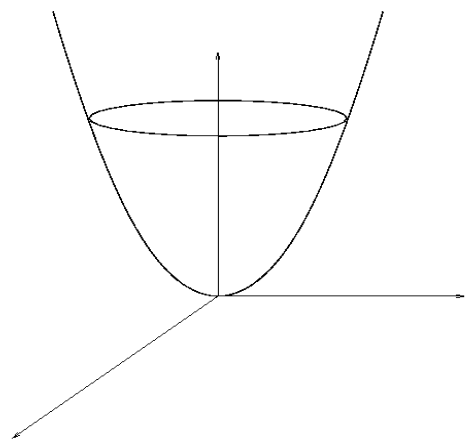

Figura 2.4. Esta es la imagen más popular de una función de Lyapunov.

A pesar de que la imagen más popular de las funciones de Lyapunov es como la ilustrada en la figura, hay funciones que tienen un aspecto diferente. Para mostrarlo, consideremos la función[9].

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} \left(sen \frac{1}{x_i} + 2 \right) \;\; si\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\ y\ H\ \ (\mathbf{0}) = 0,$$

cuyas derivadas parciales existen y son continuas en el origen, es positiva definida en $D = \{\mathbf{x}\, ||x_i| < 1\}$, no tiene un mínimo aislado en el origen y para todo punto $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$ se cumple que

$$0 \leq H(\mathbf{x}) \leq 3 \|\mathbf{x}\|^2 .$$

De hecho $H(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = -gradH(\mathbf{x})$$

ya que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{H} = - \|gradH(\mathbf{x})\|^2 \leq 0.$$

Por lo tanto el equilibrio es estable.

La imagen de H no es como la de una vasija lisa con un mínimo aislado en el origen, sino como la de una vasija "ondulada" que no tiene un mínimo local aislado en el origen.

2.4 Construcción de algunas funciones de Lyapunov

Como habíamos dicho, no existe un procedimiento general para determinar funciones de Lyapunov, pero en algún tipo de sistemas se pueden determinar funciones de Lyapunov en forma general, por ejemplo, consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

con $\mathbf{f}$ tal que $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$, y $A_{n\times n}$ una matríz diagonal cuyos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son reales y negativos.

Si tomamos $V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, esta función es positiva definida. Más aún, su derivada orbital, es

$$\dot{V} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i\dot{x}_i = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(\mathbf{x}) = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{f_i(\mathbf{x})}{x_i}$$

Si tomamos $0 < \varepsilon < \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}\| < \delta$, se tiene $\left\|\frac{f_i(\mathbf{x})}{x_i}\right\| < \varepsilon$ para cada x_i y $f_i(\mathbf{x})$, por lo que

$$2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{f_i(\mathbf{x})}{x_i} < 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0$$

. ya que todos los valores propios λ_i son negativos. Esto significa que $\dot{V}$ es definida negativa en una vecindad del origen. Por lo tanto V es una función de Lyapunov para el sistema (2.1), y en consecuencia el origen es asintóticamente estable.

Hasta aquí, en las definiciones y teoremas de este capítulo, se considera la estabilidad de las soluciones como una propiedad local. De aquí en adelante la trataremos globalmente.

Definición 2.11 *La solución nula del sistema (2.1), decimos que es globalmente asintóticamente estable (o estable bajo cualquier condición inicial), si es estable en el sentido de Lyapunov y si cualquier otra solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema posee la propiedad de que*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Teorema 2.12 *El conjunto de los puntos α y $\omega-$ límite de un punto dado* $\mathbf{p}$ *del espacio fase, es un conjunto cerrado formado por trayectorias completas del sistema (2.1).*

Teorema 2.13 *(Sobre la Estabilidad Global). Si existe una función definida positiva e infinitamente grande V, la cual posee derivada definida negativa en todo el espacio, entonces la solución nula del sistema (2.1) es globalmente asintóticamente estable.*

Este teorema es un caso particular del siguiente teorema:

Teorema 2.14 (Barbashin-Krasovskii) *Si existe una función definida positiva V, tal que*

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} V(\mathbf{x}) = \infty,$$

y tal que $\dot{V}$ satisfaga las siguientes dos condiciones:

i) $\dot{V} < 0$ fuera de M,

ii) $\dot{V} = 0$ sobre M, donde M no contiene trayectorias completas del sistema (a excepción de la nula). Entonces la solución nula del sistema (2.1) es globalmente asintóticamenta estable[4].

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto arbitrario del espacio fase. Consideremos la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ $(t \geq 0)$, tal que satisface $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Como $\dot{V} \leq 0$, entonces $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \leq V(\mathbf{x}_0)$ para $t \geq 0$. En consecuencia el conjunto $V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0)$ es acotado, entonces la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ se encuentra en una región acotada y en consecuencia posee *puntos $\omega-$ límite*.

Demostremos que el conjunto de los *puntos $\omega-$ límite* de la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ está sobre una misma superficie de nivel de la función V. Notemos que la función V no crece pues $\dot{V} \leq 0$, y es acotada inferiormente dado que $V \geq 0$. En consecuencia existe el límite

$$V_0 = \lim_{t\to+\infty} V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)).$$

Sea $\widetilde{\mathbf{x}}$ un punto de la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, es decir, $\widetilde{\mathbf{x}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)$. Como V es continua, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} V(\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)) = V\left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0)\right) = V(\widetilde{\mathbf{x}}) = V_0.$$

Luego, cualquier punto $\omega-$ *límite* $\widetilde{\mathbf{x}}$ de la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ está sobre la superficie de nivel $V(\mathbf{x}) = V_0$.

Existen dos posibilidades: $V_0 = 0$ o $V_0 \neq 0$.

1. $V_0 = 0$. En este caso la superficie de nivel $V(\mathbf{x}) = 0$ es el origen de coordenadas ya que V es definida positiva. Por lo que el conjunto $\omega-$ *límite de* la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ coincide con el origen de coordenadas, y entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{t \to +\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

2. $V_0 \neq 0$. Entoces el conjunto $\omega-$ *límite* de la semitrayectoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ está compuesto por trayectorias completas del sistema (2.1). A lo largo de estas trayectorias tenemos que $\dot{V} = 0$. Entonces si $V_0 \neq 0$, el conjunto M contiene trayectorias del sistema, pero por hipótesis esto no es posible. En consecuencia $V_0 = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{t \to +\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Por lo tanto el origen es *globalmente asintóticamente estable.*■

En el siguiente capítulo se considerarán sistemas autónomos no lineales, y se analizará la estabilidad asintótica global del origen utilizando el teorema de Barbashin-Krasovskii.

