

Índice General

1	Funciones Analíticas	1
1.1	Introducción a los Números Complejos	1
1.1.1	Historia	1
1.1.2	Definición de los Números Complejos	2
1.1.3	Raíces de Ecuaciones Cuadráticas	4
1.1.4	Unicidad de los Números Complejos	5
1.1.5	Ejemplos Desarrollados	5
1.2	Propiedades de los Números Complejos	6
1.2.1	Interpretación Geométrica de la Multiplicación	6
1.2.2	Propiedades Varias	10
1.2.3	Ejemplos Desarrollados	13
1.3	La Proyección Estereográfica	15
1.4	Algunas Funciones Elementales	21
1.4.1	La Función Exponencial	21
1.4.2	La Función Logaritmo	23
1.4.3	Las Funciones Trigonométricas	27
1.4.4	Potencias Complejas	28
1.4.5	La Función Raíz n-ésima	29
1.4.6	Ejemplos Desarrollados	30
1.5	Funciones Analíticas	33
1.5.1	Topología y Continuidad en \mathbb{C}	33
1.5.2	Diferenciabilidad	35
1.5.3	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	36
1.5.4	Conformalidad	39
1.5.5	Ecuaciones de Cauchy-Riemann en Coordenadas Polares	41
1.5.6	Teorema de la Función Inversa	43
1.5.7	Conjuntos Conexos	43
1.5.8	Ejemplos Desarrollados	44
1.6	Diferenciación de las Funciones Elementales.	45
1.6.1	La Exponencial y el Logaritmo	45
1.6.2	Las Funciones Trigonométricas	47
1.6.3	La Función Potencia	48
1.6.4	La Función Raíz n-ésima	48
1.6.5	Ejemplos Desarrollados	49

2	Integración	53
2.1	Integrales Sobre Curvas	53
2.1.1	Propiedades Básicas	53
2.1.2	Ejemplos Desarrollados	58
2.2	Teorema de Cauchy. Versión Intuitiva	60
2.2.1	Demostración Usando el Teorema de Green	60
2.2.2	Regiones Simplemente Conexas	63
2.2.3	Independencia de Trayectorias y Antiderivadas	63
2.2.4	El Logaritmo	65
2.2.5	Ejemplos Desarrollados	66
2.3	Teorema de Cauchy. Versión Rigurosa	69
2.3.1	Versiones Locales	69
2.3.2	Homotopía y Regiones Simplemente Conexas	74
2.3.3	Teorema de Cauchy	76
2.3.4	Ejemplos Desarrollados	81
2.4	Fórmula Integral de Cauchy	85
2.4.1	Índice de una Curva Cerrada	85
2.4.2	Fórmula Integral de Cauchy	87
2.4.3	Las Funciones Analíticas son \mathcal{C}^∞	88
2.4.4	Desigualdades de Cauchy y el Teorema de Liouville	91
2.4.5	Teorema Fundamental del Algebra	92
2.4.6	Ejemplos Desarrollados	93
2.5	Teorema del Máximo Modulo. Funciones Armónicas	95
2.5.1	Funciones Armónicas	97
2.5.2	Propiedad del Valor Intermedio y Principio del Máximo para Funciones Armónicas	99
2.5.3	Ejemplos Desarrollados	101
3	Series	103
3.1	Convergencia de Series	103
3.1.1	Definiciones Básicas	103
3.1.2	Convergencia Uniforme	108
3.1.3	Ejemplos Desarrollados	113
3.2	Teorema de Taylor	115
3.2.1	Series de Potencias	115
3.2.2	Teorema de Taylor	119
3.2.3	Ejemplos Desarrollados	122
3.3	Series de Laurent. Clasificación de Singularidades	124
3.3.1	Series de Laurent	124
3.3.2	Clasificación de Singularidades	128
3.3.3	Ejemplos Desarrollados	133
3.4	Teorema del Residuo. Integrales Definidas	136
3.4.1	Teorema del Residuo	136
3.4.2	Integrales Definidas	137

Capítulo 1

Funciones Analíticas

1.1 Introducción a los Números Complejos

1.1.1 Historia

Los números reales aparecen al tratar de resolver ecuaciones como

$$x^2 - 2 = 0,$$

o equivalentemente, al tratar de encontrar $\sqrt{2}$. Análogamente, los números complejos surgen de ecuaciones como

$$x^2 + 1 = 0.$$

Para la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$, la fórmula cuadrática da como soluciones

$$x = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

En general, para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como en el ejemplo anterior, en muchos casos $b^2 - 4ac$ puede ser un número negativo.

Cardano (siglo XVI) observó que si estos números de la forma $\alpha + \sqrt{\beta}$ se trataban como números ordinarios con la operación adicional $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ todas las ecuaciones cuadráticas se podían resolver.

La fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ incluye ya un símbolo ‘ i ’ para $\sqrt{-1}$. Pero no fue sino hasta el siglo XIX con Gauss y otros que el significado de los números complejos fue entendido claramente.

La teoría de las funciones analíticas fue desarrollada principalmente por Cauchy y subsecuentemente por Dirichlet, Weierstrass y Riemann.

La búsqueda de un método para describir la conducción del calor influyó para que se desarrollara la teoría. Destacan la hidrodinámica y la electrostática como ramas importantes de la física donde se aplica la Variable Compleja.

Las funciones analíticas también son útiles para el análisis real, por ejemplo, para probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2},$$

o que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Demostrar estas identidades es difícil o imposible usando el cálculo real, sin embargo, con el uso del análisis complejo, se pueden obtener fácilmente.

1.1.2 Definición de los Números Complejos

Definición 1.1. El conjunto de los números complejos, denotado por \mathbb{C} , consiste en todos los números de la forma $a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación. Existe una correspondencia biunívoca de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 mediante la asociación

$$x + iy \longrightarrow (x, y).$$

Por ende, se pueden identificar a los números complejos con los puntos del plano.

Se designará como *parte real* del número complejo $a + ib$ al número real a , y como *parte imaginaria* al número real b . De esta manera, al eje X se le llamará *eje real* y al eje Y se le llamará *eje imaginario*.

Notación. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, se escribirá:

$$\operatorname{Re} z = x, \text{ e } \operatorname{Im} z = y.$$

Se definirá un producto en \mathbb{C} que permitirá entender a la unidad imaginaria i como $\sqrt{-1}$.

Definición 1.2. Se define una operación de suma y multiplicación escalar en \mathbb{C} como sigue:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ a(x + iy) &= ax + iay, \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Obsérvese que estas operaciones coinciden con las de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial).

También se define una operación de multiplicación como sigue:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Para recordar esta definición es útil recordar que queremos $i^2 = -1$.

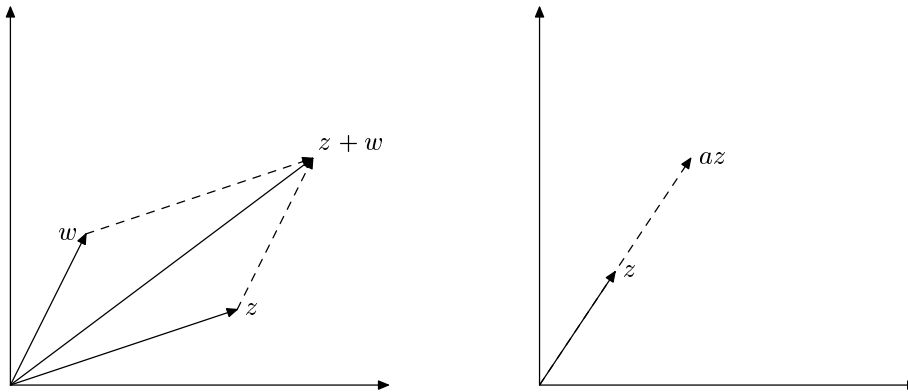


Figura 1.1: Interpretación geométrica de suma y multiplicación escalar

El significado geométrico de la suma y de la multiplicación escalar es el usual en espacios vectoriales. El significado geométrico de la multiplicación se discutirá después. La multiplicación de números complejos es conmutativa, asociativa y distributiva. Probamos aquí la primera propiedad y las otras dos quedan como ejercicio.

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, entonces

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = z_2 z_1.$$

Como se ve en esta igualdad, dichas propiedades son consecuencia de las mismas propiedades de los números reales.

Observación. Los números complejos son una extensión de los números reales: si $x \in \mathbb{R}$, $x + 0i \in \mathbb{C}$ y viceversa; por lo que se puede escribir $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ahora, dado $z \in \mathbb{C}$, queremos ver que tiene inverso multiplicativo. Por supuesto, se requiere $z \neq 0$. Si $z = a + ib$, se busca $z' = x + iy$ tal que $zz' = 1$. Es decir

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene como única solución

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

A z' se le designa como z^{-1} ó $\frac{1}{z}$.

Observación. Es útil dividir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Consecuentemente, \mathbb{C} es un campo con respecto a las operaciones de suma y producto. La suma es conmutativa y asociativa, el neutro aditivo es el $0 = 0 + i0$ y dada $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $-z = -x - iy$ es el inverso aditivo de z . El producto, como ya se mencionó, es conmutativo, asociativo y distributivo con respecto a la suma, el neutro multiplicativo es el $1 = 1 + i0$, y el inverso fue descrito en el párrafo anterior.

1.1.3 Raíces de Ecuaciones Cuadráticas

Teorema 1.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$. Obsérvese que tambi'en $(-w)^2 = z$.*

Usando coordenadas polares, el teorema puede ser demostrado fácilmente, sin embargo, primero lo probaremos algebraicamente.

DEMOSTRACIÓN. Si $z = a + ib$, $z \neq 0$, se busca $w = x + iy$ tal que $w^2 = z$, i. e. $(x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib$. Esto nos da el sistema

$$x^2 - y^2 = a \quad (1.1)$$

$$2xy = b. \quad (1.2)$$

Escribiendo

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2,$$

se obtiene

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

por lo cual, combinando esta ecuación con (1.1), obtenemos

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Si $b > 0$, (1.2) da como soluciones

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right).$$

Si $b < 0$, las soluciones son

$$w = \pm \left(-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right). \quad \blacksquare$$

1.1.4 Unicidad de los Números Complejos

Teorema 1.2. *Sea \mathbf{F} un campo que contiene a los reales y para el cual, toda ecuación cuadrática tiene solución, entonces \mathbf{F} contiene a \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $j \in \mathbf{F}$ solución a $x^2 + 1 = 0$. Afirmamos que

$$\mathcal{A} = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbf{F}$$

es isomorfo a \mathbb{C} .

Sea $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{F}$ dada por $\Phi(a + ib) = a + jb$. Claramente Φ es un homomorfismo de \mathbb{C} en \mathbf{F} , y $\Phi(\mathbb{C}) = \mathcal{A}$. Basta ver, entonces, que Φ es inyectiva.

Sean $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$ tales que $\Phi(a_1 + ib_1) = \Phi(a_2 + ib_2)$. Entonces $a_1 + jb_1 = a_2 + jb_2$, de donde $(a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) = 0$. Si $b_1 \neq b_2$ entonces $j = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$ y $x^2 + 1 = 0$ tiene solución real, lo cual es absurdo, de donde $b_1 = b_2$ y $a_1 = a_2$ y \mathbf{F} contiene un subcampo (\mathcal{A}) isomorfo a \mathbb{C} . ■

En un curso más avanzado, se demuestra el teorema de Fröbenius, que dice que si \mathbf{F} es un campo tal que $\mathbb{R} \subseteq \mathbf{F}$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{F} < \infty$, entonces $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbf{F} = \mathbb{C}$.

1.1.5 Ejemplos Desarrollados

1. Demuestre que $\frac{1}{i} = -i$, y que $\frac{1}{i+1} = \frac{1-i}{2}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} &= \frac{1(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{-(-1)} = -i, \\ \frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}. \end{aligned}$$

2. Encuentre la parte real e imaginaria de $\frac{z+2}{z-1}$, donde $z = x + iy$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z-1} &= \frac{x+2+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+2+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} \\ &= \frac{(x+2)(x-1) + y^2 + i[(x-1)y - y(x+2)]}{(x-1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z+2}{z-1} \right) &= \frac{(x+2)(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2}, \\ \operatorname{Im} \left(\frac{z+2}{z-1} \right) &= \frac{-3y}{(x-1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

3. Resolver $x^4 + i = 0$.

Solución. Escribiendo $x^2 = y$, la ecuación se transforma en $y^2 + i = 0$, a la cual se le puede aplicar la fórmula desarrollada para raíces cuadradas, obteniéndose

$$y = \pm \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

Aplicando ahora esta fórmula a $x^2 = y$, se obtiene (tomando $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, y $b = \frac{-1}{\sqrt{2}}$)

$$x = \pm \left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} - i \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} \right), y$$

$$x = \pm \left(\frac{\sqrt{-1 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} + i \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} \right)$$

para el otro valor de y .

En la siguiente sección se desarrollará la fórmula de De Moivre, que permite calcular de manera simple las raíces n -ésimas de un número complejo.

4. Demuestre que para números complejos z y w :

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w.$$

Solución. Si $z = x + iy$ y $w = a + ib$ entonces

$$\operatorname{Re}(z + w) = x + a = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(z + w) = y + b = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w.$$

1.2 Propiedades de los Números Complejos

1.2.1 Interpretación Geométrica de la Multiplicación

Para dar una interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos debemos introducir las coordenadas polares. Como los números complejos pueden ser identificados con los puntos en \mathbb{R}^2 , podemos pensar en ellos como vectores en el plano. Dado un $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, su longitud está dada por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

También se puede medir el ángulo en radianes que hace dicho vector con la parte positiva del eje real. Si denotamos este ángulo como θ , se obtiene la expresión polar de z ,

$$a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta,$$

donde $r = |z|$.

Definición 1.3. Al número r descrito arriba, se le llama *longitud, norma, o valor absoluto de z* y se le denota por $|z|$. Y al ángulo θ se le llama *argumento de z* y se le denota por $\arg z$.

Obsérvese que el argumento no se puede elegir en forma única, aunque, si se quiere, puede tomar valores en $[0, 2\pi)$ (o en $(0, 2\pi]$).

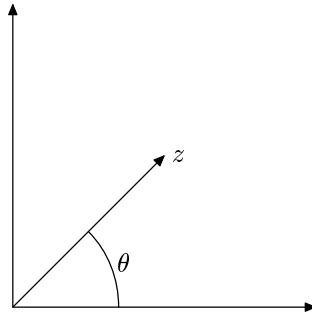


Figura 1.2: El argumento de z .

Teorema 1.3. Para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- i) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- ii) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$.

DEMOSTRACIÓN. Escribiendo

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \text{ y } z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

se tiene

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Esta igualdad demuestra el teorema. En cuanto a ii), el argumento de $z_1 z_2$ es la suma de los argumentos de z_1 y z_2 . Si estos suman más de 2π , la igualdad ii) es cierta módulo 2π . ■

Ejemplo.

$$\begin{aligned} (-i)(-i) &= -1 \text{ y } \arg(-i) = \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} &= 3\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

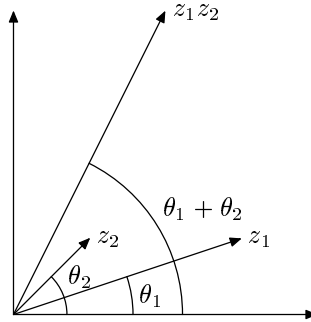
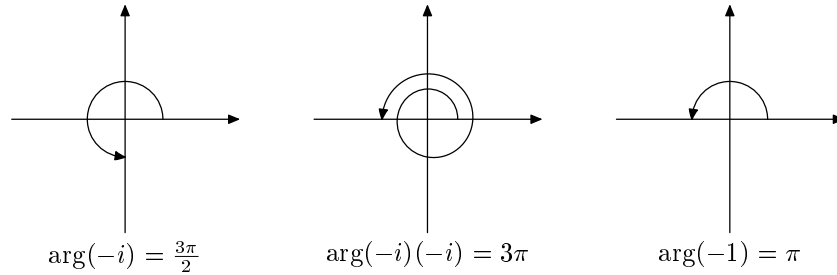


Figura 1.3: El argumento de un producto.

Figura 1.4: El argumento de $(-i)^2$.

Observación. El teorema 1.3 nos brinda una interpretación geométrica fundamental, multiplicar complejos significa ‘sumar sus ángulos y multiplicar sus normas’.

Existe otra manera geométrica de construir el producto de dos números complejos, usando triángulos semejantes. Los dos triángulos de la figura 1.5 son semejantes ya que sus ángulos son iguales. El vector $z_1 z_2$ es el correcto en dicha figura debido al teorema 1.3 y a que

$$\frac{|z_1|}{1} = \frac{|z_1 z_2|}{|z_2|}.$$

La multiplicación también puede ser analizada de la siguiente manera. Sea $z \in \mathbb{C}$ y defínase $\psi_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\psi_z(w) = wz$, i. e., ψ_z es multiplicar por z , lo cual es rotar un ángulo igual a $\arg z$ en el sentido de las manecillas del reloj y modificar la longitud multiplicándola por $|z|$ (agrandándola o achicándola de acuerdo a $|z| > 1$ o $|z| < 1$).

Por ejemplo, para $z = i$, ψ_i es una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido ‘positivo’.

Observación. ψ_z es una transformación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Esto se sigue

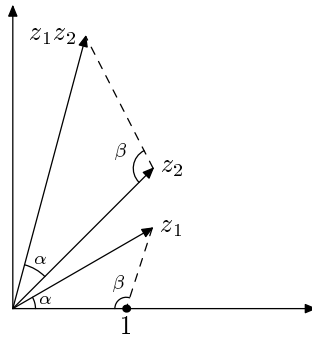
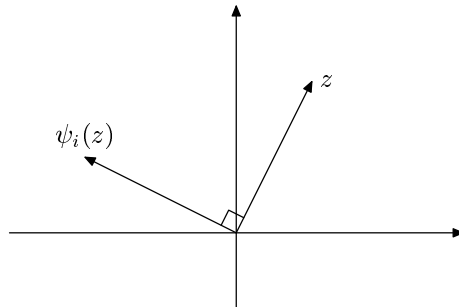


Figura 1.5: El producto de dos números complejos.

de

$$\begin{aligned} \psi_z(\lambda w_1 + \mu w_2) &= (\lambda w_1 + \mu w_2)z = \lambda w_1 z + \mu w_2 z = \lambda \psi_z(w_1) + \mu \psi_z(w_2) \\ \lambda, \mu &\in \mathbb{R}; w_1, w_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Figura 1.6: El efecto de ψ_i .

