EL PROBLEMA DE LOS MOMENTOS.

FUNCIONES DE REPARTICION Y SUS MOMENTOS.

Son conocidos por la mecánica racional los conceptos de momento estático y de momento de inercia de un sistema de masas, aquí nos limitaremos a considerar masa distribuidas sobre una recta (eje "x") y los momentos respecto a un punto fijado de ésta (origen). Entonces, para un sistema finito o numerable de masas (positivas) p_1, p_2,... concentradas en los puntos de abscisas x_1, x_2,.... Los momentos antes mencionados son dados respectivamente por las fórmulas:

$$m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \qquad\qquad m_2 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2$$

De forma natural, se extienden los momentos hasta de orden "*n*", definido por:

[1.1] $$m_n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^n \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Si las masas son distribuidas de modo continuo, con una densidad $f(x) \geq 0$, [1.1] toma la forma:

[1.2] $$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Haciendo uso de la integral de Stieltjes, las fórmulas [1.1] y [1.2] se unifican introduciendo la llamada función de repartición *F(x)* la cual expresa, para cada x, la masa distribuida en el intervalo $\left(-\infty, x\right]$ y se obtiene como expresión del momento m_n la siguiente expresión:

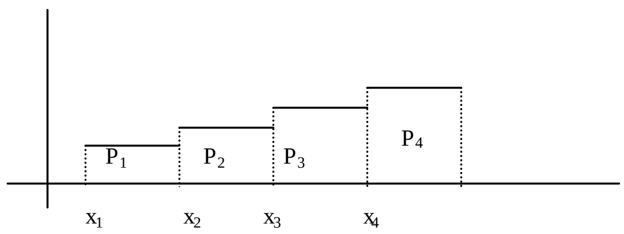
[1.3] $$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) \qquad\qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Siempre se consideran distribuciones de masas positivas de modo que todo sus momentos [1.3] tengan valor finito; en particular será finita la masa total distribuida, porque es igual al momento m_0: $m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) > 0$.

Es evidente que la función de repartición *F(x)* resulta no negativa, no decreciente y acotada; más precisamente se tiene que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} F(x) = m_0$.

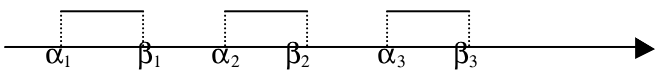
Cada función que goce de estas propiedades se puede pensar como una función de repartición de una distribución de masas positivas.

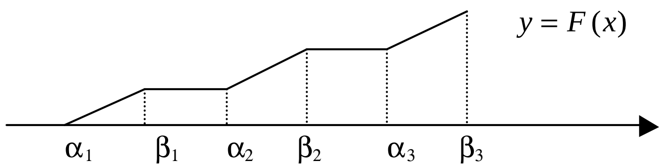
La expresión [1.3] se reduce a [1.1] sí la *F(x)* es una función escalera con salto $p_1, p_2, \ldots$ en los puntos $x_1, x_2, \ldots$.



Y se reduce a la [1.2], sí *F(x)* es absolutamente continua, resultando en tal caso $f(x) = \dfrac{dF}{dx}$.

Es oportuno tomar en consideración aquellas distribuciones constituidas por masas p_1, p_2,... concentrada en un número finito de puntos distintos x_1, x_2,... para éstas la función de repartición es una función escalera con N saltos. Además, fijados sobre el eje x, N intervalos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ con $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots a_n < b_n$. Tendremos también ocasión para considerar aquella particular función de repartición absolutamente continua *F(x)* la cual tiene densidad correspondiente $f(x) = \dfrac{dF}{dx} = 1$ en todos los intervalos fijados y cero en otro lugar.





Diremos que la densidad $f(x)$ es una función rectangular de orden N, con los extremos izquierdos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y los extremos derechos $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

EL PROBLEMA DE LOS MOMENTOS.

En este problema se estudian dos grandes argumentos. El primero estudia las propiedades de la sucesión de los momentos y, examina bajo cuales condiciones, una asignada sucesión de números reales $m_0, m_1, m_2 \ldots$, puede ser aquella de los momentos de una función de repartición *F(x)*.

El segundo argumento estudia sí la sucesión $m_0, m_1, m_2 \ldots$ es apta para determinar a *F(x)*.

Estos dos argumentos constituyen el llamado problema de los momentos.

Si dados los números $m_0, m_1, m_2 \ldots$, existe una sola *F(x)* que los tenga como momentos, el problema se dice que es determinado; si existen más funciones *F(x)*,con los momentos $m_0, m_1, m_2 \ldots$ el problema se dice indeterminado.

Acerca de la indeterminación, ocurre una observación. Si una función de repartición *F(x)*, tiene nulo todos sus momentos, entonces es $F(x) = 0$. Basta más bien pedir $m_0 = 0$ para concluir $F(x) = 0$. De ahora en adelante supondremos siempre $m_0 > 0$.

Si dos funciones de repartición $F_1(x), F_2(x)$ tienen los mismos momentos y sí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_1(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_2(x) = 0 \qquad n = 0,1,2\ldots$$

Se sigue que: $\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\left[F_1(x) - F_2(x)\right] = 0$

De aquí no podemos concluir que $F_1(x) - F_2(x) = 0$ ya que la diferencia de las funciones de repartición en general no es una función de repartición, pero si es una función de variación acotada.

Para poner en evidencia la posibilidad de indeterminación en el problema de los momentos, bastará citar un ejemplo de una función a variación acotada que tenga todo los momentos nulos. Este ejemplo lo dio Stieltjes con la función:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int_0^x e^{-\sqrt[4]{x}} \operatorname{sen} \sqrt[4]{x} dx , & x > 0 \end{cases}$$

Una demostración al ejemplo de Stieltjes:

Nos proponemos demostrar que:

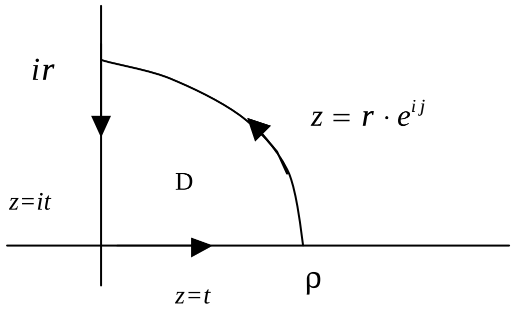
$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\sqrt[4]{x}} \operatorname{sen} \sqrt[4]{x} dx = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Hagamos $x = t^4$ y la integral (I) se transforma en:

$$\int_0^\infty t^{4n+3} e^{-t} \operatorname{sen} t dt = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Consideremos la función $f(z) = z^{4n+3} e^{-(1-i)z}$. Esta función es analítica en todo C y podemos aplicar el teorema de Cauchy en todo camino cerrado.