Capítulo 3

Sistemas autónomos

En las familias de sistemas de ecuaciones diferenciales que consideraremos en los Capítulos 3 y 4, se demostrarán algunos teoremas que establecen condiciones bajo las cuales la solución nula de dichos sistemas, es *globalmente asintóticamente estable* [Veáse la definición 2.11].

Las demostraciones se harán utilizando el teorema (2.14) de Barbashin-Krasovskii (BK), enunciado y demostrado en el Capítulo 2.

3.1 Primera familia

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= f(x, y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R}^2$, $f(0,0) = 0$, a, b son constantes y además $b \neq 0$.

En el siguiente teorema se establecen condiciones para que el origen sea *globalmente asintóticamente estable (gae).*

Teorema 3.1 *Si se cumplen las condiciones*

1. $f(x, -ab^{-1}x) \neq 0$ *para* $x \neq 0$,

2. $F(x, y) < 0$ *para* $x \neq 0$,

3. $b\ f(x, y) \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[f(s, y) - f(0, y)]\, ds \geq 0$,

4. $\Phi^{'}(y) > 0$,

5. $\lim\limits_{\|x,y\|\to\infty} F(x,y) = -\infty$,

donde:
$F(x,y) = b\int_0^x [f(s,y) - f(0,y) + f(0,-ab^{-1}s)]\,ds$,
$\Phi(y) = -f(0,y) - ay$,
entonces, la solución nula del sistema (3.1) es gae.

Demostración. Para la demostración, consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(ax+by)^2 - b\int_0^x \left[f(s,y) - f(0,y) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds \\ &= \frac{1}{2}(ax+by)^2 - F(x,y). \end{aligned}$$

Probaremos que V es función de Lyapunov para *(3.1)* en el origen. Veamos.

De la condición 2) deducimos que V es una función definida positiva, y de 5), se tiene que $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} V(x,y) = \infty$.

Ahora, la derivada de V a lo largo de las soluciones del sistema *(3.1)* es:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y},$$

como

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a(ax+by) - b\left[f(x,y) - f(0,y) + f\left(0,-ab^{-1}x\right)\right],$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial y} = b(ax+by) - b\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[f(s,y) - f(0,y)]\,ds,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left\{a(ax+by) - b\left[f(x,y) - f(0,y) + f\left(0,-ab^{-1}x\right)\right]\right\}(ax+by) + \\ &\quad -\left\{b(ax+by) - b\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[f(s,y) - f(0,y)]\,ds\right\} f(x,y) \\ &= -b\left[-f(0,y) - ay + f\left(0,-ab^{-1}x\right) - a^2b^{-1}x\right](ax+by) + \\ &\quad -bf(x,y)\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[f(s,y) - f(0,y)]\,ds, \end{aligned}$$

o bien, al usar la definición de Φ, se obtiene

$$\dot{V} = -b\left(ax+by\right)\left[\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right] - bf\left(x,y\right)\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(s,y\right)-f\left(0,y\right)\right]ds.$$

De la condición 3), sabemos que

$$-bf\left(x,y\right)\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(s,y\right)-f\left(0,y\right)\right]ds \leq 0,$$

entonces para que $\dot{V} \leq 0$, es suficiente con que

$$-b\left(ax+by\right)\left[\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right] \leq 0.$$

Dependiendo del signo de b, y de $(ax+by)$ se tienen los siguientes casos:

1. $b>0$.

   - $ax+by>0$, entonces $y>-ab^{-1}x$, y como de 4) sabemos que $\Phi\left(y\right)$ es creciente, se tiene $\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)>0$. Por lo tanto $-b\left(ax+by\right)\left[\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right]<0$.
   - $ax+by<0$, luego $y<-ab^{-1}x$, y de 4) sabemos que $\Phi\left(y\right)$ es creciente, entonces $\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)<0$. Por lo tanto

     $$-b\left(ax+by\right)\left[\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right]<0.$$

2. $b<0$.

   - $ax+by>0$, es decir, $y<-ab^{-1}x$, luego $\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)<0$. Por lo tanto

     $$-b\left(ax+by\right)\left[\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right]<0.$$

   - $ax+by<0$, entonces $y>-ab^{-1}x$, luego $\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)>0$. Por lo tanto

     $$-b\left(ax+by\right)\left[\Phi\left(y\right)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right]<0.$$

Además en ambos casos si $ax+by=0$,

$$-b\,(ax+by)\left[\Phi\,(y)-\Phi\left(-ab^{-1}x\right)\right]=0.$$

Por lo tanto

$$\dot{V}\ \leq 0.$$

Para terminar la demostración, necesitamos demostrar que el conjunto $M=\left\{(x,y)\left|\dot{V}\ =0\right.\right\}$, no contiene más trayectorias completas del sistema que la posición de equilibrio $O\ (0,0)$.Para el sistema (3.1), $M\subset\{(x,y)\,|ax+by=0\}$. En efecto, si $x=x\,(t)\,,\,y=y\,(t)$ es una solución del sistema totalmente contenida en M, entonces tendremos que $ax\,(t)+by\,(t)\equiv 0$. De esto y de la primera ecuación del sistema (3.1), se desprende que

$$x\,(t)=x_0,\ x_0=cte.$$

$$y\,(t)=-ab^{-1}x_0.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (3.1), obtenemos

$$f\left(x_0,-ab^{-1}x_0\right)=0,$$

lo cual por la condición 1) del teorema, sólo es posible si $x_0=0$ y en consecuencia

$$x\,(t)=0,\ \text{y}\ y\,(t)=0,\ \text{para todo}\ t\geq 0.$$

Es decir, la única posición de equilibrio del sistema (3.1) es $O\ (0,0)$.

Como se cumplen las condiciones del teorema (2.14) de BK, entonces la solución nula del sistema (3.1) es *gae*.■

Teorema 3.2 *Si se cumplen las condiciones:*

1. $\frac{b}{x}\left[f\,(x,0)-f\,(0,-ab^{-1}x)\right]<0$, *para* $x\neq 0$
2. $a+\frac{b}{ax+by}\left[f\,(x,y)-f\,(x,0)+f\,(0,-ab^{-1}x)\right]<0$ *para* $ax+by\neq 0$,
3. $b\int_0^{\pm\infty}\left[f\,(x,0)+f\,(0,-ab^{-1}x)\right]dx=-\infty$,

entonces la solución nula del sistema (3.1) es gae.

Demostración. La haremos de forma semejante a la demostración del teorema anterior. Para ello consideremos la función

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(ax+by)^2 - b\int_0^x \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds.$$

Probaremos que es de Lyapunov para (3.1) en el origen. Veamos.

