# UNA VARIANTE METODOLOGICA PARA EL ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS A PARTIR DE SU DEFINICION.

Otilio B. Mederos Anoceto *
Blanca E. González Rodríguez†

## Introducción

En el estudio de la Matemática constantemente se realizan definiciones, generalizaciones, restricciones y clasificaciones de conceptos; pero no siempre se sigue un procedimiento adecuado para obtener un buen conocimiento de los conceptos después que se ha realizado una de estas operaciones .

Este trabajo tiene como objetivo presentar un procedimiento para lograr un conocimiento profundo de un concepto a partir de su definición.

En la primera sección del trabajo se explica en que consiste la definición científica y se describe como proceder una vez definido un concepto.

En la segunda sección se aplica el procedimiento descrito en la primera sección al estudio del concepto de métrica.

## 1 Procedimiento para lograr un conocimiento profundo de un concepto a partir de su definición.

Se denomina extensión de un concepto a la colección $E$ de todos los objetos que corresponden a ese concepto, y se llama contenido de un concepto a una

*Departamento de Matemática. Facultad de Matemática, Física y Computación. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Villa Clara. Cuba.

†Departamento de Matemática. Facultad de Matemática, Física y Computación. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara. Villa Clara. Cuba.

colección $C = \{P_i\}$, $i \in I$ ($I$ es un conjunto) de propiedades $P_i$, que cumplen todos los elementos de $E$ y sólo estos elementos. Un concepto se indica con frecuencia en el trabajo mediante un par $(E, C)$, o simplemente por $E$ cuando no haya dudas. Pueden encontrarse diferentes colecciones $C$ de propiedades que solo cumplen los elementos de $E$. Cualquier otra colección $P$ por la cual pueda sustituirse $C$ sin alterar $E$ recibe el nombre de caracterización del concepto $(E, C)$.

La operación definición científica sobre la colección de conceptos parte de un concepto definido $(E, C)$ y agregándole propiedades a la colección $C$, o sustituyendo algunas de las propiedades de $C$ por propiedades más fuertes, se obtiene una nueva colección de propiedades $C_1$ a la que corresponde una subcolección $E_1$ de $E$. Si se cumple que $C_1$ implica $C$, $C$ no implica $C_1$ y $E_1$ es una sub-colección propia de $E$, se tiene un nuevo concepto $(E_1, C_1)$ definido a partir de $(E, C)$.

Cuando se define un nuevo concepto; solo se tiene determinado su contenido y en el mejor de los casos únicamente se tiene una notación para su extensión. La línea directriz definición en la enseñanza pre-universitaria en Cuba solo se ocupa del estudio del contenido y no de la extensión, esta situación continua prácticamente igual en la enseñanza superior; por ejemplo, cuando se estudian mediante teoremas las operaciones internas que satisfacen ciertos conceptos no queda claro que es lo que realmente se tiene y con que objetivo.

Si se pretende conocer completamente un concepto $(E_1, C_1)$, hay que conocer todos los elementos de $E_1$ y todas sus caracterizaciones $P_1$, pero obviamente con la simple definición de $(E_1, C_1)$ esto no se logra. Consecuentemente, surge de manera natural la pregunta : ¿ cómo actuar para conocer completamente a $(E_1, C_1)$, o para acercarnos cada vez más a su conocimiento absoluto ?.

A continuación se propone un procedimiento de seis pasos que constituye una respuesta a la pregunta anterior.

## 1.1 Realizar un estudio conjuntista de su extensión

En este estudio se debe verificar que $E_1$ es un subconjunto propio de la extensión $E$ del concepto de partida de la definición, ya que si $E_1 = E$ no se tiene un concepto nuevo y si $E_1 = \emptyset$ ( se tendría un concepto que carece de interés. Se debe determinar la cardinalidad de $E_1$ y de $E \backslash E_1$; y comparar estas cardinalidades con la de $E$.

Si se cumple que $\varnothing \subset E_1 \subset E$, pero la cardinalidad de $E_1$ está muy distante de la de $E$, como es el caso cuando $E$ tiene una cardinalidad grande y $E_1$ tiene una cardinalidad finita, el concepto $(E_1, C_1)$ no es de interés. La cardinalidad de $E_1$ es un buen indicador de la importancia de $(E_1, C_1)$ con respecto a $(E, C)$ desde el punto de vista conjuntista.

## 1.2 Hacer un estudio comparativo entre su extensión y las extensiones de otros conceptos que tienen el mismo concepto de partida.