Sea $D = \left\{ z \in C \,/\, \quad |z| < r, \quad 0 \le Argz \le \frac{p}{2} \right\}$



Por el teorema de Cauchy se tiene:

$$\oint_{\partial D} z^{4n+3} e^{-(1-i)z} dz = 0$$

y esta integral es equivalente a:

$$\int_0^r t^{4n+3} e^{-(1-i)t} dt + \int_o^{\frac{p}{2}} r^{4n+3} e^{i(4n+3)j} e^{-(1-i)re^{ij}} re^{ij} \, id j + \int_r^0 i^{4n+3} t^{4n+3} e^{-(1-i)it} idt = 0$$

Simplificando se reduce a:

$$\int_0^r t^{4n+3} e^{-t} \left(e^{it} - e^{-it} \right) dt + ir^{4n+4} \int_0^{\frac{p}{2}} e^{i(4n+4)j} e^{-r(\cos j + \operatorname{sen} j) + ir(\cos j - \operatorname{sen} j)} dj$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq j \leq \frac{p}{2}$ se tiene que:

$$\left| ir^{4n+4} \int_0^{\frac{p}{2}} e^{i(4n+4)j} e^{-r(\cos j + \operatorname{sen} j) + ir(\cos j - \operatorname{sen} j)} dj \right| \leq r^{4n+4} e^{-r} \int_0^{\frac{p}{2}} \left| e^{i(4n+4)j} dj \right| \leq r^{4n+4} e^{-r} \frac{p}{2}$$

Y por lo tanto, se tiene:

$$\int_0^{\infty} t^{4n+3} e^{-t} \left(e^{it} - e^{-it} \right) dt = 0$$

Y de ahí se concluye que:

$$\int_0^{\infty} t^{4n+3} e^{-t} \operatorname{sen}(t) dt = 0 \qquad\qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad\qquad \text{l.q.q.d.}$$

SEÑALES HISTORICAS SOBRE EL PROBLEMA DE LOS MOMENTOS.

Se puede decir que el problema de los momentos nació con una clásica memoria de T.J. Stieltjes, titulada "Recherches sur les fractions Continues" publicada en 1894-95 en los anales de la Facultad de Ciencias de Toulouse, en esta memoria Stieltjes determina una función de repartición F(x), nula para $x < 0$, que satisface las infinitas ecuaciones integrales.

$$m_n = \int_0^\infty x^n dF(x) \qquad n = 0,1,\ldots$$

En esta memoria aparece por primera vez el concepto de integral bajo la forma que hoy en día se conoce como integral de Stieltjes. En 1920-21, publican la obra titulada "Veber eine Erwei Terung des Stieltjes Schem Momentproblems". Luego publican Nevanlinna, Riesz, Carleman, Hausdorff, etc...

J.A. Shohat y J.D. Tamarkin, publican en 1943 en A.M.S. una memoria titulada "The problem of moments" y todos los estudios modernos parten de esta memoria.

EL PROBLEMA DE HAMBURGUER.

Asignado [1.2] con $m_0 > 0, m_1, m_2 \ldots$ se forma un determinante:

[2.1] $$D_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix} \qquad n = 0,1,\ldots$$

Entonces, una condición necesaria y suficiente es que exista al menos una función de repartición *F(x)* que verifique [1.2] y que la sucesión $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ satisfaga las dos condiciones siguientes:

A. Sea formada por números positivos.

B. Exista un entero $N > 0$, tal que: $D_0 > 0, D_1 > 0, \ldots, D_{n-1} > 0, D_n = D_{n+1} = \ldots = 0$.

En el caso A el problema puede ser determinado o indeterminado, pero entre todas sus soluciones no hay ninguna función de escalera con un número finito de saltos. En el caso B el problema es determinado y su única solución es una función de escalera con *N* saltos.

EL PROBLEMA DE STIELTJES.

Consideremos las infinitas ecuaciones integrales:

[2.2] $$m_n = \int_a^{\infty} x^n dF(x), \qquad n = 0,1,2\ldots, \qquad a \in \Re$$

Tomando como base [2.1] se obtiene el determinante de Stieltjes.

[2.3] $$D_n' = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que exista una función de repartición *F(x)* nula para $x < a$ y que verifique [2.2] es que las dos sucesiones

$$D_0, D_1, \dots, D_n, \dots$$
$$D_1', D_2', D_3', \dots, D_n', \dots$$

Satisfagan las dos propiedades siguientes:

A. Estén formadas por números positivos.

B. Exista $N > 0$ tal que:

$$D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0; D_n = D_{n+1} = \dots = 0$$
$$D_1' > 0, D_2' > 0, \dots, D_n' > 0; D'_{n+1} = \dots = 0$$

En el caso A el problema puede ser indeterminado, pero entre todas sus soluciones no hay ninguna función a escalera con un número finito de saltos. En el caso B el problema es determinado y su única solución es una función a escalera con N saltos.

EL PROBLEMA DE HAUSDORFF.

Consideremos las infinitas ecuaciones integrales:

[2.4] $$\int_a^b x^n dF(x) = m_n \qquad n = 0,1,\ldots \qquad [a,b \subset \Re].$$

Conjuntamente con los determinantes D_n y D'_n se define:

[2.5] $$D''_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \ldots & b^n \\ m_0 & m_1 & \ldots & \ldots & m_n \\ m_1 & m_2 & \ldots & \ldots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \ldots & \ldots & m_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que exista una y solo una función de repartición *F(x)* nula para $x < a$, constante $(= m_0)$ para $x > b$ y que verifique [2.4] y que las tres sucesiones:

$$\begin{aligned} &D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots \\ &D_1', D_2', \ldots, D_n', \ldots \\ &D_1'', D_2'', \ldots, D_n'', \ldots \end{aligned}$$

Es que satisfagan las siguientes propiedades:

A. Sean positivas.

B. Existe $N > 0$ tal que:

$$D_0 > 0, D_1 > 0, \ldots, D_{n-1} > 0; D_n = D_{n+1} = D_{n+2} = \ldots = 0$$
$$D_1^{'} > 0, \ldots, D_{n-1}^{'} > 0; D_n^{'} = D_{n+1}^{'} = D_{n+2}^{'} = \ldots = 0$$
$$D_1^{''} > 0, \ldots, D_{n-1}^{'} > 0; D_n^{''} = D_{n+1}^{''} = D_{n+2}^{''} = \ldots = 0$$

Este problema es siempre determinado por el conocido Teorema de Lerch.