De la condición 3) se desprende que $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} V(x,y) = \infty$. Verifiquemos que V es definida positiva. Dado que el primer sumando de V es definido positivo, entonces el que la función V sea definida positiva, depende de como sea el término

$$-b\int_0^x \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds.$$

Analicémoslo por casos:

1. $x > 0$. A partir de la condición 1) del teorema, tenemos que el integrando $b\left[f(x,0) + f\left(0,-ab^{-1}x\right)\right]$, es negativo por lo que se tiene

$$-b\int_0^x \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds > 0,$$

2. $x < 0$.También de la condición 1), resulta que el integrando es positivo, pero como el límite de integración x es menor que el límite de integración 0, tenemos que

$$b\int_0^x \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds = -b\int_x^0 \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds < 0,$$

entonces,

$$-b\int_0^x \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds > 0.$$

Además, si $x = 0$

$$-b\int_0^x \left[f(s,0) + f\left(0,-ab^{-1}s\right)\right] ds = 0.$$

Por lo tanto, $V \geq 0$; es decir, V es definida positiva.

Ahora determinemos la derivada de V a lo largo del sistema (3.1):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}.$$

Como

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a\left(ax + by\right) - b\left[f\left(x, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x\right)\right],$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial y} = b\left(ax + by\right),$$

entonces, sustituyéndolas en $\dot{V}$, tenemos

$$\dot{V} = \left\{a\left(ax + by\right) - b\left[f\left(x, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x\right)\right]\right\} a\left(ax + by\right) + b\left(ax + by\right) f\left(x, y\right),$$

es decir,

$$\dot{V} = a\left(ax + by\right)^2 + b\left(ax + by\right)\left[f\left(x, y\right) - f\left(x, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x\right)\right],$$

que de la condición 2) del teorema, inmediatamente se deduce que $\dot{V}$ es negativa si $ax + by \neq 0$. Además $\dot{V} = 0$ si y sólo si $ax + by = 0$.

Ya tenemos que $\dot{V} \leq 0$.

Para la demostación de que la única solución del sistema totalmente contenida en $M = \{(x, y) \,|ax + by = 0\}$, es el origen $O\,(0, 0)$, primero mostremos que las dos primeras condiciones juntas, nos conducen a que

$$f\left(0, -ab^{-1}x\right) \neq 0 \text{ si } x \neq 0. \tag{3.2}$$

En efecto, si tenemos que $ax + by > 0$, entonces de 2) obtenemos

$$a\left(ax + by\right) + b\left[f\left(x, y\right) - f\left(x, 0\right) - f\left(0, -ab^{-1}x\right)\right] < 0. \tag{3.3}$$

Si ahora tomamos $x_0 > 0$ arbitrario y pasamos al límite en (3.3) cuando $y \to -ab^{-1}x_0$, entonces

$$bf\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \leq b\left[f\left(x_0, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x_0\right)\right]. \tag{3.4}$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad (3.4) por $x_0 > 0$, obtenemos

$$\frac{b}{x_0}f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \leq \frac{b}{x_0}\left[f\left(x_0, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x_0\right)\right] < 0,$$

usando la condición 1).

Por lo tanto $f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \neq 0$ si $x_0 > 0$.

Si tenemos que $ax + by < 0$, entonces nuevamente de ii), obtenemos

$$a\left(ax + by\right) + b\left[f\left(x, y\right) - f\left(x, 0\right) - f\left(0, -ab^{-1}x\right)\right] > 0. \tag{3.5}$$

Tomemos ahora $x_0 < 0$ arbitrario y pasemos al límite en (3.5) cuando $y \to -ab^{-1}x_0$, entonces

$$bf\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \geq b\left[f\left(x_0, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x_0\right)\right]. \tag{3.6}$$

Si en (3.6), dividimos ambos lados por $x_0 < 0$, obtenemos

$$\frac{b}{x_0}f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \leq \frac{b}{x_0}\left[f\left(x_0, 0\right) + f\left(0, -ab^{-1}x_0\right)\right] < 0,$$

a partir de 1).

Por lo tanto $f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \neq 0$ si $x_0 < 0$.

Con lo cual queda demostrada la expresión (3.2).

Ahora sí, mostremos que el origen es la única posición de equilibrio del sistema (3.1), totalmente contenida en el conjunto M.

Sea $x = x\left(t\right), y = y\left(t\right)$ una solución del sistema (3.1) totalmente contenida en M, entonces

$$ax\left(t\right) + by\left(t\right) \equiv 0, \tag{3.7}$$

con t en el dominio de definición de la solución.

De (3.7) y de la primera ecuación del sistema (3.1) obtenemos

$$x\left(t\right) = x_0,\ x_0 = cte.$$

$$y\left(t\right) = -ab^{-1}x_0.$$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación de (3.1), obtenemos

$$f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) = 0.$$

que usando (3.2), nos lleva a concluir que $x_0 = 0$. En consecuencia

$$x\left(t\right) = 0, \text{ y } y\left(t\right) = 0.$$

Por lo tanto, la única solución del sistema (3.1), contenida en el conjunto M es el origen.

Como hemos visto, se satisfacen las condiciones del teorema (2.14) de BK, entonces la solución nula del sistema (3.1) es gae.■

Teorema 3.3 *Si se cumplen las condiciones*

1. $\frac{b}{x} f\left(x, -ab^{-1}x\right) < 0$ *para* $x \neq 0$,

2. $a + \frac{b}{ax+by}\left[f\left(x,y\right) + f\left(x, -ab^{-1}x\right)\right] < 0$ *para* $ax + by = 0$,

3. $b\int_0^{\pm\infty} f\left(x, -ab^{-1}x\right) dx = -\infty$,

entonces la solución nula del sistema (3.1) es gae.

Demostración. Consideremos la función:

$$V = \frac{1}{2}\left(ax+by\right)^2 - b\int_0^x f\left(s, -ab^{-1}s\right) ds.$$

Mostemos que es de Lyapunov para el sistema (3.1) en el origen.
De la condición 3) se desprende que $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} V\left(x,y\right) = \infty$.
Para ver que V es definida positiva, basta con mostrar que

$$-b\int_0^x f\left(s, -ab^{-1}s\right) ds \geq 0.$$

De la condición 1) sabemos que x y $bf\left(x, -ab^{-1}x\right)$ tienen signos opuestos por lo que $b\int_0^x f\left(x, -ab^{-1}s\right) ds < 0$ para $x \neq 0$, es decir

$$-b\int_0^x f\left(s, -ab^{-1}s\right) ds \geq 0 \text{ para } x \neq 0.$$

Además, si $x = 0$

$$-b\int_0^x f\left(s, -ab^{-1}s\right) ds = 0.$$

Por lo tanto, V es definida positiva. Determinemos ahora la derivada de V a lo largo del sistema (3.1)

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y},$$

donde

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a\left(ax+by\right) - bf\left(x, -ab^{-1}x\right),$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial y} = b\left(ax + by\right).$$

Que al sustituirlas en $\dot{V}$, ésta toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \left[a\left(ax+by\right) - bf\left(x, -ab^{-1}x\right)\right]\left(ax+by\right) + b\left(ax+by\right)f\left(x,y\right) \\ &= a\left(ax+by\right)^2 + b\left(ax+by\right)\left[f\left(x,y\right) - f\left(x, -ab^{-1}x\right)\right].\end{aligned}$$

De la condición 2) se deduce que $\dot{V} < 0$ si $ax + by \neq 0$; mientras que $\dot{V} = 0$ si y sólo si $ax + by = 0$. Por lo tanto $\dot{V} \leq 0$.