Si $(E_2, C_2)$ es otro concepto definido a partir de $(E, C)$, determinar la relación que cumplen $E_1$ y $E_2$ de las siguientes:

$$E_1 \subset E_2,\ E_2 \subset E_1,\ E_1 = E_2,\ E_1 \frown E_2 = \varnothing \text{ y } (E_1 \frown E_2 \neq \varnothing,\ E_1 \nsubseteq E_2,\ E_2 \nsubseteq E_1).$$

Si se cumple $E_1 \subset E_2$ o $E_2 \subset E_1$ o $(E_1 \subset E_2 \neq \varnothing, E_1 \nsubseteq E_2, E_2 \nsubseteq E_1)$ ; entonces estudiar $E_1 \backslash E_2$ o $E_2 \backslash E_1$ o $E_1 \frown E_2$.

## 1.3 Estudiar algunos de sus subconceptos

Aplicar el primer paso a $(E_2, C_2)$ y determinar las características de los elementos de $E_1 \backslash E_2$.

## 1.4 Analizar si es posible dotar a su extensión de estructuras algebraicas, topológicas, etc.

Determinar cuáles estructuras de $E$ hereda $E_1$ y cuáles tiene $E_1$ que no tiene $E$. Esta es una información muy importante, puesto que a partir de las estructuras de $E_1$ se puede ampliar la sub-colección de elementos conocidos de $E_1$.

## 1.5 Establecer relaciones entre su extensión y las extensiones de otros conceptos definidos.

Por ejemplo, establecer un isomorfismo entre $E_1$ y la extensión $E_2$ de un concepto definido utilizando un concepto de partida diferente al de $E_1$.

### 1.6 Obtener la mayor cantidad posible de caracterizaciones .

Se debe determinar la mayor cantidad de conjunto de propiedades $P_1$ cuyo cumplimiento sea necesario y suficiente para el cumplimiento del conjunto $C_1$. Algunas veces solo se puede obtener una colección $P_1$ cuyo cumplimiento implica el cumplimiento de $C_1$ (condiciones suficientes) o cuyo cumplimiento es consecuencia de $C_1$ (condiciones necesarias).

Estos seis pasos pueden considerarse los pasos generales que deben seguirse después de definido un concepto; pero en ocasiones pueden reducirse o ampliarse.

Por razones obvias cuando no hay dudas de cual es el concepto de partida $(E, C)$ y $C_1 = C \smile P_1$, $P_1 \neq \varnothing$, al referirnos a $(E_1, C_1)$ solo se escribirá $(E_1, P_1)$.

# 2 Aplicación del procedimiento antes descrito al estudio del concepto de métrica.

## 2.1 Utilización de las herramientas de la Teoría de Conjuntos para realizar un estudio conjuntista de su extensión.

Es conocida la definición de métrica siguiente :

**Definición.** Dado un conjunto $M$ se denomina métrica sobre $M$ a toda aplicación $m : M \times M \to [0, +\infty)$ que verifica para todos los elementos $x, y, z$ de $M$ las propiedades siguientes :

m$_1$) Si $x = y$, entonces $m(x, y) = 0$

m$_2$) (Propiedad simétrica), $m(x, y) = m(y, x)$

m$_3$)(Propiedad triangular), $m(x, z) \leqslant m(x, y) + m(y, z)$

m$_4$) Si $m(x, y) = 0$, entonces $x = y$

Se desprende de esta definición que el concepto de partida es el de función de $M \times M$ en $[0, +\infty)$, cuya extensión se indica aquí por comodidad mediante el símbolo no usual $F_M$. El contenido de este concepto lo constituye, como es conocido, la colección de propiedades $P = \{f_1, f_2\}$, donde

f$_1$) Para todo $(x, y)$ de $M \times M$ existe un $r$ de $[0, +\infty)$ tal que $((x, y), r) \in m$.

$f_2$) Si $((x,y),r_1) \in m$ y $((x,y),r_2) \in m$ ; entonces $r_1 = r_2$

Luego el concepto de partida se puede indicar por $(F_M, P)$. Evidentemente el contenido del concepto de métrica es la colección de propiedades $P_1 = P \smile \{m_i\}_{i=1,4}$ la cual contiene estrictamente a $P$. Sea $M_M$ la extensión del concepto de métrica. A continuación se determina en que casos $M_M$ es distinto del conjunto vacío y está contenido estrictamente en $F_M$.

Si $M = \varnothing$, entonces aceptando que $M \times M = \varnothing$, se tiene que $F_M = \{\varnothing\}$. Como la aplicación vacía no incumple las propiedades $\mathrm{m}_i)_{i=1,4}$, entonces $M_M = F_M$ y se concluye que en este caso el concepto de métrica sobre $M$ coincide con el concepto de función sobre $M \times M$. Esta es la razón por la cual en muchos libros se considera $M \neq \varnothing$ al definir el concepto de métrica.