Observación. Fórmula de De Moivre.

$$\text{Si } z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

La aplicación fundamental de esta fórmula se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.4. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces w tiene exactamente n raíces n -ésimas dadas por la siguiente fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $w = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, se busca $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ tal que $z^n = w$.

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

de donde,

$$\begin{aligned} \rho^n &= r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \therefore \rho &= \sqrt[n]{r} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Todas las posibles soluciones se obtienen tomando $k = 1, 2, \dots, n-1$, puesto que $\frac{\theta + 2k_1\pi}{n}$ y $\frac{\theta + 2k_2\pi}{n}$ establecen la misma solución

$$\begin{aligned} \iff \frac{\theta + 2k_1\pi}{n} &= \frac{\theta + 2k_2\pi + 2mn\pi}{n} = \frac{\theta + 2k_2\pi}{n} + 2m\pi \\ \iff k_1 &= k_2 + mn \iff k_1 - k_2 = mn \iff k_1 \equiv k_2 \pmod{n}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como caso particular, obsérvese que las n raíces de la unidad consisten del 1 y $n-1$ puntos igualmente espaciados en el círculo unitario. (Véanse las figuras 1.7 y 1.9.)

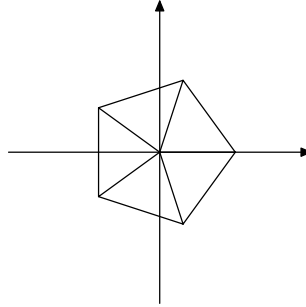


Figura 1.7: Las raíces de $z^5 - 1 = 0$.

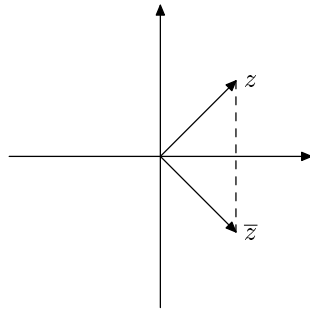
1.2.2 Propiedades Varias

Definición 1.4. Dada $z = a + ib \in \mathbb{C}$ se define el conjugado de z , denotado por \bar{z} , como $a - ib$. Geométricamente, conjugar es reflejar sobre el eje real.

Teorema 1.5. Si $z, w \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

ii) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

Figura 1.8: El conjugado de z .

$$iii) \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

$$iv) z\bar{z} = |z|^2, \text{ y por lo tanto } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ si } z \neq 0.$$

$$v) z = \bar{z} \text{ si y sólo si } z \in \mathbb{R}.$$

$$vi) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$vii) \overline{\bar{z}} = z.$$

DEMOSTRACIÓN.

i) Directo a partir de la definición.

ii) Sean $z = a + ib$ y $w = a' + ib'$, se tiene

$$zw = aa' - bb' + i(ab' + ba')$$

por otro lado,

$$\bar{z}\bar{w} = aa' - (-b)(-b') + i[a(-b') + (-b)a'] = aa' - bb' - i(ab' + ba') = \overline{zw}.$$

iii) Usando ii) se tiene que

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{wz}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}\bar{w},$$

es decir,

$$\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}.$$

$$\text{iv)} \quad z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

v), vi) y vii) se siguen directamente de la definición, por ejemplo:

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.6. Si $z, z' \in \mathbb{C}$

$$\text{i)} \quad |zz'| = |z||z'|.$$

$$\text{ii)} \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

$$\text{iii)} \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

$$\text{iv)} \quad |\bar{z}| = |z|.$$

$$\text{v)} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

$$\text{vi)} \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

$$\text{vii)} \quad |z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \sqrt{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}, \quad (\text{Desigualdad de Cauchy.})$$

DEMOSTRACIÓN.

i) Ya se demostró usando coordenadas polares.

$$\text{ii)} \quad |z'| \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| \frac{z'z}{z'} \right| = |z|.$$

iii) Se sigue del teorema de Pitágoras.

iv) Trivial.

v) Esta es la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z'\bar{z}) + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z'z| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

vi) $|z| = |z - z' + z'| \leq |z - z'| + |z'|$, de donde $|z| - |z'| \leq |z - z'|$. Análogamente, $|z'| - |z| \leq |z - z'|$.

vii) Se demuestra de una forma bastante más complicada que las anteriores.

Sean

$$v = \sum_{k=1}^n |z_k|^2, \quad t = \sum_{k=1}^n |w_k|^2, \quad s = \sum_{k=1}^n z_k w_k, \quad y \quad c = \frac{s}{t},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n |z_k - c\bar{w}_k|^2 = \sum_{k=1}^n (z_k - c\bar{w}_k)(\bar{z}_k - \bar{c}w_k) \\ &= \sum_{k=1}^n z_k \bar{z}_k - c \sum_{k=1}^n \bar{w}_k z_k - \bar{c} \sum_{k=1}^n z_k w_k + c\bar{c} \sum_{k=1}^n w_k \bar{w}_k \\ &= v - c\bar{s} - \bar{c}s + |c|^2 t = v - 2 \operatorname{Re}(c\bar{s}) + |c|^2 t \\ &= v - 2 \operatorname{Re}\left(\frac{s\bar{s}}{t}\right) + |c|^2 t = v - 2 \frac{|s|^2}{t} + |c|^2 t \\ &= v - 2 \frac{|s|^2}{t} + \frac{|s|^2}{t} = v - \frac{|s|^2}{t}, \quad \text{i. e.} \quad vt \geq |s|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una manera más natural de probar la desigualdad de Cauchy es usar la identidad de Lagrange,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j \bar{w}_k - z_k \bar{w}_j|^2.$$

Dejamos la comprobación de esta identidad como ejercicio para el estudiante.

1.2.3 Ejemplos Desarrollados

1. Resolver $z^8 = 1$.

Solución. Usando el teorema 4, las soluciones están dadas por:

$$z_k = \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{8}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 7, \quad \theta = 0,$$

que se pueden escribir como:

$$1, \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad i, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad -1, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad -i, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

2. Mostrar que $\overline{\left[\frac{(3+7i)^2}{8+6i}\right]} = \frac{(3-7i)^2}{8-6i}$.

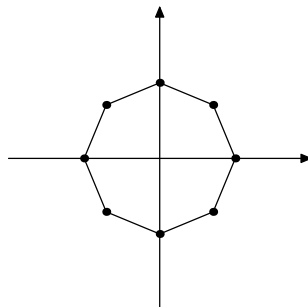


Figura 1.9: Las ocho raíces octavas de la unidad.

Solución.

$$\overline{\left[\frac{(3+7i)^2}{8+6i} \right]} = \frac{\overline{(3+7i)^2}}{\overline{8+6i}} = \frac{\overline{(3+7i)(3+7i)}}{\overline{8-6i}} = \frac{(3-7i)^2}{8-6i}.$$

3. Si $|z| = 1$, demuestre que $\left| \frac{az+b}{\overline{bz+a}} \right| = 1$.

Solución. Obsérvese que $|z| = 1$ implica que $|\overline{z}| = 1$ y $z\overline{z} = 1$. Tenemos entonces

$$\left| \frac{az+b}{\overline{bz+a}} \right| = \left| \frac{az+b}{\overline{bz+a}} \right| \frac{1}{|z|} = \left| \frac{az+b}{\overline{bz+a}} \right| = \left| \frac{az+b}{\overline{az+b}} \right| = 1.$$

4. Demuestre que el máximo valor absoluto de $z^2 + 1$ en el disco unitario $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ es 2.

Solución. $|z^2 + 1| \leq |z^2| + 1 \leq 2$. Si $z = 1$, entonces $z^2 + 1 = 2$.

5. Escribir en notación compleja la ecuación de la recta, el círculo y la elipse.

Solución. La recta se expresa fácilmente en forma paramétrica; el lugar geométrico de los puntos en el plano que pasan por un punto dado \overline{a} en una cierta dirección \overline{b} : $\{z = \overline{a} + t\overline{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

El círculo de radio r con centro en \overline{a} se puede expresar como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \overline{a}| = r\}.$$

La elipse centrada en el origen con focos en d y $-d$, y semieje mayor a se puede expresar como

$$|z - d| + |z + d| = 2a.$$

Esto se sigue directamente de la definición de elipse.

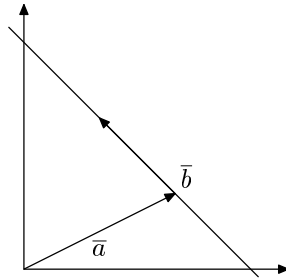


Figura 1.10: Parametrización de una recta.

6. Expresar $\cos 3\theta$ en términos de $\cos \theta$ y $\sen \theta$ usando la fórmula de De Moivre.

Solución. Se tiene que

$$(\cos \theta + i \sen \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sen 3\theta,$$

por lo que, usando la fórmula del binomio, se obtiene

$$\cos^3 \theta + i3 \cos^2 \theta \sen \theta - 3 \cos \theta \sen^2 \theta - i \sen^3 \theta = \cos 3\theta + i \sen 3\theta,$$

y

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sen^2 \theta.$$

1.3 La Proyección Estereográfica

La proyección central desde el polo norte descrita en la figura 1.11 sugiere que el plano complejo se puede pensar como la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 excluyendo el polo norte. Resulta pues natural pensar que el polo norte corresponde a un punto ideal que representa al infinito.

Definición 1.5. Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano complejo extendido, denotado por $\widehat{\mathbb{C}}$.

Incluir el símbolo ∞ es particularmente útil en el contexto de las transformaciones de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad-bc \neq 0$, que son biyecciones de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$. (ver Marsden [2], capítulo 5, y Hoffman) La esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\},$$

llamada esfera de Riemann, es el modelo requerido para incluir el punto al infinito.

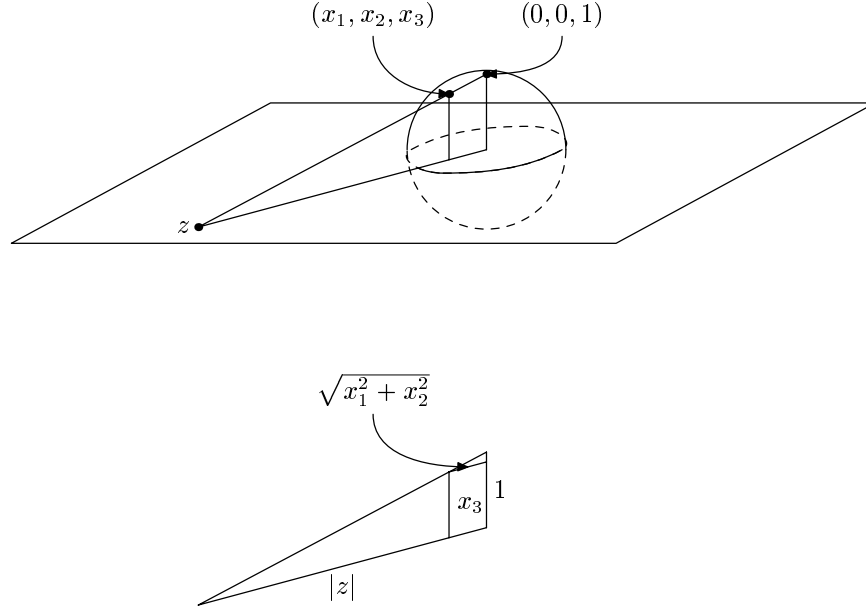


Figura 1.11: La proyección estereográfica.

Para asociar cada punto en el plano con uno en \mathbb{S}^2 usamos la siguiente idea geométrica: Si colocamos a \mathbb{S}^2 en su posición usual en \mathbb{R}^3 y consideramos al plano $z = 0$ como \mathbb{C} , la línea que va de un punto $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ al polo norte $\bar{e}_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ cruza \mathbb{C} en un único punto. Parametrizando se tiene:

Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $[\bar{e}_3 + t(\bar{x} - \bar{e}_3)] \in \mathbb{C}$ entonces

$$[\bar{e}_3 + t(\bar{x} - \bar{e}_3)] \cdot \bar{e}_3 = 0,$$

$$1 + t(\bar{x} - \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_3 = 0,$$

$$1 = t(1 - x_3),$$

$$t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

De donde, el punto asociado a \bar{x} es

$$\begin{aligned} & \bar{e}_3 + \frac{1}{1 - x_3}(\bar{x} - \bar{e}_3) \\ &= \bar{e}_3 + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right) \end{aligned}$$

Otra manera de ver esto es por medio de la figura 1.11. Es claro que la proyección de \bar{x} debe tener la dirección de (x_1, x_2) , y por semejanza se obtiene que

$$\frac{|z|}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3}.$$

Con base en estas ideas, se define la función $\Psi: \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Se afirma que Ψ es una biyección entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y \mathbb{C} .

DEMOSTRACIÓN.

1. Ψ es inyectiva. Para demostrar esto se construye la inversa. Obsérvese que, si $z = \Psi(x_1, x_2, x_3)$,

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

(ya que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$). Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} (1 - x_3)|z|^2 &= 1 + x_3, \\ |z|^2 - 1 &= x_3(1 + |z|^2), \end{aligned}$$

es decir,

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}. \quad (1.3)$$

También $z + \bar{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3}$, por lo que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(z + \bar{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right) \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Análogamente $z - \bar{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3}$, por lo que

$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}. \quad (1.5)$$

Por lo tanto Ψ es inyectiva, ya que z determina al punto (x_1, x_2, x_3) . Obsérvese también que la función Φ

$$\Phi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

es inversa por la izquierda de Ψ .

2. Ψ es sobre.

Dado $z \in \mathbb{C}$, se puede ver mediante un cálculo sencillo que $\Phi(z) \in \mathbb{S}^2$. Si $\Phi(z) = \rho = (y_1, y_2, y_3)$ y $\Psi(\rho) = z'$, usando las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) se tiene

$$\begin{aligned} |z'| &= \frac{1 + y_3}{1 - y_3} = |z|, \\ \frac{2 \operatorname{Re} z'}{|z'|^2 + 1} &= y_1 = \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \\ \frac{2 \operatorname{Im} z'}{i(|z'|^2 + 1)} &= y_2 = \frac{2 \operatorname{Im} z}{i(|z|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\operatorname{Re} z' = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z' = \operatorname{Im} z, \quad \text{i. e. } z' = z,$$

Ψ es sobre y Φ es su inversa. ■

Haciendo corresponder ∞ con $(0, 0, 1)$ se obtiene una biyección entre \mathbb{S}^2 y $\widehat{\mathbb{C}}$, lo cual nos da el modelo buscado. A esta biyección se le llama *proyección estereográfica*. De la fórmula (1.3) se deduce que el ‘hemisferio sur’, $x_3 < 0$, corresponde al disco unitario $|z| < 1$, y que el ‘hemisferio norte’, $x_3 > 0$, corresponde al exterior del disco unitario.

En esta representación esférica del plano complejo no hay una interpretación fácil de la suma y el producto, su ventaja estriba en que ∞ no es un punto distinguido. Convendremos que toda recta es un subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}}$ que incluye al símbolo ∞ , es decir, que toda recta pasa por ∞ . Una propiedad importante de la proyección estereográfica es la siguiente:

Proposición 1.7. *Bajo la proyección estereográfica, círculos en \mathbb{C} y rectas en $\widehat{\mathbb{C}}$ se transforman en círculos en \mathbb{S}^2 y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Un círculo en \mathbb{S}^2 es la intersección de un plano con la esfera, es decir, satisface una ecuación

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Este círculo es la imagen bajo la proyección estereográfica de un conjunto cuyos puntos deben cumplir

$$a \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} + b \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} + c \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = d.$$

Si $z = x + iy$, esta ecuación se transforma en

$$a2x + b2y + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 - 1),$$

que es la ecuación de una recta o un círculo en el plano, dependiendo si $d = c$ ó $d \neq c$. Al completar cuadrados no se puede obtener un radio negativo, puesto que un conjunto vacío no puede ser la imagen de uno no vacío.

2. Viceversa, una recta en el plano es un conjunto de la forma

$$ax + by = c,$$

que bajo la proyección estereográfica va a dar a

$$a \frac{x_1}{1 - x_3} + b \frac{x_2}{1 - x_3} = c$$

ó

$$ax_1 + bx_2 = c(1 - x_3),$$

lo cual está contenido en un plano, y puesto que es un subconjunto de la esfera, debe ser un círculo. Este círculo pasa por el polo norte, ya que $\Phi(\infty) = (0, 0, 1)$, y ciertamente este punto está en el plano descrito.

Y un círculo en el plano es de la forma

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= r^2, \quad \text{ó} \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= r^2, \quad \text{es decir,} \\ |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 &= r^2, \\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2 \operatorname{Re}(a\bar{z}) &= r^2 - |a|^2, \end{aligned}$$

puesto que se sigue de (1.3) que $|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$.

Si $a = a_1 + ia_2$, y $z = x + iy$, entonces $\operatorname{Re}(a\bar{z}) = a_1x - a_2y$, y

$$\begin{aligned} \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x - a_2y) &= r^2 - |a|^2, \\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2a_1 \frac{x_1}{1 - x_3} + 2a_2 \frac{x_2}{1 - x_3} &= r^2 - |a|^2, \\ 1 + x_3 - 2a_1x_1 + 2a_2x_2 &= (r^2 - |a|^2)(1 - x_3), \end{aligned}$$

que está contenido en un plano y es por tanto un círculo. ■

Para terminar, es útil tener una fórmula para la distancia entre las proyecciones de z y z' en la esfera en términos de z y z' .