Para que se cumplan todas las condiciones del teorema de (2.14) de BK, únicamente nos falta demostrar que la única solución del sistema (3.1) totalmente contenida en $M = \{(x,y)\,|ax + by = 0\}$, es el origen $O\ (0,0)$.

Para esto, sea $x = x\left(t\right),\ y = y\left(t\right)$ una solución del sistema (3.1) totalmente contenida en M, entonces

$$ax\left(t\right) + by\left(t\right) \equiv 0, \tag{3.8}$$

con t en el dominio de definición de la solución. A partir de (3.8) y de la primera ecuación del sistema (3.1), tenemos

$$x\left(t\right) = x_0,\ x_0\ = cte,$$

$$y\left(t\right) = -ab^{-1}x_0.$$

Si ahora sustituimos estos valores en la segunda ecuación del sistema (3.1), obtenemos

$$f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) = 0. \tag{3.9}$$

De (3.9) y de 1), concluimos que $x_0 = 0$ y, en consecuencia

$$x\left(t\right) = 0, \text{ y } y\left(t\right) = 0,$$

es decir, la única posición de equilibrio del sistema (3.1) contenida en M origen. Por el teorema (2.14) de BK, el origen es *gae*.■

Teorema 3.4 *Si se cumplen las condiciones*

1. $\frac{b}{x}f\left(x,0\right) < 0$ *para* $x \neq 0$,

2. $a + \frac{b}{ax+by}\left[f(x,y) - f(x,0)\right] < 0$ *para* $ax + by \neq 0$,

3. $b\int_0^{\pm\infty} f(x,0)\,dx = -\infty$,

entonces, la solución nula del sistema (3.1) es gae.

Demostración. Tomemos la función

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(ax+by)^2 - b\int_0^x f(s,0)\,ds.$$

Demostremos que es de Lyapunov para el sistema (3.1) en el origen. La condición 3), nos lleva a que $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} V(x,y) = \infty$, ya que el primer sumando de V es definido positivo y, el segundo tiende a infinito cuando $x \to \infty$. Veamos si V es definida positiva. Para que tengamos $V \geq 0$, es suficiente que se cumpla

$$-b\int_0^x f(s,0)\,ds \geq 0. \tag{3.10}$$

De la condición 1), sabemos que x y $bf(x,0)$ tienen signos opuestos, por lo que $b\int_0^x f(s,0)\,ds < 0$ para $x \neq 0$, es decir

$$-b\int_0^x f(s,0)\,ds > 0 \text{ para } x \neq 0.$$

Además, si $x = 0$

$$-b\int_0^x f(s,0)\,ds = 0.$$

Por lo tanto (3.10) se cumple, y en consecuencia V es definida positiva. Obtengamos la derivada de V a lo largo del sistema (3.1):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y},$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= a(ax+by) - bf(x,0), \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= b(ax+by)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{V} &= [a(ax+by) - bf(x,0)](ax+by) + b(ax+by) f(x,y) \\ &= a(ax+by)^2 + b(ax+by)[f(x,y) - f(x,0)].\end{aligned}$$

Inmediatamente de la condición 2), vemos que $\dot{V} < 0$ si $ax + by \neq 0$.

Por lo tanto $\dot{V} \leq 0$.

Para demostrar que la única solución de (3.1) totalmente contenida en $M = \{(x,y)\,|ax+by=0\}$, es el origen $O\ (0,0)$, necesitamos demostrar previamente que

$$f\left(x, -ab^{-1}x\right) \neq 0 \text{ para } x \neq 0. \tag{3.11}$$

Si $ax + by > 0$, a partir de la condición 2) sabemos que

$$a(ax+by) + b[f(x,y) - f(x,0)] < 0. \tag{3.12}$$

Si tomamos $x_0 > 0$ arbitrario, y tomamos el límite en (3.12) cuando $y \to -ab^{-1}x_0$, obtenemos

$$bf\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \leq bf(x_0, 0). \tag{3.13}$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad (3.13) por x_0, tenemos que

$$\frac{b}{x_0} f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \leq \frac{b}{x_0} f(x_0, 0) < 0,$$

usando la condición 1). Es decir

$$f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \neq 0 \text{ si } x_0 > 0.$$

Si $ax + by < 0$, entonces de 2) sabemos que

$$a(ax+by) + b[f(x,y) - f(x,0)] > 0. \tag{3.14}$$

Si tomamos $x_0 < 0$, y pasamos al límite en (3.14) cuando $y \to -ab^{-1}x_0$, obtenemos

$$bf\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \geq bf(x_0, 0). \tag{3.15}$$

Dividiendo en ambos lados de la desigualdad (3.15) por $x_0 < 0$, tenemos que

$$\frac{b}{x_0} f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \leq \frac{b}{x_0} f(x_0, 0) < 0,$$

a partir de la condición 1). Por lo tanto

$$f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) \neq 0 \text{ si } x_0 < 0.$$

Ahora sí, mostremos que la única solución del sistema (3.1), totalmente contenida en $M = \{(x, y) \,|ax + by = 0\}$, es el origen $O\ (0, 0)$. Para lo cual tomemos $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución de (3.1), totalmente contenida en M, entonces

$$ax(t) + by(t) \equiv 0, \tag{3.16}$$

con t en el dominio de definición de la solución.

De la primera ecuación del sistema (3.1) y de (3.16), tenemos que

$$x(t) = x_0,\ x_0 = cte.$$

y

$$y(t) = -ab^{-1}x_0.$$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación de (3.1), obtenemos

$$f\left(x_0, -ab^{-1}x_0\right) = 0,$$

que de (3.11), sólo se cumple si $x_0 = 0$, y en consecuencia

$$x(t) = 0,\ \text{y } y(t) = 0.$$

Por lo tanto, la única posición de equilibrio del sistema (3.11), es el origen.

Hemos visto que la función considerada para la demostración de este teorema, es de Lyapunov y satisface las condiciones del teorema 2.14 de BK. En consecuencia, la solución nula del sistema (3.11), es *gae*.■

Se pueden establecer resultados de estabilidad asintótica global semejantes a los anteriores, para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= ax + by \end{aligned}$$

Ya que son sistemas "simétricos" a los estudiados en este capítulo.