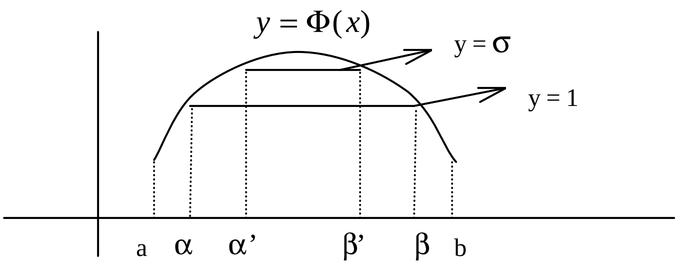
TEOREMA DE LERCH. (T.1)

Sea $f(x) \in C^0[a,b]$; $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$, $n = 0,1,2\ldots$ $\Rightarrow f(x) = 0$.

$\forall x \in [a,b]$

Demostración: Supongamos que $f(x)$ no es idénticamente nula en $[a,b]$, como $f \in C^0[a,b]$, existe $[a,b] \subset [a,b]$ tal que $f(x)$ mantiene el mismo signo. (Supongamos $f(x) > 0$), sea $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ y consideremos

$\Phi(x) = 1 - \dfrac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^2}$ se observa que $\Phi(a) = \Phi(b) = 1$.



$$\Phi(a) = 1 - \frac{(a-a)(a-b)}{(b-a)^2} = 1 - \frac{(a-a)(b-a)}{(b-a)^2} > 0$$

$$\Phi(b) = 1 - \frac{(b-a)(b-b)}{(b-a)^2} > 0$$

La función $[\Phi(x)]^n$, son combinaciones lineales de $x^k\,(k = 0,1,2,3\ldots)$ se tiene $\forall n \in \mathrm{N}$.

(T.1.1) $$\int_a^b x^n f(x)dx = \int_a^b [\Phi(x)]^n f(x)dx = 0$$

Por otra parte se tiene:

(T.1.2) $$\int_a^b [\Phi(x)]^n f(x)dx = \int_a^a [\Phi(x)]^n f(x)dx + \int_a^b [\Phi(x)]^n f(x)dx + \int_b^b [\Phi(x)]^n f(x)dx$$

Sea $M = \underset{x\in[a,b]}{Máx}|f(x)| > 0$ y sobre los intervalos $[a,a]$ y $[b,b]$, $\Phi(x)$, satisface $0 < \Phi(x) \le 1$, con lo cual se tiene $0 < [\Phi(x)]^2 \le 1$ y se tiene:

(T.1.3) $$\left|\int_a^a [\Phi(x)]^n f(x)dx + \int_b^b [\Phi(x)]^n f(x)dx\right| \le \left|\int_a^a [\Phi(x)]^n f(x)dx\right| + \left|\int_b^b [\Phi(x)]^n f(x)dx\right|$$
$$\le M(a-a) + M(b-b) = M[(a-a)+(b-b) < M(b-a)]$$

Podemos encontrar un intervalo $[a',b'] \subset [a,b]$ y un número $s > 1$ tal que $\Phi(x) \ge s \quad ,\forall x \in [a',b']$ y se tiene:

$$\int_a^b [\Phi(x)]^n f(x)dx > \int_{a'}^{b'} [\Phi(x)]^n f(x)dx > s^n \cdot m(b'-a')$$ y por ser $s > 1$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [\Phi(x)]^n f(x)dx = +\infty$$

De (T.1.1), (T.1.2) y (T.1.3) se deduce que: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b [\Phi(x)]^n f(x)dx = +\infty$. Y esto es una contradicción con (T.1.1), contradicción que proviene del haber supuesto que *f(x)* no sea idénticamente nula en$[a,b]$. La hipótesis del Teorema de Lerch puede ser debilitada.

TEOREMA: T.2

Sea $f(x)$ mensurable y sumable en $[a,b]$; $\int_a^b x^n f(x)dx = 0 \quad ,n = 0,1,2\ldots,$ entonces $f(x) = 0$ p.p. $\forall x \in [a,b]$.

Demostración:

Pongamos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)$ es absolutamente continua en$[a,b]$.

$F(a) = F(b) = 0$. (Tomando $n = 0$, de la hipótesis).

$$\int_a^b x^n f(x)dx = \left[x^n F(x)\right]_a^b - n\int_a^b x^{n-1}F(x)dx = 0$$

O sea: $\int_a^b x^{n-1}F(x)dx = 0 \qquad ,n = 1,2\ldots$

Por el teorema anterior $F(x)$ es idénticamente nula y se tiene que $F^{'}(x)=0$ y por lo tanto se tiene que $F^{'}(x)=f(x)$ p.p.; es decir $f(x)\overset{p.p.}{=}0, \forall x\in[a,b]$.

Comentario sobre las aplicaciones del teorema de Lerch.

Son conocidas las aplicaciones en modelos matemáticos de la transformada de Laplace y de Fourier; estas aplicaciones son basadas en la unicidad de la antitransformada, y este hecho esta desarrollado en el teorema de Lerch.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y EL TEOREMA DE UNICIDAD.

Teorema de unicidad: (T.3)

Si $F_1(t) \wedge F_2(t)$ son dos funciones L-transformables y tienen la misma transformada unilateral de Laplace $f(s)$ en un cierto semiplano $R_e(s) > b$, entonces $F_1(t) = F_2(t)$ p.p. en $[0,\infty)$.

DEMOSTRACION:

Sea $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$. De la hipótesis del teorema se tiene:

(T.3.1) $\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = 0$ Para $R(s) > b$.