Denotando a las proyecciones en la esfera por (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3) se tiene que, por estar en \mathbb{S}^2

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3).$$

Usando (1.3), (1.4) y (1.5),

$$\begin{aligned} & x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 \\ &= \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{z' + \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} - \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{z' - \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} + \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \\ &= \frac{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |zz'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \\ &= \frac{-2(z - z')(\bar{z} - \bar{z}') + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}. \end{aligned}$$

(El último paso tiene como intención homologar numerador y denominador).

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2 \left(1 - \frac{2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \right)} \\ &= \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}}. \end{aligned}$$

Esta nueva fórmula de distancia en $\hat{\mathbb{C}}$ es particularmente novedosa y útil al incluir el punto al infinito. En éste caso, si $z' = \infty$,

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2},$$

por lo que

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2} = \sqrt{2 - 2 \left(\frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right)} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Esta distancia se llama cordal, el nombre se debe a que se miden cuerdas en la esfera. La métrica cordal define en \mathbb{C} los mismos abiertos que la métrica usual. (La justificación de esta afirmación queda como ejercicio.)

1.4 Algunas Funciones Elementales

Antes de proceder a estudiar las funciones de variable compleja de manera general, exhibimos algunos ejemplos. Comenzaremos extendiendo a \mathbb{C} algunas de las funciones del cálculo real.

1.4.1 La Función Exponencial

Sabemos de cálculo real que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Si en esta serie sustituimos formalmente x por iy , $y \in \mathbb{R}$, y olvidamos por un momento las cuestiones sobre convergencia, deberíamos tener que

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots,$$

reordenando esta serie, y dado que

$$i^{4k+l} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \equiv 0 \pmod{4}, \\ i & \text{si } l \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{si } l \equiv 2 \pmod{4}, \\ -i & \text{si } l \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

obtenemos

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right),$$

es decir,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Estas consideraciones, junto con la igualdad del cálculo real, $e^{a+b} = e^a e^b$, sugieren la siguiente definición:

Definición 1.6. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, se define e^z como

$$e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Obsérvese que la función así definida extiende a la exponencial real.

El siguiente teorema muestra que esta definición es la adecuada.

Teorema 1.8.

- i) $e^{z+w} = e^z e^w$.
- ii) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z \neq 0$.

$$\text{iii) } |e^{x+iy}| = e^x.$$

iv) e^z es periódica, y todos sus periodos son de la forma $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$.

v) $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN.

i) Si $z = x + iy$ y $w = s + it$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x+s)+i(y+t)} = e^{x+s} (\cos(y+t) + i \operatorname{sen}(y+t)) \\ &= e^{x+s} (\cos y \cos t - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} t + i(\operatorname{sen} y \cos t + \operatorname{sen} t \cos y)) \\ &= e^x e^y (\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos t + i \operatorname{sen} t) = e^z e^w, \end{aligned}$$

como consecuencia del mismo hecho para variable real.

ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, por lo que $e^z \neq 0$.

iii) $|e^{x+iy}| = |e^x| |\cos y + i \operatorname{sen} y| = e^x$.

iv) $e^{z+2\pi ni} = e^z e^{2\pi ni} = e^z \cdot 1 = e^z$, por lo que $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$, es un periodo de e^z .

Supongamos que w es un periodo; entonces, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+w} = e^z$. En particular, $e^w = e^{0+w} = e^0 = 1$. Escribiendo $w = x + iy$, tenemos que $e^w = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1$ implica que $\operatorname{sen} y = 0$, es decir, $y = k\pi$, y , dado que $e^x > 0$, $y = 2k\pi$ y $x = 0$.

v) Es evidente de la definición que $e^{2\pi ni} = 1$. Viceversa, si $e^w = 1$, se demostró en el inciso anterior que $w = 0 + i2k\pi$. ■

Es fácil visualizar e^{iy} : es el único punto en el círculo unitario que se encuentra a y radianes del eje real positivo, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por ejemplo $e^{i\pi/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{i3\pi/2} = -i$. (Véa la figura 1.12)

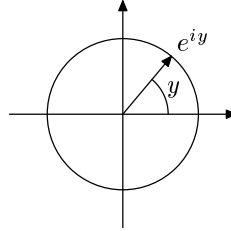


Figura 1.12: El significado de e^{iy} .

Geometría de la Función Exponencial

Se sigue directamente de la definición que la función exponencial transforma la línea horizontal $y = cte.$ en la semirecta que va del origen al infinito, haciendo un ángulo y con el eje X positivo. (Ver figura 1.13.)

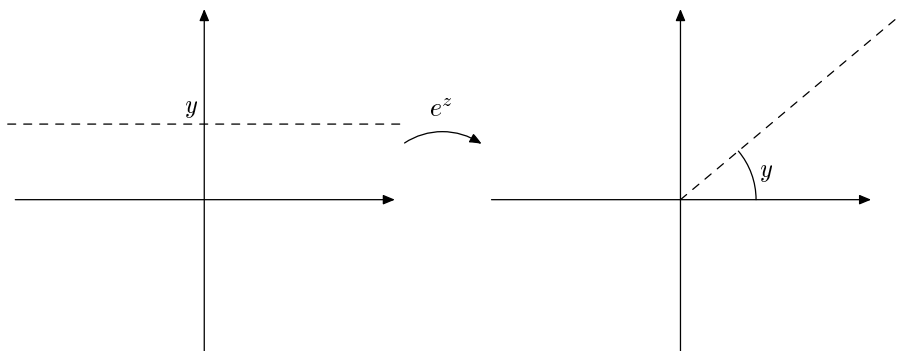


Figura 1.13: Efecto de e^z en rectas horizontales.

Por otra parte, la línea vertical $x = cte.$ se transforma en el círculo de radio e^x , recorriendo éste un número infinito de veces. (Ver figura 1.14.)

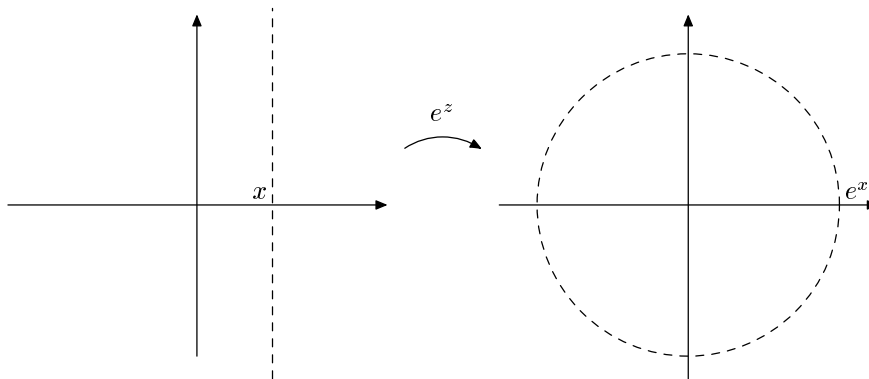


Figura 1.14: Efecto de e^z en líneas verticales.

1.4.2 La Función Logaritmo

Se quiere definir esta función de tal manera que sea una extensión de la correspondiente función real. También se quiere que sea una inversa de la exponencial, sin embargo, como la exponencial es periódica, se debe restringir el codominio del logaritmo.

Teorema 1.9. Si \mathcal{A}_{y_0} denota la franja horizontal infinita

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\},$$

entonces e^z es una biyección entre \mathcal{A}_{y_0} y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $e^{z_1} = e^{z_2}$ entonces $e^{z_1 - z_2} = 1$ y $z_2 - z_1 = 2\pi ni$. Como la distancia entre las partes imaginarias de dos puntos cualesquiera en \mathcal{A}_{y_0} es menor que 2π , se tiene que $z_1 = z_2$, y por lo tanto $e^z|_{\mathcal{A}_{y_0}}$ es inyectiva.

Ahora, dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $e^{x+iy} = w$ si y sólo si $e^x = |w|$ y $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$,

lo cual se traduce en $\log |w| = x$ y $\arg \frac{w}{|w|} = y$.

La segunda ecuación tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales satisface $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$. Por consiguiente, $e^z|_{\mathcal{A}_{y_0}}$ es suprayectiva. ■

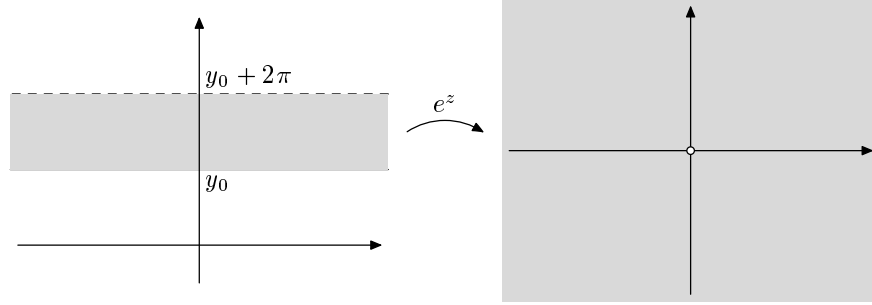


Figura 1.15: La región \mathcal{A}_{y_0} es transformada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por e^z .

La demostración del teorema 1.9 sugiere la siguiente definición.

Definición 1.7. La función con dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, codominio \mathcal{A}_{y_0} y regla de correspondencia

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad \arg z \in [y_0, y_0 + 2\pi)$$

se llama Rama de logaritmo. Esta función se denota usualmente por $\log(z)$, obsérvese, sin embargo, que hay una infinidad de estas funciones.

Reemplazando el dominio por una superficie en forma de espiral infinita se puede determinar en forma unívoca la función logaritmo (ver Marsden [2], capítulo 6). Sin embargo en este curso sólo discutiremos estas funciones con dominios que son subconjuntos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Obsérvese que para que el logaritmo sea función es necesario restringir el codominio. Por el momento tomaremos el codominio de la forma

$$\begin{aligned} & \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 < y \leq y_0 + 2\pi\}, \\ \text{o} & \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}, \quad y_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

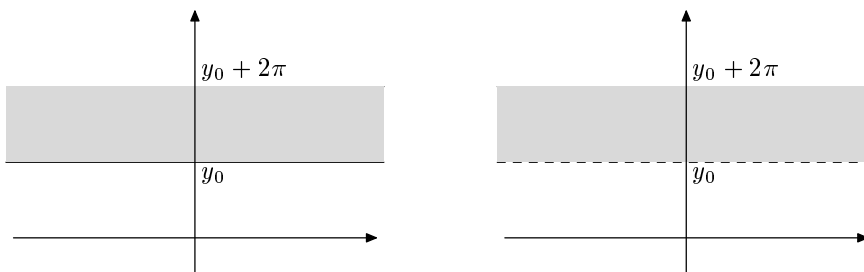


Figura 1.16: Algunos de los posibles codominios para el logaritmo.

Ejemplo. Si $y_0 = 0$, entonces el intervalo es $(0, 2\pi]$, ó $[0, 2\pi)$, y

$$\log(1+i) = \log|1+i| + i \arg(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

Si $y_0 = \pi$, el intervalo es $(\pi, 3\pi]$, ó $[\pi, 3\pi)$, y

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4}.$$

Teorema 1.10. *El logaritmo es la inversa de la exponencial en el siguiente sentido: Si $\log z$ representa una rama del logaritmo, entonces $e^{\log z} = z$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. También, si se elige la rama $y_0 \leq y < y + 2\pi$, entonces $\log(e^z) = z$, $\forall z \in \mathcal{A}_{y_0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\log z = \log|z| + i \arg z$,

$$e^{\log z} = e^{\log|z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z.$$

Recíprocamente, si $z = x + iy$, con $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$, tendremos que $\log(e^z) = \log|e^z| + i \arg(e^z) = \log(e^x) + iy = z$. Esto se sigue ya que $\arg(e^z) = \arg(e^{iy}) = y$, por la forma en la que se eligió la rama del logaritmo. ■

Posteriormente, se restringirá el dominio del logaritmo a $\mathbb{C} \setminus B$, donde B es una semirecta que se inicia en 0 , i. e.,

$$B = \{tw \mid t \in \mathbb{R}^+, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

El objeto de esta restricción será lograr que el logaritmo sea una función continua.

Teorema 1.11. *Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi i}.$$

DEMOSTRACIÓN. $\log z_1 z_2 = \log |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2)$, en donde tenemos que $\arg(z_1 z_2) \in [y_0, y_0 + 2\pi)$. Como $\log |z_1 z_2| = \log |z_1| + \log |z_2|$ y también $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi i}$, se sigue el resultado. ■

Para ejemplificar este teorema, calculamos $\log(-1-i)(1-i)$, donde el argumento toma valores en $(0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} (-1-i)(1-i) &= -(1+i)(1-i) = -(1-i^2) = -2, & y \\ \log(-2) &= \log 2 + i\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\log(-1-i) = \log \sqrt{2} + i \frac{5\pi}{4}, \quad y \quad \log(1-i) = \log \sqrt{2} + i \frac{7\pi}{4},$$

obteniéndose

$$\log(-1-i) + \log(1-i) = \log 2 + 3\pi i.$$

Geometría de la Función Logaritmo

El logaritmo produce el efecto contrario a la exponencial, círculos se transforman en segmentos verticales y semirectas que parten del origen en rectas horizontales. Esto se sigue ya que los círculos están dados por $r = cte.$ y las semirectas por $\theta = cte.$ en la siguiente ecuación:

$$\log r e^{i\theta} = \log r + i\theta.$$

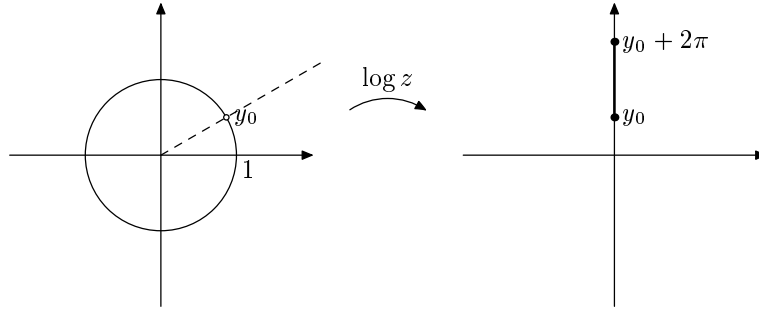
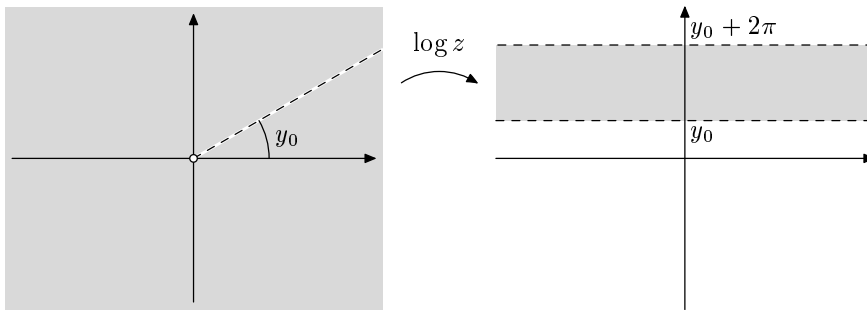


Figura 1.17: Geometría de la función logaritmo.

Figura 1.18: Efecto de \log .

1.4.3 Las Funciones Trigonométricas

Como $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, se tiene que

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 1.8. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

Teorema 1.12.

- i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
- ii) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \operatorname{sen} w \cdot \cos z$.
- iii) $\cos(z + w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

DEMOSTRACIÓN.

i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

ii) $\operatorname{sen} z \cdot \cos w + \operatorname{sen} w \cdot \cos z$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \right) + \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} - e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &\quad + \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(w-z)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z+w). \end{aligned}$$

iii) Se demuestra en forma similar a ii). ■

Las otras funciones trigonométricas se definen de la manera usual, por ejemplo, para $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0\}$ se define

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

1.4.4 Potencias Complejas

Se quiere definir a^b , donde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Se demostró que $a = e^{\log a}$, y si $b \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$a^b = (e^{\log a})^b = \underbrace{(e^{\log a}) (e^{\log a}) \cdots (e^{\log a})}_{b \text{ veces}},$$

por lo que $a^b = e^{b \log a}$. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 1.9. *Asumiendo que se ha elegido una rama del logaritmo, se define a^b como $e^{b \log a}$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, y $a \neq 0$.*

Es natural que la función $z \mapsto z^b$ sea “multivaluada” como el logaritmo, es decir, estará bien definida siempre que se especifique el codominio, por ejemplo, si $b = 1/q$, la fórmula de De Moivre nos dice que $a^{1/q}$ toma exactamente q valores distintos.

Teorema 1.13. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, entonces*

- i) a^b esta unívocamente determinada (no depende de la rama del logaritmo que se escoja) si y sólo si $b \in \mathbb{Z}$.
- ii) Si $b \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, entonces a^b toma exactamente q valores distintos, que son las q raíces de a^p .
- iii) Si $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o si $b \notin \mathbb{R}$, entonces a^b toma un número infinito de valores.

En los casos en que a^b toma valores distintos, estos difieren por factores de la forma $e^{2\pi nbi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Si se elige la rama del logaritmo donde el argumento toma valores en $(0, 2\pi]$ cualquier otra rama se puede expresar como

$$z \mapsto \log z + 2\pi ni, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En particular, $a^b = e^{b(\log a + 2\pi ni)} = e^{b \log a} e^{2\pi nbi}$, lo cual demuestra la última parte del teorema.

También

$$\begin{aligned} e^{b \log a} \cdot e^{2\pi nbi} &= e^{b \log a} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \iff e^{2\pi nbi} &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \iff nb \in \mathbb{Z} &\quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \iff b \in \mathbb{Z}, & \end{aligned}$$

de lo cual se concluye la primera parte.

Para demostrar ii), obsérvese que

$$e^{2\pi n(p/q)i} = e^{2\pi m(p/q)i} \iff \frac{p}{q}(n-m) \in \mathbb{Z} \iff n \equiv m \pmod{q},$$

puesto que $(p, q) = 1$, por lo que $a^{p/q}$ toma exactamente q valores.