Igual que como se hizo en el Capítulo 3, las demostraciones de los teoremas que se enunciarán en este capítulo, se harán utilizando el teorema (2.14) de Barbashin-Krasovskii (BK), enunciado y demostrado en el Capítulo 2.

Capítulo 4

Sistemas autónomos:

4.1 Segunda familia

Aquí consideramos la familia de sistemas autónomos no lineales de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + by \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $f(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$; $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R}^2$; $f(0)=0$, $g(0,0)=0$ y $b \neq 0$ es una constante.

El siguiente teorema da condiciones sobre f y g para que el origen sea globalmente asintóticamente estable para el sistema 4.1.

Teorema 4.1 *Si se cumplen las condiciones*

1. $g(x, -b^{-1}f(x)) \neq 0$ *para* $x \neq 0$,
2. $b\int_0^x [g(s,y) - g(0,y) + g(0, -b^{-1}f(s))]\,ds < 0$ *para* $x \neq 0$,
3. $b\; g(x,y)\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[g(s,y) - g(0,y)]\,ds \geq 0$,
4. $\Phi'(y) > 0$ *para todo* y,
5. $\lim\limits_{\|x,y\|\to\infty} b\int_0^x [g(s,y) - g(0,y) + g(0, -b^{-1}f(s))]\,ds = -\infty$,

donde: $\Phi(y) = g(0, y) - yf'(x)$,
entonces, la solución nula del sistema (4.1) es *gae.*

Demostración. Esta sigue la misma idea que la demostración del correspondiente teorema del capítulo anterior. Consideremos la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(f(x) + by)^2 - b\int_0^x \left[g(s, y) - g(0, y) + g\left(0, -b^{-1}f(s)\right)\right] ds.$$

Demostraremos que ésta satisface las condiciones del teorema 2.14 de BK, enunciado y demostrado en el Capítulo 2.

Veámos. V se anula en el origen. Esto se sigue de que $f(0) = 0$ y de la hipótesis 2) del teorema; de hecho, V es definida positiva para todo (x, y). Si usamos la condición 5) y sin importar el comportamiento de f con tal que cumpla lo anterior, concluimos que $\lim_{x^2+y^2\to\infty} V(x, y) = \infty$. Probaremos ahora que la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (4.1) es una función definida negativa.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left\{(f(x) + by)f'(x) - \left[g(x, y) - g(0, y) + g\left(0, -b^{-1}f(x)\right)\right]\right\}\{f(x) + by\} \\ &\quad - \left\{b(f(x) + by) - b\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[g(s, y) - g(0, y)]\, ds\right\} g(x, y) \end{aligned}$$

lo que usando la definición de Φ, se reescribe así

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -b(f(x) + by)\left[\Phi(y) - \Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] + \\ &\quad -bg(x, y)\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[g(s, y) - g(0, y)]\, ds. \end{aligned}$$

La condición 3) nos lleva a que

$$-bg(x, y)\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[g(s, y) - g(0, y)]\, ds \leq 0.$$

Entonces para que $\dot{V} \leq 0$, es suficiente que se satisfaga

$$-b(f(x) + by)\left[\Phi(y) - \Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] < 0.$$

Esta desigualdad depende de como sean b, $(f(x) + by)$ y $[\Phi(y) - \Phi(-b^{-1}f(x))]$. Analicémoslo en los diferentes casos:

1. $b > 0$,

   - $f(x)+by > 0$. Si esto se cumple entonces $y > -b^{-1}f(x)$ y, como 4) nos dice que Φ es creciente, tenemos que $\Phi(y)-\Phi(-b^{-1}f(x)) > 0$. Por lo tanto
   $$-b(f(x)+by)\left[\Phi(y)-\Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] < 0,$$
   que es la condición que necesitamos para que $\dot{V} \leq 0$.
   - $f(x)+by < 0$. Entonces se tiene $y < -b^{-1}f(x)$ y, en consecuencia, $\Phi(y)-\Phi(-b^{-1}f(x)) < 0$. Por lo tanto
   $$-b(f(x)+by)\left[\Phi(y)-\Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] < 0,$$
   obteniendose lo que se quería, es decir, la negatividad de $\dot{V}$.

2. $b < 0$,

   - $f(x)+by > 0$. En este caso se tiene $y < -b^{-1}f(x)$, por lo que $\Phi(y)-\Phi(-b^{-1}f(x)) < 0$. Por lo tanto
   $$-b(f(x)+by)\left[\Phi(y)-\Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] < 0,$$
   que es lo que necesitamos.
   - $f(x)+by < 0$. Aquí $y > -b^{-1}f(x)$, y $\Phi(y)-\Phi(-b^{-1}f(x)) > 0$. Por lo tanto
   $$-b(f(x)+by)\left[\Phi(y)-\Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] < 0.$$

Además, si se tiene $f(x)+by = 0$, entonces
$$-b(f(x)+by)\left[\Phi(y)-\Phi\left(-b^{-1}f(x)\right)\right] = 0,$$
por lo que concluimos
$$\dot{V} \leq 0.$$

Para terminar la demostración del teorema, mostremos que $M \subset \{(x,y)\,|f(x)+by=0\}$, no contiene más trayectorias completas del sistema (4.1) que la posición de equilibrio $O\ (0,0)$.

Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución del sistema (4.1) totalmente contenida en M, entonces

$$f(x(t)) + by(t) \equiv 0,$$

de aquí y de la primera ecuación del sistema (4.1), tenemos que si

$$x(t) = x_0,\ x_0 = cte.$$

entonces

$$y(t) = -b^{-1} f(x_0),\ x_0 \in M.$$

De la condición 1) y de la segunda ecuación de (4.1), deducimos que $x_0 = 0$ y en consecuencia $y(t) = -b^{-1} f(0)$. Pero como $f(0) = 0$, entonces

$$x(t) = 0, \text{ y } y(t) = 0 \text{ para todo } t.$$

Por lo que la única posición de equilibrio del sistema (4.1) contenida en M es el origen.

Por el teorema (2.14) de BK, la solución nula del sistema (4.1) es *gae*.■

Teorema 4.2 *Si se cumplen las condiciones*

1. $\frac{b}{x}\left[g(x,0) - g\left(0, -b^{-1} f(x)\right)\right] < 0$, *si* $x \neq 0$,
2. $f'(x) + \frac{b}{f(x)+by}\left[g(x,y) - g(x,0) - g\left(0, -b^{-1} f(x)\right)\right] < 0$ *siempre que* $f(x) + by \neq 0$,
3. $b \int_0^{\pm\infty} \left[g(x,0) + g\left(0, -b^{-1} f(x)\right)\right] dx = -\infty$,

entonces la solución nula del sistema (4.1) es gae.