Si $M = \{a\}$; entonces $M_M = \{m_o\}$, donde por $m_o$ se indica la función con dominio $M \times M = \{(a,a)\}$ y con imagen $\{0\}$ en $[0,+\infty)$. Evidentemente $M_M$ está estrictamente contenida en $F_M$. En este caso no tiene interés el concepto de métrica ya que $M_M$ tiene un solo elemento y $F_M$ tiene la cardinalidad del continuo. Si $M$ tiene más de dos elementos, entonces trivialmente $M_M \subset F_M$.

Si $M \neq \varnothing$, entonces $M_M \neq \varnothing$, ya que cualquier función real simétrica $m$ que satisface la condición $\mathrm{m}_1$) y que cumple además la desigualdad $a \leq m(x,y) \leq 2a$ para todo par $(x,y)$ de $M \times M$ que no esté en la diagonal pertenece a $M_M$, pues obviamente satisface $\mathrm{m}_4$) y para cualquier sub-conjunto $\{x,y,z\}$ de $M$ (consecuentemente $x,y,z$ son distintas dos a dos) se tiene que

$$m(x,y) + m(y,z) \geq a + a = 2a \geq m(x,z)$$

y si $x = y$, $x = z$ o y=z, se tiene también trivialmente la condición $\mathrm{m}_3$). En particular, la colección $\{m_r\}_{r\in[0,+\infty)}$ de funciones $m_r$ definidas sobre $M \times M$ por

$$m(x,y) = \begin{cases} r, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases} \tag{1}$$

cumplen las propiedades antes descritas y consecuentemente es una colección de métricas.

Hasta aquí se tiene que si $M \neq \varnothing$, entonces $\varnothing \subset M_M \subset F_M$ y que el concepto de métrica para conjuntos de un solo elemento no es importante. Pasemos a determinar la cardinalidad de $M_M$ y $F_M \backslash M_M$.

**Proposición 1 :** Si $M$ es finito con más de un elemento; entonces $M_M$ tiene la cardinalidad del continuo.

Como las funciones constantes pertenecen a $F_M \backslash M_M$ , se tiene que el cardinal de $F_M \backslash M_M$ es $c$.

**Proposición 2 :** Si $M$ es infinito de cardinalidad $m$; entonces $M_M$ tiene cardinalidad $2^m$ .

Se puede probar sin dificultad que el conjunto $F_M \backslash M_M$ también tiene cardinalidad $2^m$. En efecto, como $F(MxM, (0, +\infty)) \subset F_M \backslash M_M \subset F_M$ y como $card\ F(M \times M, (0, +\infty)) = card\ F_M = 2^m$, se tiene que $card\ (F_M \backslash M_M) = 2^m$.

Con los resultados hasta ahora obtenidos se puede concluir que si un conjunto $M$ tiene más de un elemento, entonces el número de elementos de $F_M$ que son métricas sobre $M$ es muy "grande", mayor que el número de elementos de $M$ y, tan "grande" como el número de elementos de $F_M$ que no son métricas. Sin embargo, resulta difícil para algunas personas encontrar una métrica con determinadas propiedades sobre un conjunto dado $M$; es por ello importante pasar a estudiar formas de obtener nuevos elementos de $M_M$ a partir de uno dado. Con este objetivo consideremos la colección $A$ de las funciones continuas de $[0, +\infty)$ en si mismo no idénticamente nulos que satisfacen las condiciones

i) $f(0) = 0$

ii) $f$ es creciente

iii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x$ e $y$ de $[0, +\infty)$.

La colección $A$ es:

a) **No vacía**. En efecto, las funciones $f_i$ , $i = 1, 2$ definidas sobre $[0, +\infty)$ por $f_1(t) = t/(1+t)$ , $f_2(t) = \log(1+t)$ pertenecen a esta clase. Si $f$ pertenece a esta clase; entonces $g = \min(r, f)$ con $r \in [0, +\infty)$ también pertenece a esta clase.

b)**Un semi-grupo con la suma usual y con la composición de funciones, no es un monoide**.

Obsérvese además que si $f \in A$, entonces $\alpha f \in A$ para todo número real $\alpha$ positivo.

**Lema.** Todo elemento $f$ de $A$ satisface la condición

iv) Si $f(x) = 0$, entonces $x = 0$.

**Proposición 3.** Si $M$ es un conjunto no vacío y $m$ es un elemento de $M_M$; entonces $f \circ m \in M_M$ para todo $f \in A$.[1]

---

[1] La proposición 3 nos permite ampliar la colección $C_M$ de elementos conocidos de $M_M$ a la colección $\smile A_m$, $m \in A_M$; donde $A_m = \{d_M = f \circ m : m \in CM\}$. En resumen, utilizando la colección $A$ se amplia considerablemente la colección de elementos conocidos de $M_M$. Sin embargo, para un elemento m de $M_M$ pueden existir funciones de $[0, +\infty)$ en si mismo que no pertenezcan a la colección $A$ y que $f \circ m$ pertenezcan a $M_M$ .