Fijado un punto S_o, con $R(s_o) > b$, se define:

(T.3.2) $f(t) = \int_0^t e^{-s_o t} F(t)dt$

$f(t) \in C_{Loc}[0,\infty)$ y existe el límite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ para $R(s) > R(s_o)$, se verifica:

(T.3.3) $\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = (s - s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} f(t)dt$

Se observa que (T.3.1) es válida en los infinitos puntos $s = s_0 + n$ $(n = 1,2,...)$ en virtud de (T.3.3) esto se traduce en las infinitas ecuaciones.

(T.3.4) $\int_0^\infty e^{-nt} f(t)dt = 0,$ $(n = 1,2,...)$

Hagamos el cambio $x = e^{-t}$ y se obtiene:

(T.3.5) $$\int_0^1 x^{n-1} f(-\log x)dx = 0 \qquad (n = 1,2,..)$$

La función $f(-\log x)$ es continua en $[0,1]$ y por el teorema de Lerch podemos asegurar que $f(-\log x) = 0$ para $0 \le x \le 1$ y entonces se tiene: $f(t) = 0,\ t \ge 0,\ f'(t) = 0,\ t \ge 0$. Por (T.3.2) se tiene que: $f'(t) = e^{-s_0 t}F(t)$ y por lo tanto $e^{-s_0 t} f(t) = 0$ para casi todo valor de $t \ge 0$ es decir $F(t) = 0$ p.p. en $[0,\infty)$ y por lo tanto $F_1(t) = F_2(t)$ p.p. $t \ge 0$.

TEOREMA: (T.4)

Si dos funciones $F_1(t) \wedge F_2(t)$ tienen la misma transformada bilateral de Laplace en la franja $b \le R(s) \le g$ entonces $F_1(t) = F_2(t)$ p.p. en $\Re$.

DEMOSTRACION:

Sea $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$, se tiene:

(T.4.1) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t)dt = 0. \quad b < R(s) < g$$

Por otro lado el primer miembro de (T.4.1) es la suma de dos transformadas unilaterales de Laplace.

(T.4.2) $$f_1(s) = \int_0^{\infty} e^{st} F(-t)dt; \quad f_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$

La primera es homorfa en el semiplano $R(s) < g$ y la segunda es homorfa en $R(s) > b$.

Por (T.4.1) podemos escribir:

(T.4.3) $$f_1(s) + f_2(s) = 0. \quad b < R(s) < g$$

Se define la función

(T.4.4) $$f(s) = \begin{cases} -f_1(s) & R(s) < g \\ f_2(s) & R(s) > b \end{cases}$$

La función $f(s)$ resulta homorfa en $\Re$. Fijados b_1, g_1 con $b < b_1 < g_1 < g$, se tiene:

(T.4.5) $$\begin{cases} \lim_{s\to\infty} \frac{f_1(s)}{s} = 0 & \text{Con } S \text{ en el semiplano } R(s) \le g_1 \\ \lim_{s\to\infty} \frac{f_2(s)}{s} = 0 & \text{Con S en el semiplano } R(s) \ge b_1 \end{cases}$$

De (T.4.4) resulta $f(s)$ entera y se tiene:

(T.4.6) $$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$$

Y en todo el plano se tiene el desarrollo:

(T.4.7) $$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k \text{ con } a_k = \frac{1}{2pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{S^{k+1}} ds$$

Donde Γ es una circunferencia de centro el origen y radio r.

Sea $M(r) = \max\limits_{|s|=r} |f(s)|$ se tiene:

$|a_k| \leq \frac{1}{2p} \cdot \frac{M(r)}{r^{k+1}} 2 \cdot p \cdot r$ Y resulta por (T.4.6) $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^k} = 0$ y se deduce que $a_k = 0$. $k \geq 1$.

Por otro lado $f(s) = a_0 = constante$ y como $\lim\limits_{s\to\infty} f_2(s) = 0$. Se concluye que $f(s) = 0$ y por (T.4.4) son idénticamente nulas, las transformadas unilaterales (T.4.2) y por el teorema de unicidad unilateral se tiene $F(-t) = 0$ y $F(t) = 0$ p.p. para $t \geq 0$.

OBSERVACIONES DEL TEOREMA DE LERCH PARA UN INTERVALO INFINITO.

Es conocido que el teorema de Lerch no se satisface si el intervalo no es finito. En este trabajo se estudian las condiciones que debe satisfacer la función $f(x)$, para extender el teorema a un intervalo, consideremos la función: $f(x) = e^{-ax^{a}}\,\mathrm{sen}(bx^{a})$, con $(a > 0, a > 0, b > 0)$; $f(x)$ tiene todos su momentos en $[0, \infty)$.

$$m_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^{a}}\,\mathrm{sen}(bx^{a})dx$$

Tomando el cambio $t = x^{a}$ se tiene:

$$m_n = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} x^{\frac{n+1}{a}-1}\cdot e^{-at}\,\mathrm{sen}(bt)dt = -\frac{1}{a} I_M\left[\int_0^{\infty} x^{\frac{n+1}{a}-1}\cdot e^{-(a+ib)t}\right]dt = -\frac{1}{a} I_M\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{a}\right)}{(a+ib)\cdot\frac{n+1}{a}}\right]$$

$m_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$ Sii $(a+ib)^{\frac{n+1}{a}}$ es real.

Pero: $(a+ib)^{\frac{n+1}{a}} = \left[(a+ib)^{\frac{1}{a}}\right]^{n+1}$, por lo tanto $m_n = 0$ si y solo si $(a+ib)^{\frac{1}{a}}$ es real. Sea $a + ib = r\cdot e^{iq}$ con $r > 0 \quad \wedge \quad 0 < q < \frac{p}{2}$; para que la expresión $r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{iq}{a}}$ sea real. Una condición necesaria y suficiente es que: $q = kpa$, $k \in \mathrm{Z} - \{0\}$ y este entero debe ser tal que: $0 < kpa < \frac{p}{2}$; es decir $0 < k < \frac{1}{2a}$, como $k \in Z - \{0\}$ se tiene que $\frac{1}{2a} > 1 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$ y: $a = r \cdot \cos(kpa)$, $b = r \cdot \operatorname{sen}(kpa)$.

Por ejemplo:

Sí $a = \frac{1}{4}$, $k = 1 \wedge r = \sqrt{2}$. Se tiene $a = b = 1$.