Demostración. Consideremos la función

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(f(x) + by)^2 - b \int_0^x \left[g(s,0) + g\left(0, -b^{-1} f(s)\right)\right] ds.$$

Probemos que es de Lyapunov para 4.1 en el origen.

A partir de la condición 3) concluimos que $\lim\limits_{x^2+y^2 \to \infty} V(x,y) = \infty$.

Veamos que V es definida positiva:

El que la función V sea no negativa, es decir, $V \geq 0$, depende de que tengamos

$$-b \int_0^x \left[g(s,0) + g\left(0, -b^{-1} f(s)\right)\right] ds \geq 0.$$

De la condición 1) sabemos que x y $b\left[g\left(x,0\right)+g\left(0,-b^{-1}f\left(x\right)\right)\right]$ tienen signos opuestos. Por lo tanto

$$b\int_{0}^{x}\left[g\left(s,0\right)+g\left(0,-b^{-1}f\left(s\right)\right)\right]ds<0 \text{ para } x\neq 0.$$

Es decir,

$$-b\int_{0}^{x}\left[g\left(s,0\right)+g\left(0,-b^{-1}f\left(s\right)\right)\right]ds>0 \text{ para } x\neq 0.$$

Además, si $x=0$

$$-b\int_{0}^{x}\left[g\left(s,0\right)+g\left(0,-b^{-1}f\left(s\right)\right)\right]ds=0.$$

Por lo tanto

$$-b\int_{0}^{x}\left[g\left(s,0\right)+g\left(0,-b^{-1}f\left(s\right)\right)\right]ds\geq 0.$$

En consecuencia V es definida positiva.

La derivada de V a lo largo del sistema 4.1 es

$$\dot{V}=f'\left(x\right)\left(f\left(x\right)+by\right)^{2}+b\left(f\left(x\right)+by\right)\left[g\left(x,y\right)-g\left(x,0\right)+g\left(0,-b^{-1}f\left(x\right)\right)\right]$$

De la condición 2) se deduce que $\dot{V}<0$ si $f\left(x\right)+by\neq 0$.

Por otro lado $\dot{V}=0$ si y sólo si $f\left(x\right)+by=0$.

Por lo tanto

$$\dot{V}\leq 0.$$

Mostremos que la única solución de equilibrio de (4.1) totalmente contenida en $M=\left\{\left(x,y\right)\left|f\left(x\right)+by=0\right.\right\}$, es el origen $O\ (0,0)$.

Pero en la demostración vamos a requerir que

$$g\left(x,-b^{-1}f\left(x\right)\right)\neq 0 \text{ para } x\neq 0. \tag{4.2}$$

Entonces empecemos demostrando 4.2.

Lo haremos por casos según el signo de $f\left(x\right)+by$.

1. $f(x) + by > 0$. Si usamos 2) tenemos que

$$f^{'}(x)(f(x)+by)+b\left[g(x,y)-g(x,0)-g\left(0,-b^{-1}f(x)\right)\right]<0. \quad (4.3)$$

Si tomamos $x_0 > 0$ y pasamos al límite en (4.3) cuando $y \to -b^{-1}f(x_0)$ obtenemos

$$bg\left(x_0,-b^{-1}f(x_0)\right) \leq b\left[g(x_0,0)+g\left(0,-b^{-1}f(x_0)\right)\right], \quad (4.4)$$

o bien, al dividir ambos lados de (4.4) por $x_0 > 0$, y usar la condición 1) del teorema ,obtenemos

$$\frac{b}{x_0}g\left(x_0,-b^{-1}f(x_0)\right) \leq \frac{b}{x_0}\left[g(x_0,0)+g\left(0,-b^{-1}f(x_0)\right)\right]<0.$$

Por lo tanto

$$g\left(x_0,-b^{-1}f(x_0)\right) \neq 0 \text{ para } x_0 > 0,$$

que es lo que queriamos obtener.

2. $f(x) + by < 0$. También por 2) obtenemos

$$f^{'}(x)(f(x)+by)+b\left[g(x,y)-g(x,0)-g\left(0,-b^{-1}f(x)\right)\right]>0. \quad (4.5)$$

Si en este caso tomamos $x_0 < 0$ y pasamos al límite en (4.5) cuando $y \to -b^{-1}f(x_0)$, entonces

$$bg\left(x_0,-b^{-1}f(x_0)\right) \geq b\left[g(x_0,0)+g\left(0,-b^{-1}f(x_0)\right)\right]. \quad (4.6)$$

Al dividir ambos lados de (4.6) por $x_0 < 0$, obtenemos

$$\frac{b}{x_0}g\left(x_0,-b^{-1}f(x_0)\right) \leq \frac{b}{x_0}\left[g(x_0,0)+g\left(0,-b^{-1}f(x_0)\right)\right]<0,$$

como consecuencia de la condición 1).

Así concluimos la demostración de (4.2).

Ahora consideremos $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución del sistema (4.1) totalmente contenida en M, entonces

$$f(x(t)) + by(t) \equiv 0, \quad (4.7)$$

con t en el dominio de definición de dicha solución.

De (4.7) y de la primera ecuación del sistema (4.1), si tomamos

$$x(t) = x_0,$$

obtenemos

$$y(t) = -b^{-1} f(x_0),$$

que usando estos valores para sustituirlos en la segunda ecuación del sistema, nos lleva a

$$g\left(x_0, -b^{-1} f(x_0)\right) = 0,$$

y utilizando (4.2), concluimos que $x_0 = 0$, por lo que

$$y(t) = -b^{-1} f(0) = 0,$$

es decir,

$$x(t) = 0, \text{ y } y(t) = 0,$$

lo que significa que la única posición de equilibrio del sistema (4.1) es el origen.

Como consecuencia del teorema (2.14) de BK, el origen es *gae.*$\blacksquare$

Teorema 4.3 *Si se cumplen las condiciones*

1. $\frac{b}{x} g(x, -b^{-1} f(x)) < 0$, *para* $x \neq 0$,
2. $f'(x) + \frac{b}{f(x)+by} \left[g(x,y) - g(x, -b^{-1} f(x))\right] < 0$ *para* $f(x) + by \neq 0$,
3. $b \int_0^{\pm\infty} \left[g(x,0) + g(0, -b^{-1} f(x))\right] dx = -\infty$,

entonces la solución nula del sistema (4.1) es gae.