La proposición 3 permite ampliar los elementos conocidos de $M_M$ componiendo estos elementos por la izquierda con los elementos de una clase suficientemente buena. Surge entonces la pregunta : ¿es posible componer un elemento $m$ de $M_M$ por la derecha con los elementos de una clase $B$ suficientemente buena para que el resultado de esta composición siempre este en $M_M$ y de esta forma ampliar aun más la clase de los elementos conocidos de $M_M$? A continuación se pasa a dar respuesta a esta pregunta.

Sea $B$ la colección de funciones $g = (h \circ \pi_1, h \circ \pi_2)$, donde $h$ es una función inyectiva de $N$ en $M$.

**Proposición 4.** Si $m \in M_M$ y $g \in B$ ; entonces $m \circ g \in M_M$.

**Corolario 1.** Si $m \in M_M$, $f \in A$ y $g \in B$ ; entonces las funciones $m_1$, $m_2$ y $m_3$ definidas por el diagrama conmutativo

pertenecen a $M_M$.

Un espacio métrico es un par $(M, m)$, donde $M$ es un conjunto no vacío y $m$ es una métrica sobre $M$, para dos elementos cualesquiera $x$ e $y$ de $M$ el número positivo $m(x, y)$ se denonina distancia, y si hay posibilidad de confusión $m$-distancia de $x$ e $y$.

## 2.2 Otros conceptos relacionados con el concepto de métrica y definidos a partir de $(F_M, P)$

Bajo este título no se hará el estudio comparativo entre $M_M$ y las extensiones de otros conceptos definidos a partir de $(F_M, P)$ a que se refiere el paso 1.1, solo se darán las definiciones de algunos de esos conceptos y se establecerán algunas relaciones con $M_M$.

Para el trabajo matemático en muchas direcciones, por ejemplo para la formación de clusters (agrupamiento de objetos), algunas de las condiciones que cumple una métrica no son esenciales. Es por ello que surgieron varios conceptos con distintas variantes de combinaciones de estas condiciones.

Un elemento $m$ de $F_M$ que satisface las condiciones $m_i)$, $i = 1, 2, 3$ se denomina pseudo-métrica sobre $M$. Si se indica la extensión del concepto de pseudo-métrica por $P_M$, entonces obviamente

$$\varnothing \subset M_M \subseteq P_M \subseteq F_M$$

Teniendo en cuente que si $M = \{a\}$, entonces $M_M = P_M = \{0\} \subset F_M$ y si $M$ tiene más de dos elementos, entonces $M_M \subset P_M \subset F_M$; se concluye que para que el concepto de seudo-métrica constituya un nuevo concepto, el conjunto $M$ debe tener dos o más elementos. Si $m \in P_M$ , entonces el par $(M, m)$ recibe el nombre de espacio pseudo-métrico. Si $p \in P_M$, entonces fácilmente se prueba que la relación definida sobre $M$ por $aRb$ si y sólo si $p(a, b) = 0$ es una relación de equivalencia y que la función m definida sobre el conjunto cociente $M/R$ por $m([a], [b]) = p(a, b)$ es una métrica sobre $M/R$. Los espacios pseudo-métricos fueron investigados por Birkhoff[1, 1].

Un elemento $m$ de $F_M$ que satisface las condiciones $\mathrm{m}_1$), $\mathrm{m}_2$) y $\mathrm{m}_4$) de la definición de métrica se denomina semi-métrica sobre $M$. La colección de todas las semi-métricas sobre un conjunto $M$ se indica por $S_M$ y obviamente cumple que

$$\varnothing \subset M_M \subseteq S_M \subseteq F_M \text{ y } P_M \frown S_M = M_M$$

Si $M$ es un conjunto con dos elementos como máximo, entonces $M_M = S_M$.

Si $M$ es un conjunto con tres o más elementos se cumple que $M_M \subset S_M$.