Luego: $\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt[4]{x}} \operatorname{sen}\sqrt[4]{x}\,dx = 0$. $n = 0,1,2\ldots$ Y esto resuelve el ejemplo de Stieltjes.

Y hemos obtenido infinitas funciones con momentos nulos que satisfacen el siguiente teorema.

TEOREMA 1:

La función: $f(x) = e^{-ax^a} \operatorname{sen}(bx^a)$, $a > 0, a > 0, b > 0$

Tiene en $[0,\infty)$ todos sus momentos nulos si y solo si se satisface:

$0 < a < \frac{1}{2}$, $a = r \cdot \cos(kpa)$, $b = \operatorname{sen}(kpa)$ Con $r > 0$ y $k \in Z - \{0\}$ que verifica la relación $0 < k < \frac{1}{2a}$.

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-ax^a} \cos(bx^a)$, $(a > 0, a > 0, b > 0)$, para $x \in [0,\infty)$ se tiene:

$$m_n = \int_0^\infty x^n \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-ax^a} \cos(bx^a)\,dx = \frac{1}{a} R_E \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2a}\right)}{(a+ib)^{\frac{2n+1}{2a}}} \right]$$

$m_n = 0$, $\mathrm{n} = 0,1,2\ldots$ Si y solamente si $(a+ib)^{\frac{1}{2a}}$ es imaginario puro y: $r^{\frac{1}{2a}} \quad e^{\frac{iq}{2a}}$ con $r > 0$ $.0 < q < \frac{p}{2}$ una condición necesaria y suficiente es que $q = (2k+1)p\,a$, y $0 < (2k+1)p\,a < \frac{p}{2}$ esto es $0 \le k < \frac{1}{4a} - \frac{1}{2}$. Se sigue que $\frac{1}{4a} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$ y se ha probado el siguiente teorema.

TEOREMA 2:

Dada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-ax^a} \cos(bx^a)$, $(a > 0, a > 0, b > 0)$ $f(x)$ tiene momentos nulos en $[0,\infty)$ si y solo sí$0 < a < \frac{1}{2}$, $a = \cos[(2k+1)p\,a]$, $\mathrm{b} = \mathrm{sen}[(2\mathrm{k}+1)p\,a]$, con $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, que verifica la relación $0 \le k < \frac{1}{4a} - \frac{1}{2}$.

EXTENSION DEL TEOREMA DE LERCH A INTERVALO INFINITO.

T.4) TEOREMA:

Sea $f(x)$ localmente sumable en $[0,\infty)$ y $\int_0^\infty x^n f(x)dx$ $(n = 0,1,2\ldots)$ es uniformemente convergente respecto a "n" entonces $\exists\ l > 0$ tal que $F(x) \underset{p.p.}{=} 0$ en$[l,\infty)$.

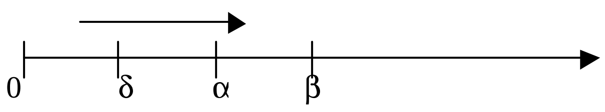
Demostración:

Pongamos $C_n = \int_0^\infty x^n f(x)dx$ $(\mathrm{n} = 0,1,\ldots)$

Por el criterio de Cauchy, $\forall e > 0$ $\exists d(e) > 0$; tal que:

i) $d < a < b \Rightarrow \left|\int_a^b x^n f(x)dx\right| < e$

Comenzaremos la demostración suponiendo que $f(x)$ es continua en$[0,\infty)$, sea $l = 1 + d$ y veamos que en $[l,\infty)$, no existe ningún intervalo $[a,b]$ en el cual se tenga $f(x) > 0\big(f(x) < 0\big)$.



De hecho si existiera tal intervalo $[a,b]$, sea $m>0$ $m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$ se tendría:

ii) $$\int_a^b x^n f(x)dx > m\int_a^b x^n f(x)dx > mx^a(b-a)$$

Como $f(x)>0$ en $[a,b]$; por (i) se tiene $\int_a^b x^n f(x)dx < e$ y comparando con (ii) se tiene $ma^n(b-a)<e$, pero esto es un absurdo ya que se tiene $a \geq l > 1$. Contradicción que proviene de haber supuesto la existencia del intervalo $[a,b]$ tal que $f(x)>0$. Por lo tanto $f(x)=0 \quad \forall x\in[l,\infty)$.

Pasamos ahora al caso general en el cual $f(x)$ es localmente sumable en $[0,\infty)$, para $n\geq 1$. Integrando por parte se tiene que $\forall a>0$.

$$\int_a^b x^n f(x)dx = a^n F(a) - n\int_0^a x^{n-1}F(x)dx$$; donde:

iii) $$F(x) = -\int_x^\infty f(t)dt \;\wedge\; F(0) = -C_0$$

La ecuación (iii) se puede escribir de la siguiente forma:

$$a^n F(a) = -a\int_a^\infty f(t)dt = -\int_a^\infty x^n\left(\frac{a}{x}\right)^n f(x)dx$$

Se puede escoger un b tal que:

iv) $$a^n F(a) = -\int_a^\infty x^n f(x)dx$$

Ya que $\left|\dfrac{a}{x}\right|^n \leq 1. \quad \forall x \in [a,\infty)$. De (iii) y (iv) se tiene:

v) $$\int_0^a x^{n-1}F(x)dx = -\frac{1}{n}\int_0^b x^n f(x)dx$$

Para $a \to \infty \;\wedge\; b \to \infty^-$ se tiene que:

vi) $$\int_0^\infty x^{n-1}F(x)dx = -\frac{1}{n}\int_0^\infty x^n f(x)dx = -\frac{C_n}{n}$$

Las Integrales $\int_0^\infty x^{n-1}F(x)dx$ son uniformemente convergentes. De este hecho y la continuidad de $F(x)$ resulta que $\exists\ [l,\infty)$ para el cual $F(x)=0$; lo que implica que $f(x)=0 \quad \forall x \in [l,\infty)$.

Se ha demostrado un teorema que extiende el teorema de Lerch.

T.5) TEOREMA:

Sea $f(x)$ localmente sumable en $[0,\infty)$, sí las integrales $\int_0^\infty x^n f(x)dx \quad (n=0,1,2,...)$ son convergente uniformemente respecto a "n", resultando $\int_0^\infty x^n f(x)dx = 0$, $(n=0,1,2,...)$, entonces $f(x)=0$ p.p. en $[0,\infty)$.