Para demostrar iii), sea $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $e^{2\pi nbi} = e^{2\pi mbi}$ entonces se tiene que $e^{2\pi(n-m)bi} = 1$ y $b(n-m) \in \mathbb{Z}$ y, por tanto, $n = m$.

Finalmente, si $b = x + iy$, $y \neq 0$, $e^{2\pi nbi} = e^{-2\pi ny} \cdot e^{2\pi nix}$, de donde $|e^{2\pi nbi}| = e^{-2\pi ny}$. Si $e^{2\pi nbi} = e^{2\pi mbi}$, entonces $e^{-2\pi ny} = e^{-2\pi my}$ y concluimos que $n = m$. ■

Por ejemplo, si $a = 1 + i$ y $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces el número infinito de posibles valores de a^b está dado por

$$e^{b(\log(i+i) + 2\pi ni)} = e^{b(\log \sqrt{2} + \pi i/4 + 2\pi ni)} = \left(e^{b \log \sqrt{2} + i\pi b/4} \right) e^{2\pi nbi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.4.5 La Función Raíz n-ésima

Se demostró que si $z \neq 0$ entonces z tiene exactamente n raíces n -ésimas. Definiremos ahora la raíz n -ésima en términos del logaritmo.

Definición 1.10. La función raíz n -ésima, denotada por $\sqrt[n]{z}$ o $z^{1/n}$ se define como $e^{(\log z)/n}$, donde $\log z$ es una rama del logaritmo.

Obsérvese que esta definición coincide con la mencionada anteriormente. Por el teorema 1.13, sabemos que hay n posibles raíces n -ésimas. Eligiendo la rama del logaritmo cuya parte imaginaria toma valores en $(0, 2\pi]$, la raíz n -ésima está dada por

$$e^{(\log z)/n} = e^{\frac{\log r}{n} + \frac{i\theta}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\theta/n},$$

donde $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi]$.

Como en la demostración del teorema 1.4, las otras $n - 1$ soluciones se obtienen multiplicando esta solución por $e^{(2\pi ki)/n}$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

1.4.6 Ejemplos Desarrollados

1. Desarrolle la geometría de la función $z \mapsto z^2$ y la función raíz cuadrada.
Solución.

(a) $z \mapsto z^2$.

z^2 tiene norma $|z|^2$ y argumento $2 \arg z$, por lo que esta transformación lo que hace es elevar al cuadrado la norma y doblar el argumento, en particular, transforma el primer cuadrante en el semiplano superior y este en todo el plano.

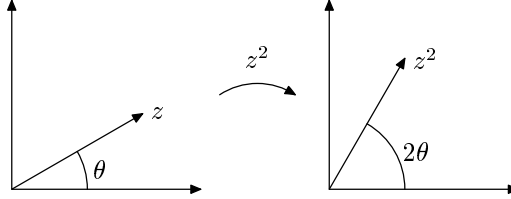


Figura 1.19: $z \mapsto z^2$.

(b) La Función Raíz Cuadrada.

Eligiendo la rama del logaritmo con argumento en $[0, 2\pi)$, la función está dada por $z \mapsto \sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{i\theta/2}$, donde $z = re^{i\theta/2}$. Como $\frac{\theta}{2} \in [0, \pi)$, \sqrt{z} siempre estará en el semiplano superior: El efecto es dividir el ángulo en dos.

Por otra parte, si se elige la rama $-\pi < \theta \leq \pi$, \sqrt{z} toma valores en el semiplano derecho.

2. Encuentre la parte real e imaginaria de e^{e^z} .

Solución. Si $z = x + iy$,

$$e^{e^z} = e^{e^x(\cos y + i \sen y)} = e^{e^x \cos y} (\cos(e^x \sen y) + i \sen(e^x \sen y)).$$

3. Encuentre todos los valores de i^i .

Solución. Tomando la rama $[0, 2\pi)$,

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i\pi)/2} = e^{-\pi/2}.$$

Los demás valores se obtienen multiplicando $e^{-\pi/2}$ por $e^{2\pi ni} = e^{-2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

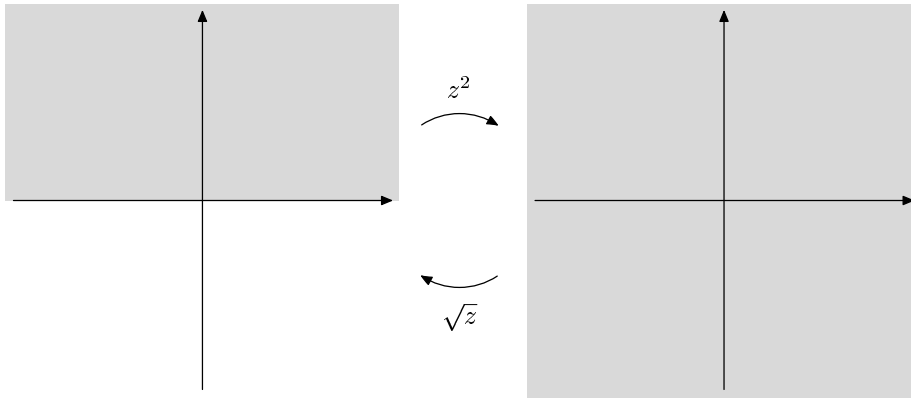
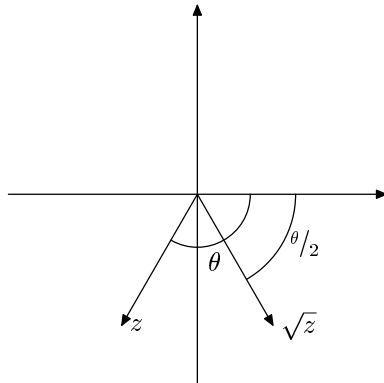


Figura 1.20: Efectos de ‘Elevar al cuadrado’ y ‘Raíz cuadrada’.

Figura 1.21: Raíz cuadrada con argumento en $(-\pi, \pi]$.

4. Demuestre que $\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh} y$, donde $\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Solución.

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = i \operatorname{senh} y.$$

5. Resuelva $\cos z = \frac{1}{2}$.

Solución. $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \iff e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0$. Esta ecuación cuadrática tiene soluciones

$$e^{iz} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo que tomando las distintas ramas de logaritmo se obtienen las siguientes soluciones.

$$iz = \log\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right),$$

es decir,

$$z = -i \log\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Como

$$\log\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) = \pm i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

todas las soluciones son de la forma

$$z = \pm\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Considérese la transformación $z \mapsto \operatorname{sen} z$. Demuestre que las líneas horizontales son transformadas en elipses y las líneas verticales en ramas de hipérbolas.

Solución.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) &= \operatorname{sen} x \cdot \cos iy + \operatorname{sen} iy \cdot \cos x = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \cosh y + i \operatorname{senh} y \cdot \cos x, \end{aligned}$$

donde $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. Esto es consecuencia de la identidad

$$\cos(it) = \frac{e^{i(it)} + e^{-i(it)}}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh t.$$

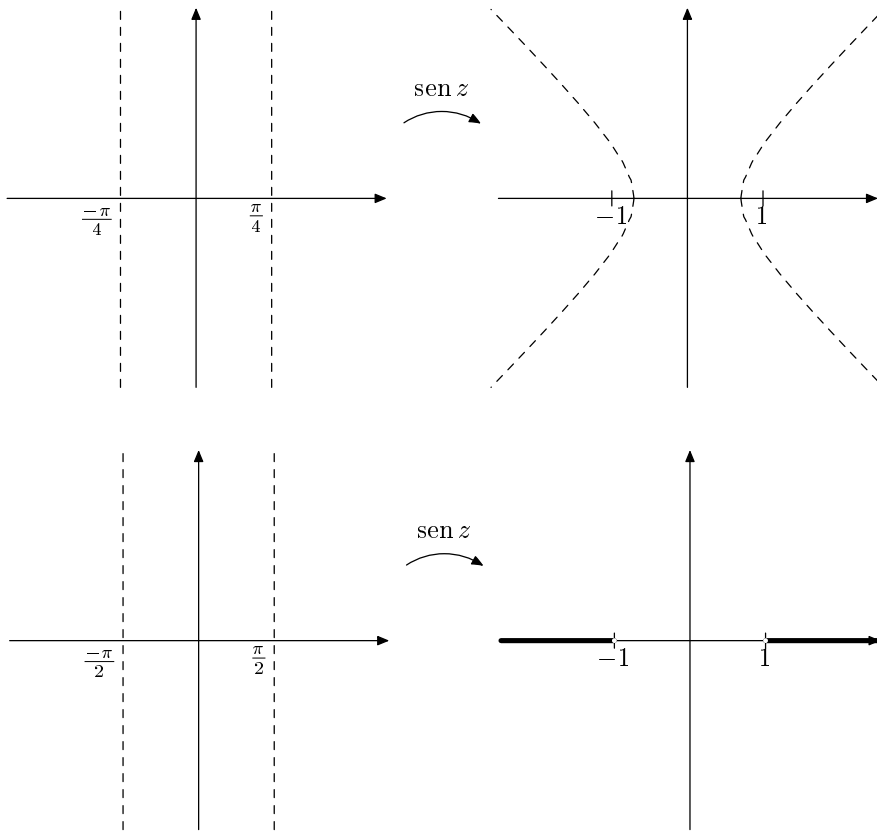
En consecuencia, si $y = y_0 \neq 0$, escribiendo $\operatorname{sen} z = u + iv$ se tiene que

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y_0} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

por lo que la recta $\{z = x + iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$, se transforma en una elipse. Obsérvese que la imagen da un número infinito de vueltas a dicha elipse.

También la imagen de la recta $\{z = x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$, con $x_0 \neq \frac{k\pi}{2}$, para $k \in \mathbb{Z}$, satisface

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1,$$

Figura 1.22: La geometría de $\sin z$.

y por lo tanto, es la rama de una hipérbola. (Por conexidad es sólo una rama y no toda la hipérbola).

Si $y = 0$, $\sin z = \sin x$, y el eje X se transforma en el intervalo $[-1, 1]$, que consideramos como una elipse degenerada. Si $x = 0$, $\sin z = i \sinh y$, por lo que el eje Y se transforma en si mismo, caso que también se considera degenerado. Otros casos degenerados suceden con las rectas $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$, que se transforman en los segmentos reales $[1, \infty)$ y $(-\infty, -1]$, respectivamente.

1.5 Funciones Analíticas

1.5.1 Topología y Continuidad en \mathbb{C}

Definición 1.11. Sea $A \subset \mathbb{C}$, se dice que A es abierto en \mathbb{C} si $\forall z \in \mathbb{C}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(z, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\} \subset A$.

Recuérdese de los cursos de cálculo que los $D(z, \varepsilon)$ son abiertos.

Estudiaremos las funciones con dominio en un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ y con codominio \mathbb{C} , llamadas funciones complejas de una variable compleja. Obsérvese que también se pueden pensar como funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Usualmente denotaremos a estas funciones como

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy),$$

donde u y v son funciones reales.

Definición 1.12. Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$ punto de acumulación de A . Se dice que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que, si } 0 < |z - a| < \delta, \text{ se tiene que } |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Siendo esta definición idéntica a la equivalente para funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , todas las propiedades demostradas para dichas funciones siguen siendo válidas en nuestro caso, como por ejemplo la unicidad y el hecho de que el límite de la suma es la suma de los límites.

Las demostraciones hechas en cálculo real de una variable también sirven para demostrar lo siguiente:

1. Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L_1$, y $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = L_2$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)g(z) = L_1L_2.$$

2. Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L_1$, y $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = L_2$, $L_2 \neq 0$, y $g(z) \neq 0$, $\forall z$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

La continuidad también se define como en cálculo.

Definición 1.13. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es continua en z_0 , si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que, si } |z - z_0| < \delta, \text{ se tiene que } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

De nuevo como en el cálculo, la suma, producto, cociente y composición de funciones continuas producen funciones continuas.

Las sucesiones de números complejos también son análogas a las reales.

Definición 1.14. Se dice que la sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a z_0 si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Por supuesto, el límite es único y

1. Si $\{w_n\} \rightarrow w$ y $\{z_n\} \rightarrow z$ entonces $\{w_n + z_n\} \rightarrow z + w$.

$$2. \{w_n z_n\} \rightarrow wz$$

$$3. \text{ Si } w \neq 0, \left\{ \frac{z_n}{w_n} \right\} \rightarrow \frac{z}{w}.$$

Obsérvese que $\{z_n\} \rightarrow z \iff \{\operatorname{Re} z_n\} \rightarrow \operatorname{Re} z$, e $\{\operatorname{Im} z_n\} \rightarrow \operatorname{Im} z$. Esto se sigue de que

$$|z - z_n| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z - z_n))^2 + (\operatorname{Im}(z - z_n))^2}.$$

Esta observación muestra que una sucesión en \mathbb{C} es convergente si y sólo si es de Cauchy (esta última propiedad se define como en el caso real).

Finalmente, como en el caso real, $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in A$ si y sólo si

$$\forall \{z_n\} \text{ tal que } \{z_n\} \rightarrow z_0, \{f(z_n)\} \rightarrow f(z_0).$$

1.5.2 Diferenciabilidad

Definición 1.15. Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto en \mathbb{C} . Se dice que f es analítica en $a \in A$, u holomorfa en a si

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. Este límite se denota por $f'(a)$.

Se dirá que f es analítica en A , si f es analítica en z , $\forall z \in A$. Esta diferenciabilidad en el sentido complejo es más estricta que la real, por ejemplo, se probará posteriormente que si f es analítica, entonces f tiene derivadas de todos los órdenes.

Como en el caso real, se tienen las siguientes propiedades.

1. Si $f'(a)$ existe, entonces f es continua en a .
2. Si A es abierto en \mathbb{C} y f y g son analíticas en A , entonces

(a) $af + bg$ es analítica en A y

$$(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z), \forall z \in A \text{ y } \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

(b) fg es analítica en A y

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \forall z \in A.$$

(c) Si $g(z) \neq 0, \forall z \in A$, entonces $\frac{f}{g}$ es analítica en A y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad \forall z \in A$$

3. Cualquier polinomio $a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ es una función analítica en \mathbb{C} con derivada $a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1}$.
4. Cualquier función racional $\frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n}$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en los ceros de $b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n$.

La demostración de estos hechos es idéntica al caso real, por lo cual se omite.

También vale la regla de la cadena para funciones analíticas. Incluimos la prueba de este hecho para mostrar la cabal analogía con el caso real.

Teorema 1.14. Sean A y B abiertos en \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas, $f(A) \subset B$; entonces $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad \forall z \in A.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $z_0 \in A$, $w_0 = f(z_0) \in B$. Se define para $w \in B$

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & \text{si } w \neq w_0, \\ 0 & \text{si } w = w_0. \end{cases}$$

Obsérvese que como $g'(w_0)$ existe, h es continua en B , y por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (h \circ f)(z) = h(w_0) = 0.$$

Ahora, $\forall z \in A$, reemplazando w por $f(z)$ se tiene

$$(g \circ f)(z) - g(w_0) = [h(f(z)) + g'(w_0)] [f(z) - w_0], \text{ y si } z \neq z_0, \\ \frac{(g \circ f)(z) - g(w_0)}{z - z_0} = [h(f(z)) + g'(w_0)] \left[\frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right].$$

Finalmente, tomando el límite en esta expresión cuando $z \rightarrow z_0$, se obtiene el resultado. ■

1.5.3 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Si $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, también $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Recordamos que f es diferenciable en el sentido real en $(x_0, y_0) \in A$ si existe una transformación lineal $Df_{(x_0, y_0)}$ de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que satisface

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) + Df_{(x_0, y_0)}(h, k)}{|(h, k)|} = 0.$$

Resulta que ser analítica es una propiedad más restrictiva que la de ser diferenciable en el sentido real, como lo muestra el siguiente teorema.

Usaremos el siguiente hecho fácil de probar. Si g es una función compleja tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existe, entonces existen $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} g(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} g(z)$, y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(g(z)) + i \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(g(z)),$$

Teorema 1.15. Sean A abierto en \mathbb{C} y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $z_0 = (x_0, y_0) \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).\end{aligned}\quad (\text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann.})$$

Donde $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

en particular, aproximándose a z_0 por la recta $y = y_0$, se tiene que

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y_0 - y_0)} = \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0},$$

y tomando el límite cuando $x \rightarrow x_0$, se obtiene

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Esta última afirmación se sigue de la observación anterior al teorema.

Análogamente, aproximándose por la recta $x = x_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se escribe como

$$\begin{aligned}& \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{(x_0 - x_0) + i(y - y_0)} \\ &= \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}.\end{aligned}$$

Nuevamente, tomando el límite cuando $z \rightarrow z_0$, se obtiene

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Igualando estas dos expresiones para $f'(z_0)$, se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Observación. La demostración del teorema 1.15 proporciona fórmulas explícitas para la derivada.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

El resultado del teorema 1.15 es aún más general.

Teorema 1.16. *Sea $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto, $z_0 \in A$, entonces f es holomorfa en z_0 si y sólo si f es diferenciable en el sentido real en z_0 y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en dicho punto.*

Una consecuencia importante de este teorema es el hecho de que cualquier función $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, (A abierto en \mathbb{C}) con derivadas parciales continuas en $z_0 \in A$ y que además satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en dicho punto, es necesariamente analítica.

Para demostrar el teorema se necesita primero un lema.

Lema 1.1. *Una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con entradas reales, representa bajo multiplicación matricial, la multiplicación por un número complejo si y sólo si $a = d$ y $b = -c$. El número en cuestión es $a + ic$ o $d - ib$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la multiplicación por un complejo fijo es una operación conmutativa, se puede escribir el complejo en cuestión como $a + ic$, y la matriz $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ produce como transformación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 la multiplicación deseada:

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax - cy, cx + ay).$$

En notación compleja esto es

$$(ax - cy) + i(cx + ay) = (a + ic)(x + iy).$$

Viceversa, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ representa la multiplicación por $\alpha + i\beta$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y), \quad \forall x + iy \in \mathbb{C}, \text{ es decir}$$

$$ax + by = \alpha x - \beta y,$$

$$cx + dy = \beta x + \alpha y$$

En particular, tomando (x, y) como $(1, 0)$ o $(0, 1)$ se obtiene

$$a = \alpha, \quad b = -\beta, \quad c = \beta, \quad y \quad d = \alpha. \quad \blacksquare$$

Ahora se puede demostrar el teorema 1.16.