En efecto, si $\{a, b, c\}$ es un subconjunto de $M$; entonces cualquier elemento $s$ de $S_M$ tal que $s(a, b) = s(b, a) = r_1$, $s(b, c) = s(c, b) = r_2$, $s(a, c) = s(c, a) = r_3$, donde $r_i$, $i = 1, 3$, son elementos de $[0, +\infty)$ que cumplen la desigualdad $r_j > r_k + r_l$, para un elemento $(j, k, l)$ de $I \times I \times I$, $I = \{1, 2, 3\}$; no pertenece a $M_M$. Se cumple además que $S_M \subset F_M$ porque toda función constante sobre $M \times M$ no pertenece a $S_M$. Luego el concepto de semi-métrica constituye un nuevo concepto si y solo si $M$ tiene tres o más elementos y su extensión satisface las relaciones siguientes

$$M_M \subset S_M \subset F_M \text{ y } S_M \frown P_M = M_M$$

Consecuentemente como para todo conjunto finito $M$ los conjuntos $M_M$ y $F_M$ tienen la cardinalidad del continuo, se tiene que $S_M$ también tiene la cardinalidad del continuo. Si $r_1$ es mayor que $r_2$ el conjunto de los $r_3$ tales que $r_1 > r_2 + r_3$ es $(0, r_1 - r_2)$ y tiene la cardinalidad del continuo, luego $S_M \backslash M_M$ también tiene esa cardinalidad. Como toda función constante de $M \times M$ en $[0, +\infty)$ no pertenece a $S_M$ resulta que $F_M \backslash S_M$ tiene la cardinalidad del continuo.

**Proposición 5.** Si $M$ es infinito de cardinalidad $m$; entonces $S_M$, $S_M \backslash M_M$ y $F_M \backslash S_M$ tienen cardinalidad $2^m$.

**Nota.** Se concluye que sobre un conjunto $M$ con tres o más elementos las colecciones de las semi-métrica que no son métricas y de las funciones que no son semi-métricas son amplísimas. Los orígenes de la palabra semi-métrica pueden verse en [2, 2], [3, 3], [4, 4], y [5, 5].

Se denomina espacio con una métrica débil a todo par $(M, m)$ en el cual $m$ satisface las condiciones $\mathrm{m}_1$) y $\mathrm{m}_3$), pero no necesariamente las condiciones $\mathrm{m}_2$) y $\mathrm{m}_4$). Este tipo de espacios fue estudiado por Ribeiro [6, 6].

Se han estudiado espacios en los que $m$ satisface las condiciones $\mathrm{m}_1$) y $\mathrm{m}_2$) y una condición más débil que la condición $\mathrm{m}_3$); por ejemplo, los espacios casi-métricos de Menger [3, 3] y [7, 7]. Espacios todavía más generales, en los cuales se exige a la función $m$ que satisfaga solo las condiciones $\mathrm{m}_1$) y $\mathrm{m}_4$) fueron investigados también por Menger [8, 8]. Alexandroff y Hopf [9, 9] denominaron espacios métricos abstractos a los pares $(M, m)$, donde $m$ es una función real no negativa definida sobre $M \times M$ que satisface condiciones no específicas. Espacios $(M, m)$ en los que $m$ no es necesariamente un número real fueron estudiados por Menger [10, 10] y Golab [11, 11]. Bieberbach [12, 12] denominó espacio de Frechet localmente métrico a todo par $(F, f)$, donde $f$ es una función que a cada elemento del espacio le asigna una vecindad que es un espacio métrico. En diferentes algoritmos de agrupamientos ( Clustering Algorithms) y de la Teoría de Reconocimientos de Patrones de las redes neurales se utiliza ( ver [13, 13] y [14, 14] ) la palabra distancia con un sentido más amplio que una métrica, por ejemplo, puede indicar una semi-métrica, pseudo-métrica, casi-métrica, etc.

Para dos elementos cualesquiera $x$ e $y$ de $M$, independientemente de que m sea una métrica, pseudo-métrica, semi-métrica, etc, se denomina distancia, y si hay posibilidad de confusión $m$-distancia, de $x$ a $y$ al número $m(x, y)$.

## 2.3 Ultramétrica

Se ha querido con esta sub-sección ilustrar parcialmente el paso 1.3.

**Definición**. Un elemento $u$ de $F_M$ se denomina ultramétrica si cumple en lugar de la condición $\mathrm{m}_3$) la condición más fuerte

m'$_3$) $u(x, z) \leq \max[u(x, y), u(y, z)]$, cualesquiera sean $x$, $y$, $z$ de $M$

No es difícil probar que la condición m'$_3$) implica la condición $\mathrm{m}_3$) y que el recíproco de esta afirmación no es cierto. Consecuentemente indicando la extensión del concepto de ultramétrica por $U_M$ y su contenido por $P'$, se tiene que $U_M \subset M_M$ y que del cumplimiento de las propiedades $P'$ se deduce el cumplimiento de las propiedades $P$ pero no recíprocamente. Obviamente el estudio detallado de $U_M$ y de $M_M \backslash U_M$ contribuye al mejor conocimiento de $M_M$.