Demostración. Esta se hará usando el mismo procedimiento que hemos venido usando en este trabajo: el Segundo Método de Lyapunov. Para ello consideremos la función:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x) + by\right)^2 - b \int_0^x g\left(s, -b^{-1} f(s)\right) ds.$$

Probaremos que ésta es función de Lyapunov para el sistema 4.1 en el origen. Veamos. Uno se convence que V se anula en el origen al usar que $f(0) = 0$ junto con el hecho de que para $b \neq 0$,

$$-b\int_0^x g\left(s,-b^{-1}f\left(s\right)\right)ds=0.$$

A continuación demostraremos que $V\left(x,y\right)>0$ para todo $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right).$ Excluyendo el conjunto de puntos $\left\{\left(x,y\right)\left|\left(f\left(x\right)+by\right)^2=0\right.\right\}$ la positividad de V se garantiza si

$$-b\int_0^x g\left(s,-b^{-1}f\left(s\right)\right)ds>0.$$

A esta desigualdad se llega usando la hipótesis 1) del teorema, pues si tal condición se cumple entonces los términos x y $bg\left(x,-b^{-1}f\left(x\right)\right)$ tienen signos opuestos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$x>0 \text{ y } bg\left(x,-b^{-1}f\left(x\right)\right)<0.$$

Si integramos desde 0 hasta x en ambos lados de la segunda desigualdad, llegamos a

$$-b\int_0^x g\left(s,-b^{-1}f\left(s\right)\right)ds>0$$

que es la condición deseada.

Nótese que si $f\left(x\right)+by=0$, se sigue la positividad de V. Por lo tanto $V\left(x,y\right)>0$ para todo punto $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$. De la condición 3) del teorema se sigue que que V crece más allá de toda cota si se está suficientemente alejado del origen. Formalmente, de 3) se sigue,

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}V\left(x,y\right)=\infty.$$

Obtengamos la derivada de V a lo largo del sistema:

$$\dot{V}=f^{'}\left(x\right)\left(f\left(x\right)+by\right)^2+b\left(f\left(x\right)+by\right)\left[g\left(x,y\right)-g\left(x,-b^{-1}f\left(x\right)\right)\right]$$

De la condición 2) se deduce que $\dot{V}<0$ para $f\left(x\right)+by\neq0$.

Además, $\dot{V}=0$ si y sólo si $f\left(x\right)+by=0$.

Por lo tanto

$$\dot{V}\leq0.$$

Mostremos que la única solución de equilibrio de (4.1) totalmente contenida en el conjunto $M=\left\{\left(x,y\right)\left|f\left(x\right)+by=0\right.\right\}$, es el origen $O\ \left(0,0\right)$.

Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución del sistema (4.1) totalmente contenida en M, entonces

$$f(x(t)) + by(t) \equiv 0, \tag{4.8}$$

con t en el dominio de definición de dicha solución.

De (4.8) y de la primera ecuación del sistema (4.1), si

$$x(t) = x_0,$$

obtenemos

$$y(t) = -b^{-1} f(x_0).$$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$g\left(x_0, -b^{-1} f(x_0)\right) = 0. \tag{4.9}$$

A partir de (4.9) y de la condición 1) del teorema, concluimos que $x_0 = 0$ y $y(t) = -b^{-1} f(0) = 0$.

Por lo tanto $x(t) = 0$, y $y(t) = 0$, para todo $t \geq 0$, lo que significa que la única posición de equilibrio del sistema (4.1) es el origen.

De acuerdo con el teorema (2.14) de BK, la solución nula del sistema (4.1) es *gae*.■

Teorema 4.4 *Si se cumplen las condiciones*

1. $\frac{b}{x} g(x, 0) < 0$, *para* $x \neq 0$,
2. $f'(x) + \frac{b}{f(x)+by}\left[g(x,y) - g(x,0)\right] < 0$ *para* $f(x) + by \neq 0$,
3. $b\int_0^{+\infty} g(x,0)\,dx = -\infty$, *y* $b\int_{-\infty}^0 g(x,0)\,dx = +\infty$

entonces la solución nula del sistema (4.1) es gae.

Demostración. Consideremos la función

$$V = \frac{1}{2}\left(f(x) + by\right)^2 - b\int_0^x g(s,0)\,ds.$$

Mostremos que es función de Lyapunov para *(4.1)* en el origen.

Para que V sea definida positiva, es suficiente que tengamos

$$-b\int_0^x g(s,0)\,ds \geq 0.$$

De la condición 1) sabemos que x y $bg\left(x, -b^{-1}f\left(x\right)\right)$ tienen signos opuestos, en consecuencia

$$b\int_0^x g\left(s, 0\right) ds < 0 \text{ para } x \neq 0.$$

Es decir,

$$-b\int_0^x g\left(s, 0\right) ds > 0 \text{ para } x \neq 0.$$

Además, si $x = 0$

$$-b\int_0^x g\left(s, 0\right) ds = 0.$$

Por lo tanto

$$-b\int_0^x g\left(s, 0\right) ds \geq 0.$$

En consecuencia V es definida positiva.

La derivada de V a lo largo del sistema (4.1), es decir, a lo largo de las soluciones de dicho sistema es:

$$\dot{V} = f^{'}\left(x\right)\left(f\left(x\right) + by\right)^2 + b\left(f\left(x\right) + by\right)\left[g\left(x, y\right) - g\left(x, 0\right)\right].$$

De la condición 2) de inmediato se deduce que $\dot{V} < 0$ para $f\left(x\right) + by \neq 0$. Además, $\dot{V} = 0$ si y sólo si $f\left(x\right) + by = 0$.

Por lo tanto

$$\dot{V} \leq 0.$$

A partir de la condición 3) se deduce que $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} V\left(x, y\right) = \infty$.

Antes de probar que la única solución de equilibrio de (4.1) totalmente contenida en el conjunto $M = \{(x, y)\,|f\left(x\right) + by = 0\}$, es el origen $O\ (0, 0)$, mostremos que

$$g\left(x, -b^{-1}f\left(x\right)\right) \neq 0 \text{ para } x \neq 0, \tag{4.10}$$

que usaremos en dicha prueba.Hagámoslo por casos, dependiendo del signo de $f\left(x\right) + by$.

1. $f\left(x\right) + by > 0$. De la condición 2) sabemos que

$$f^{'}\left(x\right)\left(f\left(x\right) + by\right) + b\left[g\left(x, y\right) - g\left(x, 0\right)\right] < 0. \tag{4.11}$$

Si tomamos $x_0 > 0$, y pasamos al límite en(4.11) cuando $y \to -b^{-1}f(x_0)$, obtenemos

$$bg\left(x_0, -b^{-1}f(x_0)\right) \leq bg(x_0, 0). \tag{4.12}$$

Dividiendo ambos lados de 4.12 por $x_0 > 0$, obtenemos

$$\frac{b}{x_0}g\left(x_0, -b^{-1}f(x_0)\right) \leq \frac{b}{x_0}g(x_0, 0) < 0$$

usando la condición 1) del teorema. Es decir, $g(x_0, -b^{-1}f(x_0)) \neq 0$ para $x_0 > 0$.