Demostración:

Sabemos por T.1) que $f(x)=0$ p.p. en $[l,\infty)$ para un cierto valor de l, y como $\int_0^\infty x^n f(x)dx = 0$, $(n=0,1,2,...)$, se tiene:

$$\int_0^\infty x^n f(x)dx = \int_0^l x^n f(x)dx + \int_l^\infty x^n f(x)dx$$

Y se tiene que:

$$\int_0^l x^n f(x)dx = 0 \qquad (n=0,1,\ldots)$$

Por el teorema finito de Lerch se tiene que $f(x)=0$ p.p. en $[0, l]$ y por lo tanto se tiene: $f(x)=0$ p.p. para $x\in[0,\infty)$.

T.6) TEOREMA:

Sea $f(x)$ localmente sumable en $(-\infty,\infty)$, sí las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$ $(n=0,1,2,...)$ son convergentes uniformemente respecto a "n", resultando $\int_{0}^{\infty} x^n f(x)dx = 0$, $(n=0,1,2,...)$, entonces $f(x)=0$ p.p. en $(-\infty,\infty)$.

Demostración:

De las hipótesis tenemos que $\int_{-\infty}^{0} x^n f(x)dx$ y $\int_{0}^{\infty} x^n f(x)dx$ son convergentes uniformemente respecto a "n" por separados. Por T1) sabemos que:

$$\int_{0}^{\infty} x^n f(x)dx = C_n$$

Y por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{0} x^n f(x)dx = -C_n$$

Esto es:

$$\int_{0}^{\infty} x^n f(-x)dx = (-1)^{n+1}C_n \qquad n=0,1,\ldots$$

Por T.1) $\exists$ $l>0$, $m>0$ tal que: $f(x)=0$ p.p. en $(-\infty,-l]\cup[m,\infty)$ y como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = 0$$

Se tiene que:

$$\int_{-l}^{l} x^n f(x)dx = 0 \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Y por el Teorema finito de Lerch se tiene que $f(x) = 0$ p.p. en $[-l, m]$, lo que implica que $f(x) = 0$ p.p. en $(-\infty, \infty)$.

T.7) TEOREMA:

La función $f(x)$ verifica las siguientes hipótesis:

(1) $f(x) \in L^1_{Loc}[0, \infty)$

(2) $f(x) = 0\left(e^{-a\sqrt{x}}\right)(x \to \infty), (a > 0)$

(3) $\int_{0}^{\infty} x^n f(x)dx = 0 \qquad n = 0,1,2,\dots$

Entonces $f(x) = 0$ p.p. en $[0, \infty)$

Demostración:

La demostración es basada en el hecho de que el sistema ortonormal $\left\{e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} A_n(x)\right\}_{n=0,1..}$ [con $A_n(x)$ polinomios de grado n en x] obtenido al ortonormalizar $\{x^n\}_{n=0,1...}$ respecto a la función peso $e^{-\sqrt{x}}$ es completo en $L^2_{[0,\infty)}$ “Ver [2] pág. 22”.

De la hipótesis (2) se desprende directamente la existencia de dos números $M > 0$, $\mathrm{X} > 0$ tales que:

i) $|f(x)| \leq M e^{-a\sqrt{x}}$, para $x > \mathrm{X}$

Dividiendo la demostración en dos partes:

<u>I Parte:</u>

Supongamos la continuidad de $f(x)$ en $[0,\infty)$, también la función $j(x) = e^{\frac{a\sqrt{x}}{2}} f(x)$ es continua en $[0,\infty)$ se puede observar que:

$|j(x)|^2 = \left| e^{a\sqrt{x}/2} f(x) \right|^2 \leq M^2 e^{-a\sqrt{x}}$ para que $x > \mathrm{X}$, es decir $j(x) \in L^2_{[0,\infty)}$ y por la hipótesis (3) se tiene:

ii) $$\int_0^\infty x^n e^{-\frac{a\sqrt{x}}{2}} j(x)dx = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Pongamos $x = \dfrac{t}{a^2}$, $j\left(\dfrac{t}{a^2}\right) = \Psi(t) \in L^2_{[0,\infty)}$; entonces (ii) se transforma en:

iii) $$\int_0^\infty t^n e^{-\sqrt{t}/2} \Psi(t)dt = 0 \quad , \; n = 0,1,\ldots$$

Y como el sistema ortonormal $\left\{ e^{-\frac{\sqrt{t}}{2}} A_n(t) \right\}_{n=0,1\ldots}$ es completo, se tiene que $\Psi(t) = 0$ y como $f(x) = e^{-\frac{a\sqrt{x}}{2}} \Psi(a^2 x)$ se tiene que $f(x) = 0$.

II Parte:

Pasamos al caso general; sabemos que existe $F(x)$ tal que:

iv) $$F(x) = -\int_x^\infty f(t)dt$$

Queremos ver que fijado b $(0 < b < a)$ se tiene:

v) $$F(x) = o\left(e^{-b\sqrt{x}}\right) \quad (x \to \infty)$$

En efecto, para $x \geq X$ por (i) y (iv) se tiene:

vi) $$\left|e^{b\sqrt{x}} F(x)\right| \leq e^{b\sqrt{x}} \int_x^\infty |f(t)dt| \leq M e^{b\sqrt{x}} \int_x^\infty e^{-a\sqrt{t}} dt$$

vii) $$\Rightarrow |f(x)| \leq M \int_x^\infty e^{-a\sqrt{t}} dt$$

Por otro lado tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty e^{-a\sqrt{t}} dt}{e^{-b\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-a\sqrt{x}}}{-e^{-b\sqrt{x}}\left(b/2\sqrt{x}\right)} = \frac{2}{b} \lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x} \cdot e^{-(a-b)x}\right] = 0$$

Y así se satisface (v). Además, $F(x)$ es continua en $[0,\infty)$, $x^n F(x) \in L^2_{[0,\infty)}, n = 0,1,\ldots$ entonces:

$$\int_0^\infty x^n F(x)dx = -\int_0^\infty x^n dx \int_0^\infty f(t)dt = -\int_0^\infty f(t)dt \int_0^t x^n dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^\infty t^{n+1} f(t)dt$$

Y por la hipótesis 3) se tiene:

$$\int_0^\infty x^n F(x)dx = 0 \qquad n = 0,1,2\ldots$$

Por lo tanto $F(x) = 0$ y se tiene: $f(x) = 0$ p.p.

EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE LERCH A TODO $\Re$.

En [2] pág. 30 se demuestra el siguiente resultado.

El sistema $\left\{ e^{-a|x|^{\frac{\alpha}{2}}} A_n(x) \right\}_{n=0,1,\ldots}$ $a > 0, \alpha > 0$, $A_n(x)$ polinomio de grado n obtenido al normalizar $\{x^n\}_{n=0,1,\ldots}$ en $(-\infty, \infty)$, respecto a la función piso $e^{-a|x|^{\alpha}}$, es completo en $L^2_{(\Re)}$ sí y solo sí $\alpha \geq 1$.

Teniendo en cuenta este resultado, extenderemos el teorema de Lerch a $\Re$.

T.8) TEOREMA:

La función $f(x)$ verifica las siguientes hipótesis:

1. $f(x) \in L^1_{Loc}(\Re)$

2. $f(x) = O\left(e^{-a|x|}\right)$ $\left(|x| \to \infty\right)$ $(a > 0)$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = 0$. $n = 0,1,..$

Entonces $f(x) = 0$ en $\Re$.

Demostración:

Como (2) $f(x) = 0\ \left(e^{-a|x|}\right)\ \left(|x| \to \infty\right)$ se tiene que existe $M > 0, \mathrm{X} > 0$ tal que:

i) $|f(x)| \leq M \cdot e^{-a|x|}$. Para $|x| > \mathrm{X}$.

En (3) hagamos $n = 0$ y pongamos:

ii) $F(x) = -\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{\infty} f(t)dt$

Para $x > \mathrm{X}$ se tiene:

iii) $|f(x)| \leq \frac{M}{a} \cdot e^{-a|x|}$

Además como: $x^n f(x) \in L^1_{(\Re)}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ e integrando por partes tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = f(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1} f(x)dx$$

De (iii) y la hipótesis 3) se tiene:

iv) $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = 0 \quad n = 0,1,2\ldots$

Introduciendo la función:

$$j(x) = e^{\frac{a|x|}{2}} \cdot F(x)$$

Se observa que $j(x) \in L^2(\Re)$. La ecuación (iv) se puede escribir como:

v) $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{a|x|}{2}} j(x)dx = 0 \quad (n = 0,1,2\ldots)$

Como $L^2(\Re)$ es completo y por el teorema antes mencionado "ver [2]" se tiene:

$j(x) = 0$

Puesto que $F(x) = e^{-\frac{a|x|}{2}} j(x) = 0$ se tiene: $F(x) = 0$ y por (iii) se tiene $f(x) = 0$ en $\Re$.

EJEMPLO DE FUNCION CON TODOS SUS MOMENTOS NULOS EN $\Re$.

Sea $f(x) = e^{-a|x|^{a}} \cos\left(b|x|^{a}\right)$ $(a > 0, a > 0, b > 0)$ tiene todos sus momentos nulos en $\Re$ sí $0 < a < 1$, $a = r \cdot \cos\left[(2k+1)\frac{p}{2}a\right]$, $b = r \cdot \mathrm{sen}\left[(2k+1)\frac{p}{2}a\right]$ donde $r > 0, k \in \mathrm{N}$, tal que $0 < 2k+1 < \frac{1}{a}$.

DEMOSTRACION:

Se tiene: $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} f(x)dx = 0$, además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} x^{2n} f(x)dx = \frac{2}{a}\int_{0}^{\infty} t^{\frac{2n+1}{a}-1} e^{-at} \cos(bt)dt = \frac{2}{a} R_e\left[\frac{\frac{\Gamma(2n+1)}{a}}{(a+ib)^{\frac{2n+1}{a}}}\right]$$

Nos interesa ver cuando el valor principal de la potencia $(a+ib)^{\frac{1}{a}}$ es imaginario puro, es decir: $a + ib = re^{ij}$,$\left(r > 0, \quad 0 < j < \frac{p}{2} \right)$. La potencia $(a+ib)^{\frac{1}{a}} = r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{ij}{a}}$ es imaginaria pura y se tiene inmediatamente la tesis, es decir $f(x)$ tiene momentos nulos en $\Re$.

EJEMPLO 2:

La función $f(x) = |x| e^{-a|x|^{a}} \operatorname{sen}(b|x|^{a})$, $(a > 0, a > 0, b > 0)$ tiene en $\Re$ todos sus momentos nulos sí $0 < a < 1$, $a = r \cos\left(\frac{kp}{2} a\right)$, $b = r \operatorname{sen}\left(\frac{kp}{2} a\right)$, donde $r > 0, k \in \mathrm{N}$ tal que $0 < k < \frac{1}{a}$.

2. UN TEOREMA DE COMPLETITUD SOBRE EL INTERVALO $[0,\infty)$.

Dada la sucesión $\{j_n(x)\}_{n=0,1,...}$ $x\in[0,\infty)$ linealmente independientes de clase $C^2[0,\infty)$. Supongamos que satisfacen las hipótesis:

2.1. $j_n(0)=0$

2.2. $j_n'(x)\geq 0 \qquad j''(x)\geq 0$

2.3. $\exists$ $c>0: \lim_{n\to\infty} j_n(x)=\lim_{n\to\infty} j'(x)=+\infty \ ,(x>c)$

La idea central de todo este desarrollo es extender conceptualmente los teoremas antes mencionados y el concepto de momento de una función con respecto al sistema $j_n(x)$. Evidentemente que la sucesión $\{x^n\}_{n=0,1,....}$ satisface las 3 hipótesis dadas.

Definición:

Para toda función $f(x)\in L_{Loc}[0,\infty)$ y para todo intervalo $[a,b]\subset[0,\infty)$ tienen sentido las integrales:

2.4. $m_n=\int_a^b f(x)j_n(x)dx \quad n=0,1,...$

Llamados los momentos de la función $f(x)$ respecto al sistema $\{j_n(x)\}_{n=1,...}$ en el intervalo $[a,b]$.

Así podemos extender conceptualmente el teorema de Lerch a un sistema $\{j_n(x)\}$ linealmente independiente.