Si $M$ es un conjunto unitario , entonces $U_M = M_M$ y consecuentemente para este caso no tiene sentido el concepto de ultramétrica. Si $M$ tiene dos o más elementos, se prueba con facilidad que $U_M \subset M_M$. Se tiene además que $U_M \neq \varnothing$, pues toda métrica $m_r$ (ver sección 1) es ultramétrica.

**Proposición 6.** Si $u$ es una ultramétrica sobre el conjunto $M$ con dos o más elementos, $x$, $y$, $z$ son elementos cualesquiera de $M$ y se construye en el plano real un triángulo cuyos lados tengan por longitud $u(x,z)$, $u(x,y)$ y $u(y,z)$ respectivamente; entonces ese triángulo es isósceles.

La ultramétrica se utiliza en algoritmos de agrupamiento de enlace simple, ver capítulo 12, "Sinle-link Clustering Algorithms", sección 3.2, "Algorithms based on an ultrametric transformation", páginas 271-272 del libro [14, 14].

## 2.4 Estructuras algebraicas y topológicas de $M_M$

### 2.4.1 Estructuras algebraicas de $M_M$

En esta sub-sección se probará que $M_M$ hereda algunas de las estructuras de $[0, +\infty)$.

**Proposición 7.** El par $(M_M, +)$ donde $+$ es la suma heredada de $([0, +\infty), +)$ es un semi-grupo abeliano que no es un monoide.

Obsérvese que $([0, +\infty), +)$ es un monoide abeliano y que $(F_M, +)$ hereda esta estructura; pero como el cero no pertenece a $M_M$, entonces se debe esperar como máximo la estructura de semi-grupo abeliano para $(M_M, +)$.

**Proposición 8.** El par $(M_M, \vee)$, donde $\vee$ es la operación definida sobre $M \times M$ por $(m_1, m_2) \to m_1 \vee m_2$, $(m_1 \vee m_2)(x, y) = \max\{m_1(x, y), m_2(x, y)\}$ es un semi-grupo abeliano que no es un monoide.

Una observación similar a la hecha después de la Proposición 7 se puede hacer ahora con solo sustituir la operación $+$ por la operación $\vee$.

**Proposición 9.** Si $\alpha$ es un número real positivo y $m \in M_M$; entonces $\alpha m \in M_M$.

Las estructuras algebraicas de $F_M$ y consecuentemente las de $M_M$, son elementales; no obstante, utilizando las operaciones correspondientes a estas estructuras se puede ampliar considerablemente el conjunto de elementos conocidos de $M_M$.

### 2.4.2 Estructuras topológicas de $M_M$.

**Proposición 10.** Si $\{m_n\}$ es una sucesión de métricas de $M_M$ que converge puntualmente a $m$; entonces $m$ satisface las condiciones m$_1$), m$_2$) y m$_3$)

**Corolario 1.** Si existe un número positivo $k$ tal que $k \leq m_n$ sobre $M \times M \backslash \Delta_M$ para todo $n$ de $N$; entonces $m$ pertenece a $M_M$

**Corolario 2.** Si $\alpha_k \in (0, +\infty)$, $m_k \in M_M$, $k \in N$ y $\sum_{k \geq 1} \alpha_k m_k$ es puntualmente convergente; entonces $\sum_{k \geq 1} \alpha_k m_k$ pertenece a $M_M$.

**Corolario 3.** Si $\sum_{k \geq 1} \alpha_k$ es una serie convergente cuyos términos pertenecen a $(0, +\infty)$ y $\{m_k\}_{k \in N}$ es una sucesión uniformemente acotada de $M_M$; entonces $\sum_{k \geq 1} \alpha_k m_k$ pertenece a $M_M$.

Las estructuras topológicas de $M_M$ son también muy simples.

## 2.5 Métricas sobre conjuntos con estructuras algebraicas.

En esta sub-sección, para el caso en que $M$ es un espacio vectorial, se estudiarán dos subclases importantes de $M_M$ y se establecerá un isomorfismo entre una de estas clases y la clase $N_M$ de las normas sobre $M$.

Si $(G, +)$ es un grupo , las métricas que son compatibles con la operación $+$, i. e. las métricas que satisfacen la condición

m$_5$) $m(x + z, y + z) = m(x, y)$ (invarianza para traslaciones)

para $x$, $y$, $z$ cualesquiera de $G$ ; son muy importantes para el estudio del grupo $(G, +)$. La colección de métricas sobre $(G, +)$ que satisfacen m$_5$) se denota por $M_{(G,+)}$.

Los elementos $m$ de $M_{(G,+)}$ tienen propiedades muy importantes, por ejemplo, la operación $+$ es una aplicación continua de $G \times G$ en $G$. (considerando una métrica producto de $m$ con $m$ en $G \times G$). Otra propiedad importante de estos elementos se establece en la proposición 11.