DEMOSTRACIÓN (TEOREMA 1.16). Si f es holomorfa en z_0 entonces existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

que denotamos por $f'(z_0)$. Este límite es equivalente a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{(z - z_0)} = 0,$$

que a su vez equivale a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0,$$

o, usando coordenadas reales,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - Df_{z_0}(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0,$$

donde Df_{z_0} es la matriz generada por el número complejo $f'(z_0)$ como en la demostración del lema.

Este último límite muestra que f es diferenciable en el sentido real en z_0 y que satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en dicho punto. El lema muestra que todos los pasos son reversibles. ■

1.5.4 Conformalidad

La regla de la cadena junto con las condiciones de Cauchy-Riemann proporcionan una interesante interpretación geométrica de la derivada.

Proposición 1.17. *Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable, A es un abierto en \mathbb{C} que contiene a $\gamma([a, b])$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa entonces $f \circ \gamma$ es una curva diferenciable y*

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

DEMOSTRACIÓN. La regla de la cadena real implica que

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t).$$

A su vez la demostración del teorema 1.16 dice que esto último se puede escribir como

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t). \quad \blacksquare$$

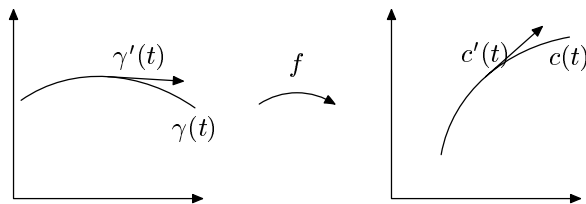


Figura 1.23: Interpretación geométrica de la regla de la cadena.

Esta proposición conlleva la geometría local de las funciones analíticas. Para entender esto considérese una curva diferenciable γ en una región A en \mathbb{C} ,

es decir, un abierto y conexo en \mathbb{C} , $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, y una función analítica $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Denotando la curva $f \circ \gamma$ por c , se tiene que

$$c'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Supóngase también que $\forall t \in [a, b]$ $\gamma'(t) \neq 0$ y $f'(\gamma(t)) \neq 0$. Bajo estas hipótesis se concluye que $c'(t) \neq 0$ y que la dirección de la tangente a c en $c(t)$ está determinada por

$$\arg c'(t) = \arg f'(\gamma(t)) + \arg \gamma'(t) \pmod{2\pi}.$$

Esto dice que el ángulo que forman las tangentes a c en $c(t)$ y a γ en $\gamma(t)$ es $\arg f'(\gamma(t))$, es decir, no depende de la curva γ , sólo depende del punto $z = \gamma(t)$ y de la función f .

Estas hipótesis también implican que curvas que tienen la misma tangente en $z = \gamma(t)$ se transforman bajo f en curvas que tienen la misma tangente en $f(z)$, y que curvas cuyas tangentes forman un ángulo θ en z se transforman en curvas cuyas tangentes forman un ángulo θ en $f(z)$.

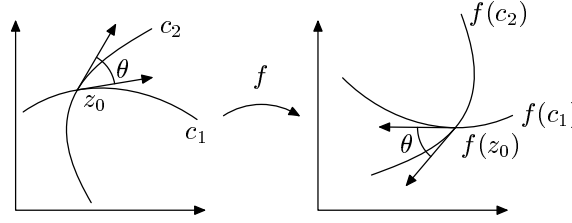


Figura 1.24: Una función conforme preserva el ángulo entre dos curvas.

A esta propiedad de preservar ángulos se le llama *conformalidad*. En nuestro contexto una definición precisa es la siguiente.

Definición 1.16. Sea A abierto en \mathbb{C} y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Se dice que f es conforme en $a \in A$ si $f'(a) \neq 0$.

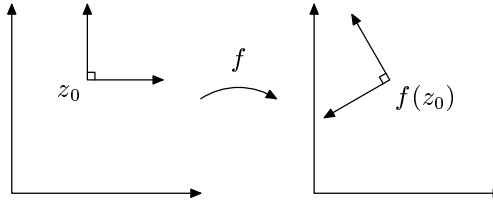


Figura 1.25: El efecto local de una función conforme.

Otra propiedad que se relaciona con el término conforme es el cambio lineal de escala. Bajo las hipótesis anteriores se tiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

Este límite significa que la razón de contracción o dilatación lineal de cualquier segmento (que comience en z_0) bajo f es, en el límite, constante, y no depende de la dirección. Por supuesto este cambio en general varía de punto a punto.

En particular, si c , γ y f son como antes, se sigue de la proposición 1.17 que

$$|c'(t)| = |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|,$$

esto es, los vectores tangentes a curvas por z_0 se dilatan o contraen por el factor $|f'(z_0)|$.

Resumiendo, una transformación conforme, infinitesimalmente cerca de z , es aproximadamente una rotación por un ángulo $\arg f'(z)$ seguida de una homotecia por un factor $|f'(z)|$.

1.5.5 Ecuaciones de Cauchy-Riemann en Coordenadas Polares

Procedemos a expresar las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Se define

$$T: (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ como} \\ T(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \text{ donde } \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Se restringe el ángulo a $(0, 2\pi)$ ya que de otra manera T^{-1} no es continua en el eje real positivo: Por ejemplo, si se toma como dominio $(0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$, la sucesión $\{e^{2\pi i/n}\} \rightarrow 1$, pero $\{T^{-1}(e^{2\pi i/n})\} \not\rightarrow T^{-1}(1) = (2\pi, 1)$.

Teorema 1.18. *Sea A una región en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $f(z) = u(z) + iv(z)$. Entonces $\forall (\theta, r) \in T^{-1}(A)$*

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}(\theta, r) = -r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}(\theta, r), \quad y \\ r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\theta, r) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta}(\theta, r),$$

donde $\bar{u} = u \circ T$ y $\bar{v} = v \circ T$. A estas ecuaciones se les llama ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

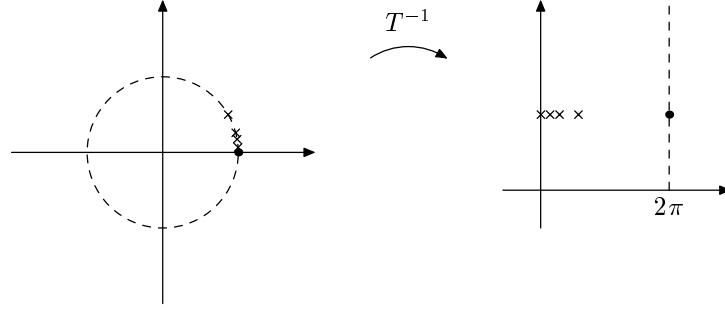


Figura 1.26: T^{-1} no es continua en 1 si el dominio de T es $(0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Tomando $(\theta, r) = T^{-1}(z)$, $z \in A$, se tiene

$$\begin{aligned} D(f \circ T)(\theta, r) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \\ r \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z)(-r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(z)r \cos \theta & \frac{\partial u}{\partial x}(z) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y}(z) \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z)(-r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial v}{\partial y}(z)r \cos \theta & \frac{\partial v}{\partial x}(z) \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y}(z) \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$D(f \circ T)(\theta, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}(\theta, r) & \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\theta, r) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta}(\theta, r) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}(\theta, r) \end{pmatrix}.$$

Obteniéndose de estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}(\theta, r) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z)(-r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(z)r \cos \theta \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z)(-r \operatorname{sen} \theta) + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)r \cos \theta \\ &= -r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}(\theta, r) \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene la otra ecuación. ■

Existe un teorema análogo al teorema 1.16 para coordenadas polares: Si A es una región en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido real y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en forma polar se concluye que f es analítica en A . La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

1.5.6 Teorema de la Función Inversa

Teorema 1.19. *Sea A abierto en \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en A , f' continua en A , supóngase también que existe $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen abiertos U y V en \mathbb{C} , tales que $z_0 \in U$, $f|_U: U \rightarrow V$ es una biyección y $f^{-1}: V \rightarrow U$ es analítica. Además*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \text{ donde } w = f(z).$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix}, \quad \text{y}$$

$$\det Df(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Usando el teorema de la función inversa para variable real, se deduce que existen abiertos U y V en \mathbb{C} , $z \in U$ tales que $f|_U: U \rightarrow V$ es una biyección; f^{-1} es diferenciable en el sentido real en V y, $\forall z \in A$,

$$Df^{-1}(f(z)) = \frac{1}{\det Df(z)} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial x}(z) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial x}(z) \end{pmatrix}.$$

Por lo que f^{-1} satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en V y por lo tanto es analítica. Además

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{\det Df(z)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \right) = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z)}. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que el teorema 1.19 establece una biyección la cual es local y no global como puede observarse en el ejemplo $f(z) = z^2$.

1.5.7 Conjuntos Conexos

No es difícil probar que si A es una región en \mathbb{R}^2 y $z_1, z_2 \in A$ entonces existe una línea poligonal totalmente contenida en A que une z_1 con z_2 .

Teorema 1.20. *Sea A una región en \mathbb{C} y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f'(z) = 0$ en A , entonces f es constante en A .*

DEMOSTRACIÓN. Sean $z_1, z_2 \in A$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una poligonal que une z_1 con z_2 . Existe una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que $\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}$ es diferenciable, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En dichos subintervalos se tiene

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0,$$

escribiendo $f = u + iv$ resulta

$$\frac{d(u \circ \gamma)}{dt}(t) = 0 = \frac{d(v \circ \gamma)}{dt}(t), \quad \text{y}$$

$$u \circ \gamma(x_i) = u \circ \gamma(x_{i-1}), \quad v \circ \gamma(x_i) = v \circ \gamma(x_{i-1}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Por lo cual $f(z_1) = f(z_2)$. ■

1.5.8 Ejemplos Desarrollados

1. ¿Dónde es analítica $f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$? Calcule su derivada.

Solución. f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{ \text{raíces cúbicas de } -1 \}$, su derivada es

$$f'(z) = \frac{(3z^2 + 2)(z^3 + 1) - (z^3 + 2z + 1)(3z^2)}{(z^3 + 1)^2} = \frac{-4z^3 + 2}{(z^3 + 1)^2}.$$

2. Considere $f(z) = z^3 + 1$. Describa el comportamiento infinitesimal de f cerca de i .

Solución. $f'(z) = 3z^2$, $f'(i) = 3i^2 = -3$, por lo que f cerca de i es aproximadamente una dilatación por un factor de 3 seguido de una rotación de 180° . Mas precisamente, dada una curva diferenciable γ por i con vector tangente v en dicho punto la curva $f \circ \gamma$ tiene como vector tangente en $f(i)$ el vector $-3v$.

3. Demuestre que $f(z) = \bar{z}$ no es analítica.

Solución. Escribiendo $f = u + iv$, con $u(x + iy) = x$ y $v(x + iy) = -y$, como $\frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) = 1$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(x + iy) = -1$, no se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann y por tanto, $f(z) = \bar{z}$ no es analítica.

4. Sabemos que la función $f(z) = z^3 + 1$ es analítica, verificar las condiciones de Cauchy-Riemann para esta función.

Solución. Si $f = u + iv$,

$$f(x + iy) = (x + iy)^3 + 1 = x^3 - 3y^2x + 1 + i(3x^2y - y^3),$$

por lo que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

5. Si f es analítica, $f = u + iv$, y u , v son de clase \mathcal{C}^2 (después se probará que esta segunda hipótesis es consecuencia de la primera), demuestre que u y v son armónicas, i. e.,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Solución. Se tiene $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ por lo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. También se tiene que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, así que $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, por lo que sumando ambas ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Análogamente se demuestra la ecuación para v . A la expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ se le llama el *Laplaciano* de u .

1.6 Diferenciación de las Funciones Elementales.

1.6.1 La Exponencial y el Logaritmo

Definición 1.17. A las funciones que son analíticas en \mathbb{C} se les llama enteras.

Teorema 1.21. La exponencial es entera, y su derivada es ella misma.

DEMOSTRACIÓN. $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$, por lo que e^z es de clase \mathcal{C}^∞ ; además

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se sigue pues del teorema 1.16 que e^z es analítica $\forall z \in \mathbb{C}$, y que

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \quad \blacksquare$$

Por ejemplo, la derivada de $e^{z^2} + 1$ es $(2z)e^{z^2}$.

Algunas veces se denota $f'(z)$ por $\frac{df}{dz}(z)$.

Para poder hablar de la derivada del logaritmo se necesita restringir el dominio para que esta función sea continua, por ejemplo, si se toma la rama con valores del argumento en $(y_0, y_0 + 2\pi]$ la sucesión $\{e^{i(y_0+1/n)}\} \rightarrow e^{iy_0}$, pero $\log(e^{i(y_0+1/n)})$ no converge a $\log(e^{iy_0}) = (y_0 + 2\pi)i$.

Por consiguiente consideraremos dominios de la forma

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 < y < y_0 + 2\pi\}.$$

Posteriormente consideraremos otro tipo de dominios.

Definición 1.18. A la rama de la función logaritmo cuyos argumentos toman valores en $(-\pi, \pi)$ se le llama la rama principal.

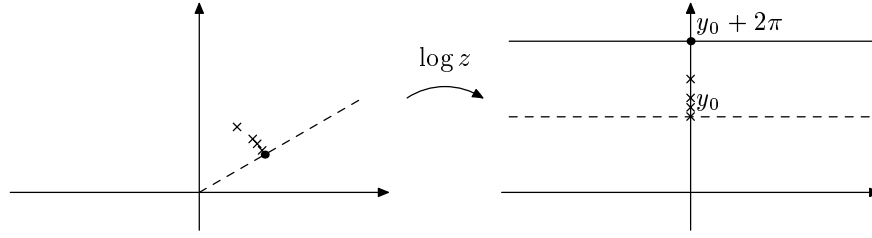


Figura 1.27: $\log z$ no es continua en $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 < y \leq y_0 + 2\pi\}$.

Teorema 1.22. Sean $B = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \leq 0\}$ y $A = \mathbb{C} \setminus B$, entonces la rama principal del logaritmo es analítica en A y

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}.$$

DEMOSTRACIÓN (1). Por el teorema de la función inversa se sigue que $\log z$ es analítica, ya que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z \neq 0.$$

Escribiendo $w = e^z$, con $-\pi < \text{Im } z < \pi$, se tiene

$$\frac{d}{dw}(\log w) = \frac{1}{\frac{d(e^z)}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}. \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN (2). En coordenadas polares

$$\log z = \log r + i\theta.$$

Como $\log r$ y θ son funciones de clase \mathcal{C}^∞ de r y θ también lo son de x y y en A . Basta demostrar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su forma polar. Usando la notación del teorema 1.18, esto se obtiene directamente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}.$$

El Jacobiano de la transformación polar $T(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ es

$$DT(\theta, r) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta & \cos \theta \\ r \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

y su determinante es $-r$, por lo que

$$DT^{-1}(T(\theta, r)) = \begin{pmatrix} \sin \theta / -r & \cos \theta / r \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

de donde

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{-r} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{-r^2} = \frac{-y}{r^2}, \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta = \frac{x}{r}.$$

Finalmente, mediante la composición $(x, y) \mapsto r \mapsto \log r$,

$$\left(\frac{d \log r}{dr} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \log r}{\partial x}, \frac{\partial \log r}{\partial y} \right),$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\log z) &= \frac{\partial}{\partial x}(\log r) + i \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} + i \frac{-y}{r^2} = \\ &= \frac{1}{r^2}(x - iy) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observación. Teoremas similares se pueden enunciar para otras ramas del logaritmo.

Como ejemplo del teorema considérese la función $z \mapsto \log(z^2)$, que es analítica en

$$A = \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \text{ o } \arg z = \pm \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Esto es consecuencia de observar que

$$z \in A \implies z^2 \neq 0 \text{ y } \arg z^2 \neq \pm \pi.$$

1.6.2 Las Funciones Trigonométricas

Teorema 1.23. *Las funciones seno y coseno son enteras y*

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{cos} z) = -\operatorname{sen} z.$$

DEMOSTRACIÓN. $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, por lo que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \left(\frac{e^{iz}}{2i} \right) i - \left(\frac{e^{-iz}}{2i} \right) (-i) = \cos z.$$

El caso del coseno es análogo. ■

1.6.3 La Función Potencia

Teorema 1.24.

i) Para cualquier rama del logaritmo, la función $z \mapsto a^z$ es entera y

$$\frac{d}{dz}(a^z) = (\log a)a^z.$$

ii) Si se fija una rama del logaritmo, la función $z \mapsto z^b$ es analítica en el dominio de la rama del logaritmo especificada y

$$\frac{d}{dz}(z^b) = bz^{b-1}.$$

Se sobreentiende que z^b y z^{b-1} usan la misma rama del logaritmo.

DEMOSTRACIÓN.

i) $a^z = e^{(\log a)z}$, por lo que a^z es entera y

$$\frac{d}{dz}(a^z) = (\log a)e^{(\log a)z} = (\log a)a^z.$$

ii) $z^b = e^{b \log z}$ es holomorfa en el dominio de la rama del logaritmo elegida debido a la regla de la cadena. Ahora

$$\frac{d}{dz}(e^{b \log z}) = \frac{b}{z}e^{b \log z} = \frac{b}{z}z^b = bz^{b-1}.$$

Esta última igualdad se sigue de

$$\frac{1}{z}z^b = z^{-1}z^b = e^{-\log z}e^{b \log z} = e^{(b-1) \log z} = z^{b-1},$$

donde z^b y z^{b-1} usan la misma rama del logaritmo. ■

Obsérvese que z^b es entera si $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, z^b es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $b \in \mathbb{Z}$, y si $b \notin \mathbb{Z}$, z^b es holomorfa en el dominio de alguna rama de logaritmo donde esta función sea holomorfa.