TEOREMA DE EXTENSION CONCEPTUAL AL TEOREMA DE LERCH.

T.9) Sea $f(x) \in L_{Loc}[0,\infty)$ y las integrales

$$\int_0^\infty f(x) j_n(x) dx \stackrel{..}{=} \lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x) j_n(x) dx$$

Son uniformemente convergentes respecto a "*n*". Sí $\int_0^\infty f(x) j_n(x) dx = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad x \in [0,\infty)$.

La hipótesis de la convergencia uniforme respecto a n es:

2.5. $\forall e > 0, \exists d(e) > 0 \quad , d(e) < a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) j_n(x) dx \right| < e \qquad n = 1,2 \ldots.$

Para demostrar este teorema primero demostraremos dos lemas auxiliares.

LEMA I:

Si $f \in L_{Loc}[0,\infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x) j_n(x)dx = \lim\limits_{a \to \infty} \int_0^{a} f(x) j_n(x)dx$ son uniformemente convergentes respecto a "n", entonces $\int_0^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

DEMOSTRACION:

Como $\{j_n\}$ son LI, se tiene que $j_n(x) \neq 0.\ \forall n$. Fijado $j_v(x)$ no decreciente, podemos fijar un punto x_v tal que $j_v(x_v) > 0$. Para $x \geq x_v$, por hipótesis tenemos que:

$\forall e > 0, \quad \exists\ d_e > 0 \qquad\qquad d_e < a < b$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) j_n(x)dx \right| < e \ \ .\ \ n = 1,2,3....$$

Sea $d_e > x_v$ y $x_v < d_e < a < b$, se puede escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x) j_v(x) \cdot \frac{1}{j_v(x)} dx$$

Pero: $0 < \dfrac{1}{j_v(x)} < \dfrac{1}{j_v(a)}$ y por el T.V.M. se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{j_v(a)} \int_a^g f(x) j_v(x)dx$$

Donde g es un punto de $[a, b]$.

Si $g = b$ en (2.5) tenemos:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \frac{1}{j_v(a)}e < \frac{e}{j_v(x_v)}$$ l.q.q.d.

LEMA II:

La función $f(x)$ es continua en $[0,\infty)$ y las integrales $\int_0^{\infty} f(x) j'_n(x)dx \quad (n = 1,2,..)$ son uniformemente convergentes respecto a "n"; es decir:

$$\forall e > 0:\ de < a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) j'_n(x)dx \right| < e$$

Entonces $f(x)$ es nula para *"x"* bastante grande.

DEMOSTRACION:

Fijado $e > 0$, escogemos d_e tal que: $d_e > c$, donde c está definido (2.3) y para $\forall x > d_e$ se tiene que: $\lim_{n\to\infty} j'_n(x) = +\infty$.

Veamos que en $(d_e, +\infty)$ no puede existir ningún sub–intervalo $[a_e, b_e]$ en el cual se tenga $f(x) > 0$ [ó $f(x) < 0$], basta considerar el primer caso.

Supongamos la existencia de $(d_e, +\infty)$ un sub–intervalo en el cual se tenga $f(x) > 0$, con $f(x)$ continua, entonces $f(x)$ tiene un mínimo $m_e > 0$ y para todo $j'_n(x) \geq 0$ no decreciente, se tiene:

$$e > \int_{a_e}^{b_e} f(x) j'_n(x)dx \geq m_e j'_n(a_e)\cdot(b_e - a_e)$$

O sea: $j'_n(a_n) < \dfrac{e}{m_e(b_e - a_e)}$ *n=1,2...*

Pero este resultado es absurdo porque $\lim_{n\to+\infty} j_n'(x) = +\infty$.

DEMOSTRACION DE (T.8).

Sea (T.8.1): $F(x) = -\int_x^{+\infty} f(t)dt$

Por el Lema I, se puede encontrar una sucesión $j_n(x)$ con $j_n(0) = 0$, tal que:

(T.8.2) $\int_0^a f(x)j_n(x)dx = F(a)j_n(a) - \int_0^a F(x)j_n'(x)dx$ Basta con hacer una integración por parte de: $\int_0^a f(x)j_n(x)dx, a > 0$.

Sea $a > c$ y $n \geq v$, se tiene: $j_n(x) > 0$. $\forall x \geq a$ y por lo tanto de (T.8.1).

$$F(a)j_n(aç) = -j_n(a)\int_a^{\infty} f(x)dx = -\int_a^{+\infty} \frac{j_n(a)}{j_n(x)} f(x)j_n(x)dx. \quad n \geq v$$

Como $\frac{j_n(a)}{j_n(x)}$ es no creciente y se tiene: $0 < \frac{j_n(a)}{j_n(x)} \leq 1$. Y aplicando el T.V.M. para integrales, se tiene:

$$F(a)j_n(a) = -\int_a^b f(x)j_n(x)dx \text{. Donde } \quad b \in [a, +\infty).$$

Sustituyendo en (T.8.2) se tiene:

(T.8.3) $$\int_0^a F(x)j_n'(x)dx = -\int_a^b f(x)j_n(x)dx - \int_0^a F(x)j_n'(x)dx \qquad (n > v, b > a)$$

O sea:

(T.8.4) $\quad \mathrm{L}\int_0^a F(x)\varphi_n'(x)dx = -\int_0^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n > v, b > a)$

Cuando $a \to \infty$, el segundo miembro tiende por hipótesis a $\int_0^{+\infty} f(x)\varphi_n(x)dx$ uniformemente respecto a n y la integral de primer miembro $\int_0^{\infty} F(x)\varphi_n'(x)dx$ converge uniformemente respecto a "n".

Como $F(x)$ es continua por el Lema II: $F(x) = 0.\ x > 0 \ \Rightarrow f'(x) = 0.\ x > 0$ $\Rightarrow f(x) = 0.\ x > v$, es decir $\exists l > 0$ tal que $f(x) \overset{p.p.}{=} 0.\ x \in [l, +\infty)$ y como $\int_0^{\infty} f(x)\varphi_n(x)dx = 0.\ (n = 1,2,...)$, se tiene que:

$\int_0^{l} f(x)\varphi_n(x)dx = 0.\ (n = 1,2,...)$ Y por el teorema de Lerch, se tiene que $f(x) = 0$ en $[0, l]$. Con lo cual se demuestra el teorema.