2. $f(x) + by < 0$. De nuevo de 2) obtenemos

$$f^{'}(x)(f(x) + by) + bg(x, y) - g(x, 0) > 0. \tag{4.13}$$

Sea ahora $x_0 < 0$, y pasemos al límite en (4.13) cuando $y \to -b^{-1}f(x_0)$, entonces

$$bg\left(x_0, -b^{-1}f(x_0)\right) \geq bg(x_0, 0). \tag{4.14}$$

Si dividimos ambos lados de (4.14) por $x_0 < 0$, obtenemos

$$\frac{b}{x_0}g\left(x_0, -b^{-1}f(x_0)\right) \leq \frac{b}{x_0}g(x_0, 0) < 0,$$

usando la condición 1). Por lo tanto $g(x_0, -b^{-1}f(x_0)) \neq 0$ para $x_0 < 0$.

Con esto queda demostrada la expresión (4.10).

Ahora sí consideremos $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución del sistema (4.1) totalmente contenida en M, entonces

$$f(x(t)) + by(t) \equiv 0. \tag{4.15}$$

Apartir de (4.15) y de la primera ecuación del sistema (4.1), si

$$x(t) = x_0,$$

obtenemos

$$y(t) = -b^{-1}f(x_0).$$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación del sistema (4.1), obtenemos

$$g\left(x_0, -b^{-1}f(x_0)\right) = 0. \tag{4.16}$$

De (4.16) y de (4.10) obtenemos $x_0 = 0$ y en consecuencia

$$y(t) = -b^{-1} f(0) = 0.$$

Por lo tanto

$$x(t) = 0, \text{ y } y(t) = 0,$$

lo que significa que la única posición de equilibrio del sistema (4.1) es el origen.

Del teorema (2.14) de BK, concluimos que la solución nula del sistema (4.1) es *gae*.■

Usando los teoremas que acabamos de demostrar en este capítulo, enunciar y demostrar teoremas semejantes para la familia de sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y)\\ \dot{y} &= ax + g(y)\end{aligned}$$

es una tarea que se sigue de forma inmediata a partir de los resultados anteriores.

Comentarios finales

En forma parecida a como se establecieron condiciones bajo las cuales la solución de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, de los sistemas considerados es globalmente asintóticamente estable. Se pueden escribir las familias de sistemas no autónomos no lineales equivalentes a las ya estudiadas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= f(t, x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y), \\ \dot{y} &= ax + by. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) + by, \\ \dot{y} &= g(t, x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y), \\ \dot{y} &= ax + g(t, y). \end{aligned}$$

es decir, aquellos sistemas donde las funciones f y g sí dependen explícitamente del tiempo, y plantearse bajo qué condiciones existe estabilidad asintótica global. Aunque las dos primeras familias son equivalentes, de la misma forma que lo son las dos últimas, se escriben todas solamente para que se tenga presente, que los teoremas que se enunciarían y demostrarían, involucrarían a todos los sistemas de este tipo.

Bibliografía

[1] Bakulin, P. I., Kononovich, E. V. y Moroz, V. I. , *Astronomía General*. Editorial Mir, Moscú, 1987.

[2] Balitinov, M. A., *Comportamiento en grande de las soluciones de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales.* Izvestia Matemática , número 10, 1974.

[3] Bernal, J. D., *La Ciencia en la Historia*. Universidad Nacional Autónoma de México y Editorial Nueva Imagen, México, 1981.

[4] Boudonov, M., *Teoría de estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias.* Universidad de La Habana, 1980.

[5] Brauer, F. y and Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. An Intrduction.* W. a. Benjamin, Inc. Wisconsin, 1969.

[6] Diacu, F. and Holmes, P., Celestial Encounters. *The Origins of Chaos and Stability*. Princeton University Press, N. Jersey, 1996.

[7] Hahn, W., *Theory and Application of Liapunov's Direct Method.* Englewood Chiffs, Prentice Hall, N. J., 1963.

[8] Hirsh, M. W., *The Dynamical Systems Approach to Differential Equations*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, volumen 11, número 1, julio, 1984.

[9] Inselberg, A. and D., Giora, *The Geometry of Liapunov Functions*. American Mathematical Montly, volumen 81, pp. 1102-1104, 1974.

[10] Koyré, A., *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*. Siglo XXI Editores, México, 1982.

[11] Krasovskii, N. N. , *Stability of Motion. Application of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay.* Stanford University Press, 1963.

[12] Laplace, P. S., *Essai Philosophique sur les Probabilités.* Gautier-Villards et C^{ie}, Editeurs, Paris, 1921.

[13] La Salle, J. and Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications.* Academic Press, 1961.

[14] Leipholdz, H. *Stability Theory. An Introduction to the Stability of Dynamical Systems and Rigid Bodies.* Wiley, 1987.

[15] Liapounoff, A. M., *Problème Général de la Stabilité du Mouvement.* Princeton, University Press, 1947.

[16] Lucrecio, *De la Natura de las Cosas.* UNAM, México, 1984.

[17] Magnus, Von K., *Zur Entwcklung des Stabilitätsbegriffes in der Mechanik. Naturwissenschaften*, 46, pp. 590-595, Stutgart, 1959.

[18] Merkin, D. R., *Introduction to the Theory of Stability.* Text in Applied Mathematics, Springer Verlag, 1996.

[19] Moser, J., *Is the Solar System Stable?* Mathematical Intelligencer 1, 2(1978), pp. 65-71.

[20] Oyarzábal, J. B. de, *Ensayos sobre Mecánica Clásica.* Programa del libro universitario, Facultad de Ciencias, UNAM,1984.

[21] Papp, Desiderio, *Historia de la Física desde Galileo hasta los umbrales del siglo XX.* Espasa Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires, 1945.

[22] Peterson, I., *Newton's Clock. Chaos in the Solar System.*Freeman, N. Y., 1993.

[23] Pita Ruíz, C. de J., *Ecuaciones Diferenciales. Una introducción con aplicaciones.* Editorial Limusa, México, 1989.

[24] Poincaré, H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.* Dover Publications Inc., N. Y., 1957.

[25] Prigogine, I. and Stengers, I., *Order Out of Chaos. Man's New Dialogue with Nature.* Bantham Books, Canada, 1988.

[26] Repilado Ramírez, J. A., *Notas del curso de ecuaciones diferenciales.* Universidad de Oriente, Cuba, 1981.

[27] Sánchez Garduño, F., *Estabilidad Global de Sistemas de Lotka-Volterra.* Vínculos Matemáticos, Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias, UNAM, 1985.

[28] Smale, Stephen y Hirsh, Morris W., *Ecuaciones Diferenciales Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[29] Tisserand, F.-Andoyer, H., *Leçons de Cosmographie.* Librairie Armand Colin, Paris, 1912.

[30] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1990.