1.6.4 La Función Raíz n-ésima

Un caso de particular importancia en el teorema 1.24 es $b = \frac{1}{n}$. Se tiene que $z \mapsto z^{1/n}$ es analítica en cualquier dominio de analiticidad de alguna rama de logaritmo. Y para dicha rama

$$\frac{d}{dz}\left(z^{1/n}\right) = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

1.6.5 Ejemplos Desarrollados

1. Derive las siguientes funciones, dando la región apropiada donde estas son analíticas.

(a) $\frac{e^z}{z^2 + 3},$

(b) $\sqrt{e^z + 1},$

(c) $\cos \bar{z},$

(d) $\frac{1}{e^z - 1}$
?qqquad y

(e) $\log(e^z + 1).$

Solución.

(a) $z^2 + 3 = 0$ en $z = \pm i\sqrt{3}$, por lo que $\frac{e^z}{z^2 + 3}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\}$, y en dicha región

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z^2 + 3} \right) = \frac{e^z(z^2 + 3) - 2ze^z}{(z^2 + 3)^2} = \frac{e^z(z^2 - 2z + 3)}{(z^2 + 3)^2}.$$

(b) Elegimos el dominio de la rama principal del logaritmo como dominio de $z \mapsto \sqrt{z}$. Ahora se necesita caracterizar

$$\{z \in \mathbb{C} \mid e^z + 1 \in \mathbb{R}, e^z + 1 \leq 0\}.$$

$e^z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si k es par $e^z = e^x > 0$. Si k es impar $e^z = -e^x$ y $-e^x + 1 \leq 0$ si y sólo si $1 \leq e^x$, si y sólo si $x \geq 0$. Por consiguiente

$$A = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 0, y = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

es la región buscada, y

$$\frac{d}{dz} \left((e^z + 1)^{1/2} \right) = \frac{e^z}{2} (e^z + 1)^{-1/2}, \quad \forall z \in A.$$

(c) Se tiene

$$\begin{aligned} \cos \bar{z} &= \cos(x - iy) = \cos x \cdot \cos(-iy) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(-iy) \\ &= \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y, \end{aligned}$$

por lo que $u(x, y) = \cos x \cdot \cosh y$ y $v(x, y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y$. Derivando se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \cdot \cosh y \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{sen} x \cdot \cosh y.$$

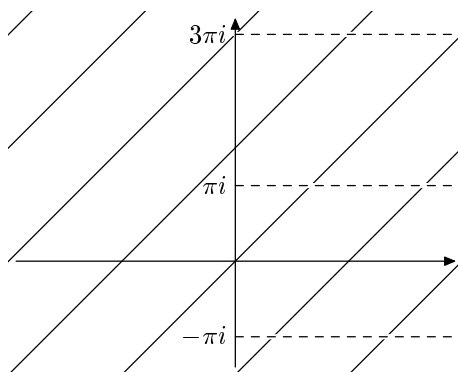


Figura 1.28: El dominio de analiticidad de $\sqrt{e^z + 1}$.

Para que $\cos \bar{z}$ sea holomorfa en z se necesita

$$-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y$$

lo cual implica

$$-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

Esto se cumple solamente para $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, no existe ningún conjunto abierto en \mathbb{C} donde $\cos \bar{z}$ sea analítica.

- (d) $e^z - 1$ es cero en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2\pi ni, n \in \mathbb{Z}\}$, por lo que $\frac{1}{e^z - 1}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus A$, y en dicha región

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{e^z - 1} \right) = \frac{-e^z}{(e^z - 1)^2}.$$

- (e) Es claro a partir del inciso (b) que la región de analiticidad de la función $\log(e^z + 1)$ es también

$$A = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid x \geq 0, y = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Además, $\forall z \in A$,

$$\frac{d}{dz} (\log(e^z + 1)) = \frac{e^z}{e^z + 1}.$$

2. Verifique directamente que la función e^z preserva los ángulos rectos formados por líneas paralelas a los ejes coordenados.

Solución. La recta $y = y_0$ se transforma en la semirecta infinita

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid (x, y) = (x, x \tan y_0), x > 0\},$$

y la recta $x = x_0$ en el círculo

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = e^{x_0}\}.$$

3. Mostrar que se puede tomar una rama de $w \mapsto \sqrt{w}$ tal que la función $z \mapsto \sqrt{z^2 - 1}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, |x| \geq 1\}$, y

$$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2},$$

donde r_i, θ_i , $i = 1, 2$, se determinan de acuerdo a la figura 1.29, asegurando que $0 < \theta_1 < 2\pi$ y $-\pi < \theta_2 < \pi$.

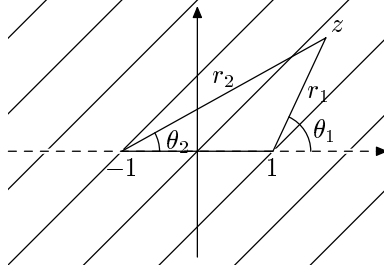


Figura 1.29: Los valores de r_i, θ_i para el ejemplo 3.

Solución. Si $\sqrt{z+1}$ es una raíz cuadrada de $z+1$ y $\sqrt{z-1}$ es raíz cuadrada de $z-1$, $\sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1}$ es raíz cuadrada de

$$(z+1)(z-1) = z^2 - 1.$$

Para $\sqrt{z-1}$ elegimos como la rama de la raíz la función analítica definida en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \geq 0\}$ dada por la regla de correspondencia $z \mapsto e^{(\log z)/2}$, $\log z = \log |z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$. Por lo tanto, la función $z \mapsto \sqrt{z-1}$ es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \geq 1\}.$$

También $\sqrt{z+1} = \sqrt{r_1} e^{i\theta_1/2}$, como en la figura 1.29.

Para $\sqrt{z+1}$ se toma como rama de la raíz la función analítica definida en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \leq 0\}$ por $z \mapsto e^{(\log z)/2}$, $-\pi < \arg z < \pi$.

Así, $\sqrt{z+1}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \leq -1\}$ y

$$\sqrt{z+1} = \sqrt{r_2} e^{i\theta_2/2}.$$

Por consiguiente $z \mapsto \sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1}$ es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, |x| \geq 1\}.$$

Ahora $z \in \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, |x| \geq 1\}$ si y sólo si

$$z^2 - 1 \in \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \geq 0\},$$

por lo que nuestro dominio de analiticidad para la función

$$z \mapsto \sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1} = \sqrt{z^2-1}$$

bajo z^2-1 se transforma en $\mathbb{C} \setminus \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y=0, x \geq 0\}$, el cual es un dominio de analiticidad para una rama de la raíz. La rama que coincide con nuestra definición es $z \mapsto e^{\log z/2}$, $0 < \arg z < 2\pi$; esto es consecuencia de que ambas definiciones de $z \mapsto \sqrt{z^2-1}$ son continuas, y coinciden, por ejemplo, en el origen.

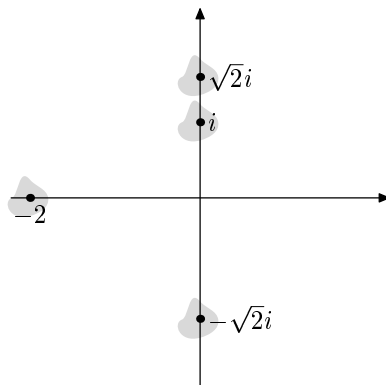


Figura 1.30: Si dos ramas de $z \mapsto \sqrt{z^2-1}$ coinciden en i , coinciden en puntos cercanos a i .

Como se ilustra en la figura 1.30, las dos ramas de la función coinciden en un subconjunto abierto de sus dominios. Como dicho subconjunto también es cerrado (por continuidad), y la intersección de los dominios es conexa, las dos ramas deben coincidir en todos los puntos donde ambas estén definidas.

Capítulo 2

Integración

2.1 Integrales Sobre Curvas

2.1.1 Propiedades Básicas

Definición 2.1. Sean $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $h(t) = u(t) + iv(t)$, donde u y v son funciones continuas. Se define

$$\int_a^b h(t) dt \quad \text{como} \quad \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Definición 2.2. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva continua. Se dice que γ es \mathcal{C}^1 por tramos si existe una partición de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, tal que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\gamma|_{(x_{i-1}, x_i)}$ es diferenciable y $\gamma'|_{(x_{i-1}, x_i)}$ tiene una extensión continua a $[x_{i-1}, x_i]$.

Integraremos solamente a lo largo de curvas que sean \mathcal{C}^1 por tramos.

Definición 2.3. Sea A un conjunto abierto en \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua, y $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ de clase \mathcal{C}^1 . Se define

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{como} \quad \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Se extiende esta definición en forma natural a curvas \mathcal{C}^1 por tramos.

Recordamos del cálculo que si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase \mathcal{C}^1 , A es una región en \mathbb{R}^2 tal que $\gamma([a, b]) \subset A$ y $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces se definen las siguientes integrales de línea:

$$\int_{\gamma} g(x, y) dx = \int_a^b g(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

y

$$\int_{\gamma} g(x, y) dy = \int_a^b g(x(t), y(t)) y'(t) dt,$$

donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Proposición 2.1. Sean f , A y γ como arriba, y escribamos $f = u + iv$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\gamma} [u(x, y) dy + v(x, y) dx].$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] \\ &= [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] \\ &\quad + i [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una forma de recordar la fórmula anterior es escribir

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(u dy + v dx).$$

Escribiremos algunas veces $\int_{\gamma} f$ por $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Obsérvese que si $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ son curvas tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, la curva $\gamma_1 + \gamma_2: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Si esta nueva curva está en el dominio de continuidad de una función compleja f , se sigue directamente de la definición y de la misma propiedad para integrales reales que

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Teorema 2.2. Sea A una región en \mathbb{C} , $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas y γ una curva en A de clase C^1 por tramos, entonces:

$$i) \int_{\gamma} (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_{\gamma} f + c_2 \int_{\gamma} g \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

$$ii) \int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f.$$

donde $-\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$, es decir $-\gamma$ recorre la misma curva que γ , pero en sentido contrario.

DEMOSTRACIÓN. La segunda propiedad es una consecuencia directa del teorema de cambio de variable real. Para la primera propiedad basta demostrar que

$$\int_{\gamma} cf = c \int_{\gamma} f, \quad \forall c \in \mathbb{C},$$

puesto que se sigue directamente de la definición que la integral es aditiva. Esta última propiedad se sigue de la siguiente afirmación: dada $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\int_a^b ch(t) dt = c \int_a^b h(t) dt,$$

ya que entonces

$$\int_{\gamma} cf = \int_a^b cf(\gamma(t))\gamma'(t) dt = c \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = c \int_{\gamma} f.$$

Finalmente, probamos la afirmación. Si $c = \alpha + i\beta$ y $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$,

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\alpha + i\beta)(h_1(t) + ih_2(t)) dt = \\ & \int_a^b [\alpha h_1(t) - \beta h_2(t)] dt + i \int_a^b [\alpha h_2(t) + \beta h_1(t)] dt = \\ & (\alpha + i\beta) \left(\int_a^b h_1(t) dt + i \int_a^b h_2(t) dt \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Usaremos el siguiente resultado de cálculo para probar que la integral compleja no depende de la parametrización. Recordamos del cálculo que una parametrización unitaria es aquella con vectores tangentes unitarios.

Teorema 2.3 (Parametrización unitaria). *Sea C la curva descrita por la función $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , y con derivada no nula en todo $[a, b]$. Si $\ell: [a, b] \rightarrow [0, \ell(C)]$ es la función longitud, i. e. $\ell(t) = \int_a^t |g'(s)| ds$, y $\varphi = \ell^{-1}$, entonces la parametrización de C dada por $g \circ \varphi: [0, \ell(C)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es unitaria. Obsérvese que $\forall t \in [0, \ell(C)]$ $g \circ \varphi(t)$ es el punto que se encuentra a una distancia t de $g(a)$ a lo largo de C .*

Corolario 2.1. *Sean $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 2 parametrizaciones de una curva C , de clase C^1 , tales que $g'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$, $f'(t) \neq 0$, $\forall t \in [c, d]$, $g(a) = f(c)$ y $g(b) = f(d)$. Entonces existe un difeomorfismo $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $f \circ h = g$*

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Por el teorema de parametrización unitaria existen difeomorfismos $\varphi_1: [0, \ell(C)] \rightarrow [a, b]$ y $\varphi_2: [0, \ell(C)] \rightarrow [c, d]$ tales que $g \circ \varphi_1$ y $f \circ \varphi_2$ son parametrizaciones unitarias. Debido a la descripción de una parametrización unitaria $g \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$, por lo tanto, $g \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = f$. \blacksquare

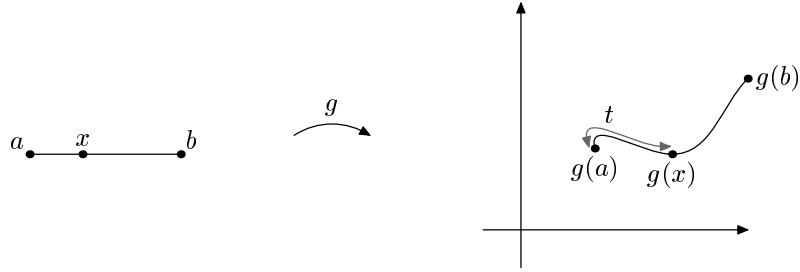


Figura 2.1: $x \in [a, b]$ corresponde al punto t , que es la distancia de $g(a)$ a $g(x)$.

Ahora sean A una región en \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $g_1: [a_1, b_1] \rightarrow A$, $g_2: [a_2, b_2] \rightarrow A$ dos parametrizaciones que recorren una curva γ en A en el mismo sentido, y que tienen derivada no nula. Se sigue entonces del corolario 2.1 que existe un difeomorfismo φ tal que $g_1 \circ \varphi = g_2$ y

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} f(g_1(t))g_1'(t) dt &= \int_{a_2}^{b_2} f(g_1(\varphi(s)))g_1'(\varphi(s))\varphi'(s) ds \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(g_2(s))g_2'(s) ds, \end{aligned}$$

como consecuencia del teorema de cambio de variable.

Se concluye que $\int_{\gamma} f$ no depende de la parametrización si γ' solo se anula en un número finito de puntos (se sobreentiende que las parametrizaciones recorren la curva en el mismo sentido).

Como ejemplo evaluamos $\int_{\gamma} x dz$, donde γ es el segmento que une 0 con $1+i$.

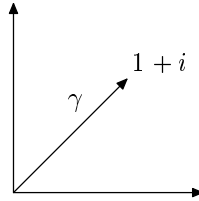


Figura 2.2: El segmento γ .

γ se puede parametrizar como $\gamma(t) = t + it$, $t \in [0, 1]$.

$$\int_{\gamma} x dz = \int_0^1 t(1+i) dt = \int_0^1 t dt + i \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(1+i).$$

Recordemos que la longitud de una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ esta dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Teorema 2.4. Sean A abierto en \mathbb{C} , $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ de clase C^1 por tramos y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua:

- i) Si $|f(\gamma(t))| \leq M, \quad \forall t \in [a, b]$, entonces $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \ell(\gamma)$.
- ii) $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$. Esta última integral se denota $\int_{\gamma} |f| |dz|$.

DEMOSTRACIÓN. i) es consecuencia de ii), por lo que solo demostraremos ii).

Ahora afirmamos que si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua entonces

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

Lo cual prueba ii), al tomar $g(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$.

Para demostrar la afirmación escribimos

$$\int_a^b g(t) dt = re^{i\theta},$$

lo cual implica, usando la afirmación de la prueba del teorema 2.2,

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt.$$

También

$$r = \operatorname{Re} r = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\theta} g(t)) dt,$$

como consecuencia de la definición de integral. Finalmente

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| = r = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\theta} g(t)) dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} g(t)| dt = \int_a^b |g(t)| dt.$$

(La desigualdad es una aplicación del mismo teorema para variable real). ■

Exhibimos ahora un importante método para evaluar integrales, análogo al teorema fundamental del cálculo.

Teorema 2.5. Sea $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua, supóngase también que $f = g'$, donde $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, y que $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ es una curva C^1 por tramos en A . Entonces

$$\int_{\gamma} f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

En particular, si $\gamma(b) = \gamma(a)$,

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (g \circ \gamma)'(t) dt \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como ejemplo evaluamos $\int_{\gamma} z^3 dz$, donde γ es el segmento de la elipse dada por $x^2 + 4y^2 = 1$ que une $z = 1$ y $z = i/2$. Gracias al teorema 2.5 no es necesario parametrizar la elipse, y como

$$z^3 = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^4}{4} \right),$$

$$\int_{\gamma} z^3 dz = \frac{1}{4} \left(\frac{i}{2} \right)^4 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^4} - 1 \right) = \frac{-15}{64}.$$

Convendremos al integrar elipses o círculos que estos son recorridos positivamente, i. e., en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Obsérvese también que se pudo haber usado cualquier otra curva que uniera 1 con $i/2$ y se hubiera obtenido el mismo resultado.

2.1.2 Ejemplos Desarrollados

1. Evaluar las siguientes integrales.

(a) $\int_{\gamma} x dz$, donde γ es el perímetro del cuadrado formado por los puntos 0 , 1 , $1+i$ e i .

(b) $\int_{\gamma} e^z dz$, donde γ es el arco que une 1 con i en el círculo unitario.

Solución.