Sea $F_{(G,+)}$ la colección de funciones $f$ de $(G, +)$ en $[0, +\infty)$ que cumplen para todo $x$ e $y$ de $G$ las condiciones

i) $f(x) = 0$ si y solo si $x = 0$

ii)$f(-x) = f(x)$

iii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Esta colección con la suma heredada de $([0, +\infty), +)$ es un semi-grupo conmutativo.

**Proposición 11.** La aplicación $F$ definida sobre $(M_{(G,+)},+)$ por $F(m) = m \circ (I,O)$, donde $m \in M_{(G,+)}$, $I$ es la aplicación identidad y $O$ la aplicación nula sobre $G$, es un isomorfismo de semigrupo entre los semigrupos $(M_{(G,+)},+)$ y $(F_{(G,+)},+)$.

Si $(V,+,\bullet)$ es un espacio vectorial sobre $R$ o $C$, las métricas sobre $V$ que satisfacen para $x$, $y$, $z$ cualesquiera de $V$ las condiciones $\mathrm{m}_5$) y $\mathrm{m}_6$) $m(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, m(x,y)$ (homogeneidad positiva para homotecia), se dice que son métricas compatibles con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar de $V$ y hacen de estas operaciones funciones continuas. La colección de estas métricas se indica por $M(V,+,\bullet)$. Se cumple que $M_{(V,+)} \backslash M(V,+,\bullet) \neq \varnothing$, pues la métrica descrita pertenece a $M_{(V,+)}$ y no a $M_{(V,+,\bullet)}$. La colección de las funciones $f$ de $(V,+,\bullet)$ en $[0,+\infty)$ que satisfacen las condiciones i) e iii) de la clase $F_{(V,+)}$ y en lugar de la condición ii) satisfacen la condición

ii')$f(\alpha x) = |\alpha|\, f(x)$ para todo $x$ de $V$ y todo $\alpha$ de $R$,

se indica por $F_{(V,+,\bullet)}$ y forma con la suma heredada de $[0,+\infty)$ un semigrupo conmutativo que está estrechamente relacionado con el semi-grupo conmutativo $(M_{(V,+,\bullet)},+)$.

**Proposición 12.** Si $(V,+,\bullet)$ es un $K$-espacio vectorial, $K = R$ o $K = C$, la igualdad $F(m) = m$ o $(I,O)$, donde $I$ y $O$ son las funciones identidad e idénticamente nulas sobre $V$, define un isomorfismo (de semi-grupo) entre los semi-grupos $(M_{(V,+,\bullet)},+)$ y $(F_{(V,+,\bullet)},+)$.

Los elementos de $F_{(V,+,\bullet)}$ se llaman normas de $(V,+,\bullet)$ y generalmente se denotan por el símbolo $\|\|$. Todo espacio vectorial $(V,+,\bullet)$ dotado de un elemento $\|\|$ de $F_{(V,+,\bullet)}$ se denomina espacio vectorial normado y se denota por $(V,\|\|)$. Con estas nuevas notaciones la colección $F_{(V,+,\bullet)}$ se indica por $N_{(V,\|\|)}$ o simplemente por $N_V$. La colección $N_V$ es isomorfa a la sub-colección propia $M_{(V,+,\bullet)}$ de la colección $M_V$.

Dado un $K$-espacio vectorial $(V,+,\bullet)$, $K = R$ o $K = C$, se dice que un elemento $m$ de $M_V$ es topológicamente compatible con la estructura vectorial de $(V,+,\bullet)$ si sus operaciones suma y producto por un escalar son continuas con respecto a $m$; o sea, si para todo par de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de $V$ y toda sucesión $\{\lambda_n\}$ de $K$ tales que

$$x_n \xrightarrow{m} x,\ y_n \xrightarrow{m} y \text{ y } \lambda_n \xrightarrow{1.1} \lambda$$

se tiene que

$$x_n + y_n \xrightarrow{m} x + y \text{ y } \lambda_n x_n \xrightarrow{m} \lambda x$$

La colección de todas las métricas topológicamente compatibles con su estructura de espacio vectorial se indica en el trabajo por $M_t$.

Como la métrica discreta sobre cualquier espacio vectorial no es métricamente compatible con la estructura vectorial y sin embargo es topológicamente compatible con esta estructura, ya que una sucesión $\{x_n\}$ de $V$ es convergente a un valor con esta métrica si y solo si todos sus términos salvo un número finito son iguales a $x$; resulta que $M_{(V,+,\bullet)}$ está contenida estrictamente en $M_t$.