(a) Se parametriza γ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 + (t-1)i & 1 \leq t \leq 2, \\ (3-t) + i & 2 \leq t \leq 3, \\ (4-t)i & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x dz &= \sum_{j=0}^3 \int_j^{j+1} \operatorname{Re}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^1 t dt + i \int_1^2 dt + \int_2^3 (3-t)(-1) dt + 0 \int_3^4 (-1) dt \\ &= \frac{1}{2} + i + \left(\frac{t^2}{2} - 3t \right) \Big|_2^3 = i. \end{aligned}$$

(b) $\int_{\gamma} e^z dz = e^i - e^1$. Esta integral también se puede evaluar directamente:

Se parametriza γ como $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^z dz &= \int_0^{\pi/2} e^{\cos t + i \operatorname{sen} t} (-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{\cos t} [\cos(\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)(\cos t)] dt \\ &\quad + i \int_0^{\pi/2} e^{\cos t} [\cos(\operatorname{sen} t)(\cos t) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t)] dt \\ &= e^{\cos t} \cos(\operatorname{sen} t) \Big|_0^{\pi/2} + i [e^{\cos t} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)] \Big|_0^{\pi/2} = e^{\cos t + i \operatorname{sen} t} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= e^i - e^1. \end{aligned}$$

2. Sea γ el semicírculo superior unitario recorrido en el sentido positivo, mostrar que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e.$$

Solución. Si $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$

$$\left| \frac{e^z}{z} \right| = \frac{e^{\cos t}}{1} \leq e, \quad \text{y} \quad \ell(\gamma) = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)| dt = \pi,$$

puesto que

$$|\gamma'(t)| = |ie^{it}| = 1,$$

por lo que el teorema 2.4 implica la desigualdad.

3. Sea γ el círculo de radio r alrededor de $a \in \mathbb{C}$, demuestre que la siguiente igualdad se cumple:

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

Solución. Se consideran dos casos:

i) Si $n \geq 0$ ó $n \leq -2$,

$$(z - a)^n = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{n+1} (z - a)^{n+1} \right)$$

en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, y por el teorema 2.5

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = 0.$$

ii) Si $n = -1$, parametrizando γ como $\gamma(\theta) = re^{i\theta} + a$, $\theta \in [0, 2\pi]$, se tiene que $\gamma'(t) = ire^{i\theta}$ y

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{(re^{i\theta} + a) - a} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

4. Demuestre que no existe ninguna función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ cuya derivada sea $\frac{1}{z}$.

Solución. Usando el teorema 2.5, si dicha función existiera se tendría

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0,$$

donde γ es el círculo unitario, sin embargo, esto contradice el cálculo hecho en el ejemplo anterior.

Obsérvese que la identidad

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}$$

es válida solamente en el dominio de analiticidad de alguna rama de logaritmo. Como ya se discutió, el logaritmo no es una función continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y por lo tanto tampoco es analítica en dicho dominio.

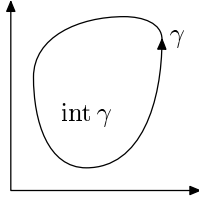
2.2 Teorema de Cauchy. Versión Intuitiva

2.2.1 Demostración Usando el Teorema de Green

Consideraremos solamente curvas \mathcal{C}^1 por tramos a menos que se especifique lo contrario.

Una curva simple cerrada es una curva continua que solo se autointersecta en sus puntos finales, es decir, si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización de dicha curva, la única autointersección es $\gamma(a) = \gamma(b)$.

En esta sección hablaremos del 'interior' de una curva simple cerrada γ de una manera intuitiva. Se demuestra en topología (Teorema de Jordan) que una

Figura 2.3: El interior de una curva γ .

curva simple cerrada divide a \mathbb{C} en dos componentes, a la componente acotada se le llama el interior de γ y a la no acotada se le llama el exterior. Se denotan $\text{int } \gamma$ y $\text{ext } \gamma$, respectivamente.

La forma más sencilla de demostrar el teorema de Cauchy es por medio del teorema de Green. Este teorema establece que si A es un abierto en \mathbb{C} que contiene a una curva \mathcal{C}^1 por tramos γ y a su interior, y se tienen definidas dos funciones reales P y Q de clase \mathcal{C}^1 en A , resulta que

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\text{int } \gamma \cup \gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dA.$$

Teorema 2.6 (Teorema de Cauchy). Sean γ una curva simple cerrada \mathcal{C}^1 por tramos, A una región en \mathbb{C} que contiene a γ y a su interior, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica con f' continua; entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Se verá después que la condición f' continua es consecuencia de que f sea analítica.

DEMOSTRACIÓN. Escribiendo $f = u + iv$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \left[\int_{\gamma} u dy + v dx \right] \\ &= \int_{\text{int } \gamma \cup \gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA + i \int_{\text{int } \gamma \cup \gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA = 0. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es consecuencia del teorema de Green, la última de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Obsérvese que si f no es analítica en $\text{int } \gamma$, $\int_{\gamma} f$ no es necesariamente cero, por ejemplo, como se vio antes, $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, donde γ es el círculo unitario.

Como ejemplo de la utilidad del teorema de Cauchy, consideremos la función $f(z) = \operatorname{sen}(e^{z^2})$, y γ el cuadrado unitario, entonces como f es entera tenemos, sin necesidad de calcular,

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen}(e^{z^2}) dz = 0.$$

Teorema 2.7 (Teorema de la Deformación). *Sea f analítica en una región A que contiene una curva simple cerrada γ (C^1 por tramos), y supóngase también que γ puede ser deformada continuamente en A a otra curva simple cerrada γ' (C^1 por tramos). Entonces*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma'} f.$$

Esta deformación se expresa matemáticamente diciendo que γ es homotópica a γ' . Después daremos una definición precisa.

DEMOSTRACIÓN. Se traza una curva auxiliar γ_0 como en la figura 2.4.

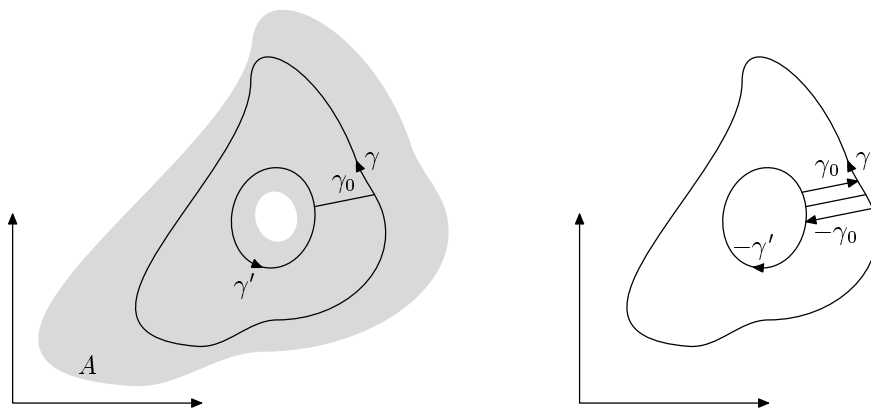


Figura 2.4: Demostración del teorema de la deformación

A la curva $\gamma + \gamma_0 - \gamma' - \gamma_0$ se le puede aplicar el teorema de Cauchy (aunque esta curva no es simple cerrada, se pueden tomar copias paralelas a γ_0 como en la figura y después tomar el límite), obteniéndose

$$\int_{\gamma + \gamma_0 - \gamma' - \gamma_0} f = 0,$$

$$\int_{\gamma} f + \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma'} f - \int_{\gamma_0} f = 0$$

lo cual implica

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma'} f. \quad \blacksquare$$

2.2.2 Regiones Simplemente Conexas

Definición 2.4. Una región A en \mathbb{C} es simplemente conexa si toda curva cerrada γ en A se puede deformar (en A) a una curva constante (es decir, un punto). En este caso se dice que γ es homotópica a un punto.

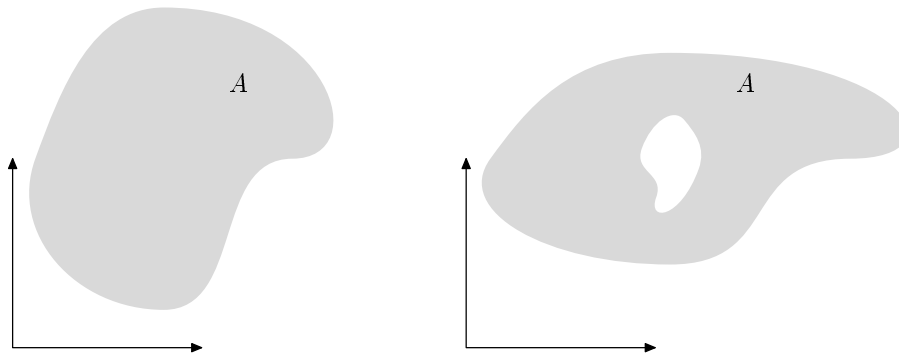


Figura 2.5: La región de la izquierda es simplemente conexa y la de la derecha no.

Intuitivamente A es simplemente conexa si no tiene ‘hoyos’.

Con esta definición, el teorema de Cauchy se puede reescribir como sigue: Sea f analítica en una región simplemente conexa A y γ una curva cerrada en A (\mathcal{C}^1 por tramos), entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

2.2.3 Independencia de Trayectorias y Antiderivadas

Teorema 2.8. Sea A una región simplemente conexa en \mathbb{C} y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, entonces si γ_1 y γ_2 son dos curvas \mathcal{C}^1 por tramos que unen z_1 con z_2 en A , se tiene

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

DEMOSTRACIÓN. Si γ_1 y γ_2 no se intersectan, sea $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, entonces

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0.$$

Si estas curvas se intersectan en un número finito de puntos, claramente se puede generalizar este argumento. El caso general se probará en el teorema 2.17. ■

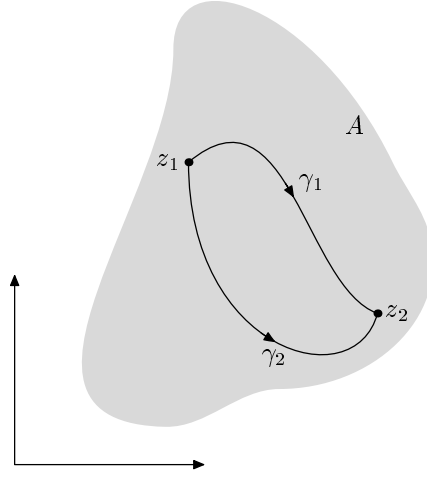


Figura 2.6: Dos curvas que unen z_1 con z_2 en A .

Para algunos dominios las funciones analíticas son derivadas de otras funciones.

Teorema 2.9. *Sea A una región simplemente conexa y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, entonces existe $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $g' = f$, además, g es única salvo una constante.*

DEMOSTRACIÓN. La unicidad es inmediata: Si $g_1, g_2: A \rightarrow \mathbb{C}$ satisfacen que $g_1' = g_2' = f$, se sigue del teorema 1.20 que $h(z) = g_1(z) - g_2(z)$ es una constante, pues $h'(z) = 0$.

Ahora se define

$$g(z) = \int_u^z f,$$

donde u es un punto fijo en A y dicha integral significa integrar f a lo largo de cualquier curva en A que une u con z . El teorema 2.8 nos asegura que la función g está bien definida.

Se tiene entonces, para $z, z_0 \in A$,

$$\begin{aligned} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) &= \frac{1}{z - z_0} \left(\int_u^z f - \int_u^{z_0} f \right) - f(z_0) \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f - \frac{f(z_0)}{z - z_0} \int_{z_0}^z 1 = \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z (f(w) - f(z_0)) dw. \end{aligned}$$

Finalmente, por continuidad, $\forall \varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que, si $|w - z_0| < \delta$, $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$. Por lo que tomando δ suficientemente pequeña, el segmento de línea que une z con z_0 está en A y, aplicando

el teorema 2.4, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{z_0}^z (f(w) - f(z_0)) dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} \cdot \varepsilon |z - z_0| = \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde g es analítica y $g'(z_0) = f(z_0)$. ■

Obsérvese que si A no es simplemente conexo el teorema 2.9 no es cierto: Como ya se dijo antes $f(z) = \frac{1}{z}$ no es la derivada de ninguna función en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Obsérvese también que la prueba es formal, y sólo depende de la validez del teorema de la deformación.

2.2.4 El Logaritmo

Teorema 2.10. *Sea A una región simplemente conexa que no contiene al 0, entonces existe $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $e^{F(z)} = z$. F es única salvo constantes de la forma $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Se escribe $F(z) = \log z$ y se llama a F una rama de logaritmo. Este proceso es más general que el descrito antes, por ejemplo, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ es simplemente conexo, pero este proceso vale también para regiones más complicadas como la descrita en la figura 2.7.

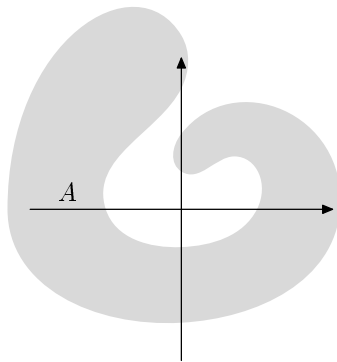


Figura 2.7: Un dominio para la definición ampliada de \log .

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2.9 existe una función analítica F definida en A tal que $F'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in A$. Ahora, fijando $z_0 \in A$, z_0 está en el dominio de una rama de logaritmo (según la definición de la sección 1.4) y se

puede redefinir F sumándole una constante, de tal modo que $F(z_0) = \log z_0$, por lo que $e^{F(z_0)} = z_0$.

Afirmamos que $e^{F(z)} = z$, $\forall z \in A$. Para demostrar esto tómesese

$$g(z) = \frac{e^{F(z)}}{z}.$$

Como $0 \notin A$, g es holomorfa en A y como $F'(z) = \frac{1}{z}$ se tiene

$$g'(z) = \frac{1}{z} \left(e^{F(z)} \right) \frac{1}{z} + e^{F(z)} \left(-\frac{1}{z^2} \right) = 0,$$

por lo que g es constante en A . Puesto que $g(z_0) = 1$, dicha constante es 1, por lo que $e^{F(z)} = z$, $\forall z \in A$.

Unicidad. Si $e^{F(z)} = z$ y $e^{G(z)} = z$, $\forall z \in A$, entonces $e^{F(z)-G(z)} = 1$. Tomando $z_0 \in A$ fijo,

$$F(z_0) - G(z_0) = 2\pi ni, \quad n \in \mathbb{Z},$$

y como $F'(z) - G'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0$,

$$F(z) = G(z) + 2\pi ni, \quad \forall z \in A.$$

($F'(z) = G'(z) = \frac{1}{z}$ puesto que $e^{F(z)} = e^{G(z)} = z$.) ■

Obsérvese que el logaritmo como se definió antes es un caso particular de la definición en el teorema 2.10, puesto que se tenía que $e^{\log z} = z$ en el dominio de alguna rama de logaritmo. La definición actual simplemente extiende los posibles dominios para el logaritmo.

Al igual que en el teorema anterior, esta demostración es totalmente formal, y s'olo depende de la validez del teorema de la deformación.

2.2.5 Ejemplos Desarrollados

1. Evaluar las siguientes integrales.

(a) $\int_{\gamma} e^z dz$, donde γ es el perímetro del cuadrado unitario.

(b) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$, donde γ es el círculo unitario.

(c) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, donde γ es el círculo $3 + e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(d) $\int_{\gamma} z^2 dz$, donde γ es el segmento que une $1 + i$ con 2 .

Solución.

(a) Como γ es simple cerrada y e^z es entera, por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma} e^z dz = 0.$$

Alternativamente, e^z es la derivada de e^z , por lo que

$$\int_{\gamma} e^z dz = 0.$$

(b) $\frac{1}{z^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z} \right)$, $\frac{-1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $0 \notin \gamma$, por lo cual

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

(c) $\frac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $(\gamma \cup \text{int } \gamma) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, por lo que el teorema de Cauchy implica que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Alternativamente $A = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$ es simplemente conexo, por lo que existe $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, que satisface $f' = \frac{1}{z}$ y entonces

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0.$$

(d) $z^2 = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^3}{3} \right)$ en \mathbb{C} , por lo que usando el teorema 2.5 se tiene

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{1+i}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{10-2i}{3}.$$

2. Usando el teorema de la deformación, demuestre de manera intuitiva que si γ es una curva simple cerrada que no contiene al cero pero lo contiene en su interior, se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Solución. Sea $\bar{\gamma} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, con r lo suficientemente pequeña para que el interior de este círculo contenga al interior de γ . Se intuye que γ se puede deformar continuamente a $\bar{\gamma}$, (esto probar usando los fundamentos de la topología algebraica), por lo que usando el teorema de la deformación se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

3. Haga un esbozo del teorema de la deformación generalizado como se indica aquí: Supóngase que $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son curvas simples cerradas en el interior de otra curva simple cerrada γ (como en la figura 2.8) y que f es analítica en una región que contiene a

$$\text{int } \gamma \cup \gamma \setminus \bigcup_{k=1}^n (\text{int } \gamma_k).$$

Entonces

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f.$$

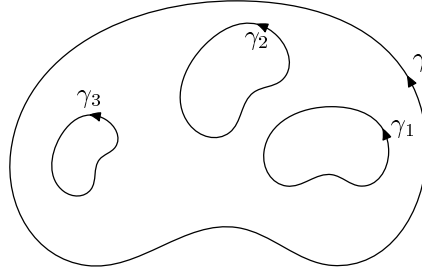


Figura 2.8: El teorema de la deformación generalizado

Solución. Primero se dibujan curvas auxiliares $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n$ que unan γ con $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ respectivamente, como se describe en la figura 2.9. Usando las curvas $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n$ se construye una curva simple cerrada ρ . (Véase la figura.)