Dado un espacio vectorial normado $(V, \|\|)$, se tienen varias colecciones de métricas; por ejemplo, la colección de las métricas que satisfacen la condición $\mathrm{m}_5)$ , de las que satisfacen la condición $\mathrm{m}_6)$, de las que satisfacen las condiciones $\mathrm{m}_5)$ y $\mathrm{m}_6)$, de las que son topológicamente compatibles con la estructura de grupo, de las que son topológicamente compatible con la estructura de espacio vectorial y de las que son topológicamente compatible con la operación multiplicación por un escalar. El estudio de las relaciones entre todas estas colecciones, así como el de su cardinalidad es muy importante para el conocimiento de la colección $M_V$ y será objeto de estudio en un artículo posterior.

## 2.6 Caracterizaciónes del concepto de métrica.

En esta sub-sección se da cumplimiento al paso 1.6 de la sección uno.

Lindenbaum (ver [15, 15]) probó que la colección de condiciones $P_1 = \{\mathrm{m}_i)\}$, $i = 1, 4$ es equivalente a la colección $Q = \{\mathrm{m}_1), \mathrm{m}\ _{23}), \mathrm{m}\ _4)\ \}$, donde por $\mathrm{m}_{23})$ se indica la condición

$$m(x, z) \leq m(x, y) + m(z, y), \text{ para } x,\ y,\ z \text{ cualesquiera de } M.$$

Si se plantea la desigualdad triangular solo para los casos en que $x$, $y$, $z$ son diferentes dos a dos y se indica esta nueva propiedad por $\mathrm{m}\ _3$"), entonces las propiedades $\{\mathrm{m}_1), \mathrm{m}_2), \mathrm{m}_3"), \mathrm{m}_4)\}$ constituyen también una caracterización del concepto de métrica.

La no negatividad de $m$ es una consecuencia de las condiciones $\mathrm{m}_2)$ y $\mathrm{m}_3)$. En efecto, $\mathrm{m}_3)$ nos permite asegurar que para todo y de $M$ se cumple que

$$m(x, y) \leq (m(x, y) + m(y, y)$$

y de aquí resulta trivialmente que $m(y,y) \geq 0$ para todo $y$ de $M$. De m$_2$) y m$_3$) se tiene que

$$m(x,x) \leq 2m(x,y)$$

para $x$ e $y$ cualesquiera de $M$. Luego $m(x,y) \geq 0$ para todo $x$ e $y$ de $M$.

Consecuentemente, una métrica $m$ sobre $M$ se puede definir como una función de $M \times M$ en $R$ que cumple las dos propiedades siguientes:

m$_{14}$) $m(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

m$_{23}$) $m(x,y) \leq m(x,z) + m(y,z)$ para todo $x$, $y$, $z$ de $M$;

o como una función $m$ de $M \times M$ en $[0,+\infty)$ que cumple m$_{14}$) y

m$_{23}$") $m(x,y) \leq m(x,z) + m(y,z)$ para $x$, $y$, $z$ de $M$ diferentes dos a dos.

# Referencias


[1] Birkhoff, G. Fundamenta Mathematical, Vol. 26. (1936), 156

[2] Menger, K. Math. Ann. Vol. 100 (1928)

[3] Menger, K Jber. Dtsch. Math. V., Vol. (40) (1931)

[4] Menger, K. Proc. Ale. Amst., Vol. 30 (1927), 710

[5] Chittenden, W. E. Traus. Amer. Math. Soc., Vol. 18 (1917), 161-166.

[6] Ribeiro, H. Portug. Math., Vol. 4 (1943-5), 21-40

[7] Menger, K. Math. Zeit, Vol. 33 (1931), 396

[8] Menger, K. C.R. Paris, Vol. 202 (1936), 1007

[9] Alexandroff, P. y Hopf, H. Topologic I. Berlin, 1935

[10] Menger, K. Fundamenta Mathematicae, Vol. 25 (1935), 445

[11] Golab, S. Fundamenta Mathematicae, Vol 31 (1938), 67

[12] Bieberbach, L. Sbert. Preuss. Akad. Wiss., (1929), 612

[13] Krishnaiah, P. R. and L. N. Kanal. Handbook of Statistics 2. Classification Pattern Recognition and Reduction of Dimensionality. North-Holland Publishing Company. Amstrdam - New York-oxford. 1982. (271-272)

[14] Peper Ferdinand, Shirazi, Mehdi N, and Nudehidiki. A noise suppressing Distance Measure for Competitive Learning Neural Networks IEEE Trausactions on neural networks Vol. 4 No. 1 January 1993. 151 - 153.

[15] Lindenbaum,A. Fundamenta Mathematicae, Vol. 8, (1926), 211.