Como el interior de ρ está contenido en el dominio de analiticidad de f se tiene

$$\int_{\rho} f = 0.$$

Además, salvo infinitesimales, ρ consiste de recorrer γ en la dirección original, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ en dirección opuesta y $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n$ en ambas direcciones. Estas últimas contribuciones se cancelan obteniéndose

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f.$$

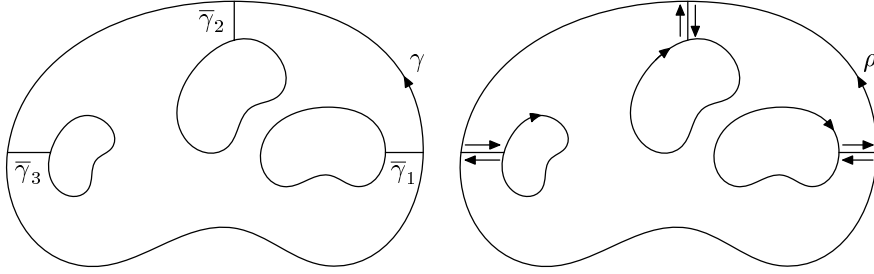


Figura 2.9: Curvas auxiliares para el teorema de la deformación generalizado

4. Sea A una región simplemente conexa, $z_0 \in A$, f analítica en $A \setminus \{z_0\}$, supóngase también que $|f(z)| < M$, $\forall z \in D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$. Demuestre que si γ es una curva simple cerrada en A que contiene en su interior a z_0 ,

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Solución. Por el teorema de la deformación, dada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña y $s_{\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$ se tiene, por el teorema 2.4,

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_{s_{\varepsilon}} f \right| \leq 2\pi M\varepsilon.$$

Como esto es cierto para toda ε , se tiene

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

2.3 Teorema de Cauchy. Versión Rigurosa

En esta sección discutiremos los teoremas de Cauchy de manera rigurosa. Se desarrollará la teoría para curvas cerradas sean simples o no, y no se usará el teorema de Green.

2.3.1 Versiones Locales

En esta sección ‘curva’ significará curva de clase \mathcal{C}^1 por tramos.

Teorema 2.11 (Lema de Goursat). Sean A un abierto en \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $R = [a, b] \times [c, d] \subset A$, entonces

$$\int_{\partial R} f = 0,$$

donde ∂R denota la frontera de R .

DEMOSTRACIÓN. Para cada rectángulo P en A , abreviaremos $\int_{\partial P} f$ como $I(P)$. Si bisebamos R dividiendo la base y la altura en 2 se obtienen 4 subrectángulos que denotamos por R_1 , R_2 , R_3 y R_4 .

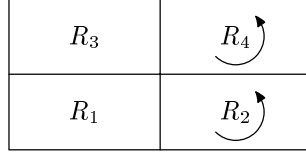


Figura 2.10: Proceso de bisección.

Como las fronteras comunes de los R_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, se cancelan

$$I(R) = \sum_{i=1}^4 I(R_i) \quad \text{y} \quad |I(R)| \leq \sum_{i=1}^4 |I(R_i)|,$$

por lo que alguno de los R_i satisface

$$|I(R_i)| \geq \frac{1}{4} |I(R)|.$$

Denotamos a dicho subrectángulo R^1 . Iterando este proceso se obtiene una sucesión de rectángulos $R, R^1, \dots, R^n, \dots$ tales que:

a) $R \supset R^1 \supset R^2 \dots$

b) $|I(R^k)| \geq \frac{1}{4^k} |I(R)|.$

c) R^k tiene diámetro $\frac{D}{2^k}$, donde D es el diámetro de R .

Se afirma que $\bigcap_{k=1}^{\infty} R^k$ consiste exactamente de un punto: Primero $\bigcap_{k=1}^{\infty} R^k$ no contiene mas de un punto, puesto que $\text{diam}(R^k) \rightarrow 0$. Ahora, para cada entero positivo k , se puede elegir $z_k \in R^k$. La sucesión $\{z_k\}$ es de Cauchy ya que $|z_k - z_l| \leq \frac{D}{2^k}$ si $l \geq k$. Por lo tanto, $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_k \rightarrow z_0$, y como cada R^k es cerrado, $z_0 \in R^k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, así que $z_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R^k$, es decir

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R^k = \{z_0\}.$$

Ahora,

$$\int_{\partial R^k} z dz = 0 = \int_{\partial R^k} dz,$$

por lo que

$$I(R^k) = \int_{\partial R^k} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) dz,$$

y como f es analítica en z_0 , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|,$$

si $|z - z_0| < \delta$.

Finalmente si k satisface $\frac{D}{2^k} < \delta$

$$|I(R^k)| \leq \frac{\varepsilon D}{2^k} \cdot \frac{\ell(\partial R)}{2^k},$$

por el teorema 2.4, de donde

$$|I(R)| \leq 4^k |I(R^k)| \leq 4^k \frac{\varepsilon D \ell(\partial R)}{4^k} = \varepsilon D \ell(\partial R),$$

lo cual implica $I(R) = 0$. ■

Obsérvese que no se necesita suponer que f' es continua para demostrar el teorema 2.11.

Ahora establecemos una generalización de este teorema.

Teorema 2.12. Sean A un abierto en \mathbb{C} , R un rectángulo contenido en A , $z_1 \in \text{int } R$ y f holomorfa en $A \setminus \{z_1\}$. Supóngase también que $\lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = 0$, entonces

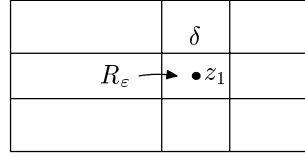
$$\int_{\partial R} f = 0.$$

La última hipótesis se satisface si $\lim_{z \rightarrow z_1} f(z)$ existe, o si f es acotada en una vecindad de z_1 .

DEMOSTRACIÓN. Dada $\varepsilon > 0$, sea R_ε un cuadrado de lado δ con centro en z_1 , donde δ se toma de tal manera que si $z \in R_\varepsilon$, $|z - z_1| |f(z)| < \varepsilon$.

Ahora,

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz,$$

Figura 2.11: El rectángulo R_ε .

puesto que $\int_{\partial R} f(z) dz$ es la suma de las integrales sobre las fronteras de los subrectángulos, y todas estas son cero, excepto quizá $\int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz$, por el teorema 2.11.

Finalmente, si $z \in \partial R_\varepsilon$, se tiene que

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_1|} \leq \frac{\varepsilon}{\delta/2} = \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

y

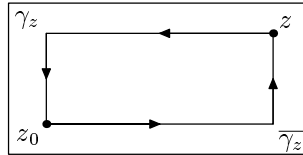
$$\left| \int_{\partial R_\varepsilon} f \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot \ell(\partial R_\varepsilon) = \frac{8\varepsilon\delta}{\delta} = 8\varepsilon,$$

por lo tanto $\int_{\partial R} f = 0$. ■

Obsérvese que el teorema 2.12 también es cierto si se reemplaza z_1 por un número finito de puntos en R .

Teorema 2.13 (Antiderivadas). Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $R = [a, b] \times [c, d] \subset A$, entonces existe $g: R \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $g' = f$ en R .

DEMOSTRACIÓN. Sea $z_0 \in R$ un punto fijo y para cada $z \in R$ sean γ_z y $\overline{\gamma_z}$ las poligonales que unen z_0 con z en R descritas en la figura 2.12.

Figura 2.12: Las poligonales γ_z y $\overline{\gamma_z}$.

Explícitamente, si $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} x_0 + i(y_0 + t(y - y_0)) & \text{si } t \in [0, 1], \\ x_0 + (t - 1)(x - x_0) + iy & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Ahora se define

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f.$$

Por el teorema 2.11,

$$\int_{\gamma_z} f = \int_{\bar{\gamma}_z} f.$$

Demostraremos que g es analítica y que

$$g'(z) = f(z).$$

Para hacer esto primero obsérvese que si $h \in \mathbb{R}$ es suficientemente pequeña

$$g(x+h, y) - g(x, y) = \int_{\sigma_h} f(x, y) dz,$$

donde σ_h es el segmento horizontal que une (x, y) con $(x+h, y)$, y como la variación vertical de σ_h es nula, se obtiene

$$g(x+h, y) - g(x, y) = \int_x^{x+h} f(t, y) dt,$$

al tomar x como parámetro para σ_h .

Por consiguiente

$$\frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, y) dt. \quad (2.1)$$

Se afirma que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, y) dt \right) = f(x, y).$$

Esto se demuestra en forma similar al teorema fundamental del cálculo: Por continuidad, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(t, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ si $|t - x| < \delta$.

Por lo cual, si $0 < h < \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, y) dt - f(x, y) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t, y) - f(x, y)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t, y) - f(x, y)| dt \leq \frac{\varepsilon h}{h} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(la primera desigualdad es cierta ya que $\int_x^{x+h} f(x, y) dt = hf(x, y)$, y la penúltima desigualdad se sigue de la prueba del teorema 2.4.)

El caso $h < 0$ se demuestra en forma similar y queda como ejercicio. Por consiguiente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, y) dt - f(x, y) \right) = 0,$$

y se sigue de (2.1) que si

$$g(x, y) = U(x, y) + iV(x, y),$$

se tendrá

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

Usando $\overline{\gamma_z}$ en lugar de γ_z se obtiene de manera similar

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -v \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u,$$

donde $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. (Ejercicio)

Finalmente, como u y v son continuas y las parciales de g existen y están relacionadas por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, g es analítica y

$$g' = f \quad \text{en } R. \quad \blacksquare$$

Corolario 2.2. *Suponiendo las hipótesis del teorema 2.13, si γ es una curva cerrada en R ,*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata del teorema 2.5 ■

Teorema 2.14. *Se puede generalizar el teorema 2.13, debilitando las hipótesis, suponiendo solamente que f es continua en A y analítica en $A \setminus \{z_1\}$, donde z_1 es un punto fijo arbitrario en R .*

DEMOSTRACIÓN. Como A es abierto se puede suponer que $z_1 \in \operatorname{int} R$ (tomando R un poco más grande si es necesario) y entonces usar el teorema 2.12 en lugar del 2.11. Obsérvese que es necesario que f sea continua para asegurar que las parciales de g lo son. ■

2.3.2 Homotopía y Regiones Simplemente Conexas

Definición 2.5. *Sea A una región en \mathbb{C} . Se dice que las curvas $\gamma_0: [a, b] \rightarrow A$ y $\gamma_1: [a, b] \rightarrow A$ son homotópicas (como curvas cerradas) en A si existe una función continua $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\forall t \in [0, 1], s \mapsto H(s, t)$ es una curva cerrada, $H(s, 0) = \gamma_0(s)$ y $H(s, 1) = \gamma_1(s)$.*

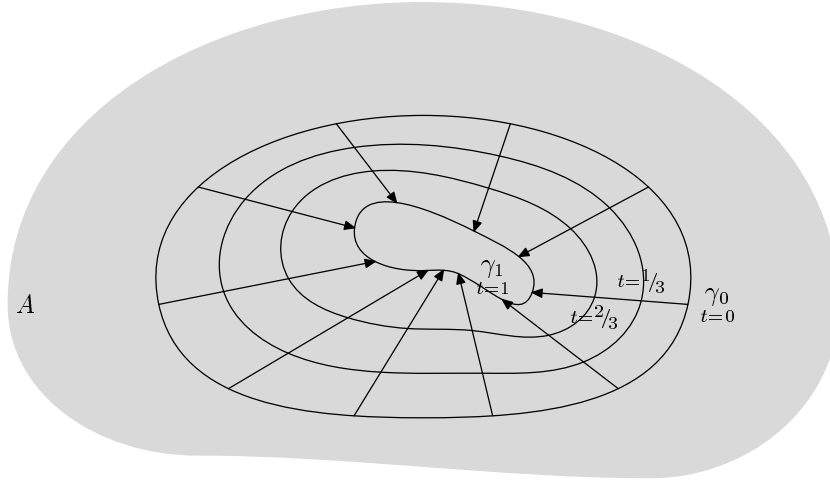


Figura 2.13: γ_0 es homotópica a γ_1 .

Esta definición exhibe la forma rigurosa de decir que γ_0 es deformable a γ_1 . Obsérvese que las curvas $s \mapsto H(s, t)$ se pueden autointerceptar, de hecho, la curva constante $\gamma(s) = z_0$ es una curva cerrada.

Definición 2.6. Sea A una región. Se dice que A es convexa, si, dados dos puntos cualesquiera en A , el segmento que los une también está en A . Esto es,

$$\forall z_1, z_2 \in A, \forall t \in [0, 1], \quad z_1 + t(z_2 - z_1) \in A.$$

Teorema 2.15. Sea A una región convexa en \mathbb{C} . Sean $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow A$ dos curvas cerradas, entonces γ_1 es homotópica a γ_2 en A .

DEMOSTRACIÓN. Se define una homotopía $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$H(s, t) = t\gamma_2(s) + (1 - t)\gamma_1(s),$$

para $0 \leq t \leq 1$. Como γ_1 y γ_2 son continuas también lo es H , además, para t fija,

$$H(a, t) = t\gamma_2(a) + (1 - t)\gamma_1(a) = t\gamma_2(b) + (1 - t)\gamma_1(b) = H(b, t),$$

por lo que $H|([a, b] \times \{t\})$ es una curva cerrada.

Finalmente

$$H(s, 1) = \gamma_2(s), \quad H(s, 0) = \gamma_1(s),$$

y como A es convexa, $\forall (s, t) \in [a, b] \times [0, 1], H(s, t) \in A$. ■

Como consecuencia inmediata de este teorema se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.3. Una región convexa es simplemente conexa.

2.3.3 Teorema de Cauchy

Demostraremos primero un caso particular del teorema de la deformación. Necesitamos para eso una definición.

Definición 2.7. Sea $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A \subset \mathbb{C}$ una homotopía de curvas cerradas. Se dice que la homotopía es de clase \mathcal{C}^1 por tramos si las restricciones de H a segmentos horizontales o verticales son de clase \mathcal{C}^1 por tramos.

Teorema 2.16 (De la deformación para homotopías \mathcal{C}^1 por tramos).

Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $\gamma_0: [a, b] \rightarrow A$ y $\gamma_1: [a, b] \rightarrow A$ curvas cerradas y $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ una homotopía \mathcal{C}^1 por tramos entre ellas. Entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Necesitamos un lema del análisis real, que se puede consultar, por ejemplo en Bartle [1].

Lema 2.1. Sea M un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , y sea $\{U_j\}_{j=1}^n$ una cubierta abierta de M . Entonces existe un número $\delta > 0$, llamado número de Lebesgue de la cubierta, tal que, si W es un subconjunto abierto de M de diámetro menor a δ , entonces $W \subset U_j$, para algún j .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. El conjunto compacto $H([a, b] \times [0, 1])$ se puede cubrir por medio de un conjunto finito de rectángulos abiertos R_j , con la propiedad de que, para cualquier j , $f|_{R_j} = F'$, donde F es una función analítica en $\overline{R_j}$. Esto se sigue del teorema de antiderivadas locales.

Ahora, la colección $\{H^{-1}(R_j)\}$ es una cubierta abierta de $[a, b] \times [0, 1]$. Sea U_j un abierto en \mathbb{R}^2 tal que $U_j \cap [a, b] \times [0, 1] = H^{-1}(R_j)$, y sea δ el número de Lebesgue de la colección $\{U_j\}$.

Sea $\{W_i\}$ una colección de subrectángulos de $[a, b] \times [0, 1]$ definida por una retícula de diámetro menor a δ .

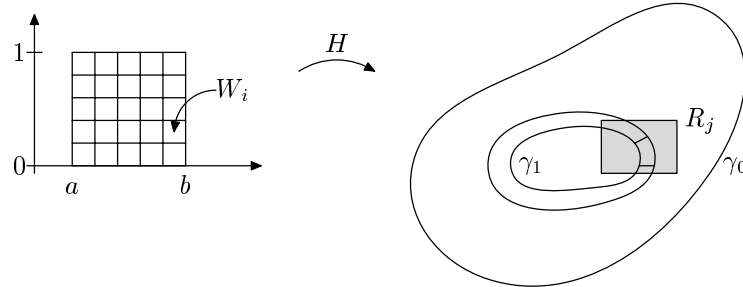


Figura 2.14: La colección $\{W_i\}$.

Obsérvese que como, para cada i , $W_i \subset H^{-1}(R_j)$ para alguna j , se tiene que $H(W_i) \subset R_j$, y dado que $H(\partial W_i)$ es una curva \mathcal{C}^1 por tramos,

$$\int_{H(\partial W_i)} f = 0.$$

Por consiguiente

$$0 = \sum_i \int_{H(\partial W_i)} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f.$$

Observación. Las curvas $H(\partial W_i)$ pueden intersectarse unas con otras, pero esto no afecta el argumento. ■

Para probar el teorema de la deformación en su forma general probaremos primero que toda curva continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se puede aproximar por otra curva $\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, \mathcal{C}^1 por tramos. Mas precisamente,

Lema 2.2. *Para cualquier $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, dada $\varepsilon > 0$, existe una curva $\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, \mathcal{C}^1 por tramos, tal que $|\lambda(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$ para toda $t \in [a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad uniforme existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que, para $i = 1, 2, \dots, n$, se tiene

$$\gamma(t) \in D(\gamma(t_i), \varepsilon), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_{i+1}].$$

Se define una curva λ de clase \mathcal{C}^1 por tramos de la siguiente manera: Para toda $k = 1, 2, \dots, n$, definimos

$$\lambda|_{(t_{k-1}, t_k)} = \psi_k \circ \phi_k,$$

donde $\phi_k: [t_{k-1}, t_k] \rightarrow [0, 1]$ está dada por

$$\phi_k(t) = \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}},$$

y $\psi_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\psi_k(s) = s\gamma(t_k) + (1-s)\gamma(t_{k-1}).$$

De esta manera, $\lambda|_{[t_{k-1}, t_k]}$ describe el segmento que une $\gamma(t_{k-1})$ con $\gamma(t_k)$. Además, es una composición de funciones afines, y es, por lo tanto, de clase \mathcal{C}^1 , es decir, λ es de clase \mathcal{C}^1 por tramos.

Ahora, para cualquier $t \in (t_{k-1}, t_k)$, considérese el triángulo formado por $\gamma(t)$, $\gamma(t_{k-1})$ y $\gamma(t_k)$. Como los tres lados del triángulo son, por construcción, menores que ε , y $\lambda(t)$ está en el segmento que une $\gamma(t_{k-1})$ con $\gamma(t_k)$ se tiene

$$|\gamma(t) - \lambda(t)| < \varepsilon$$

Esto concluye la prueba ■

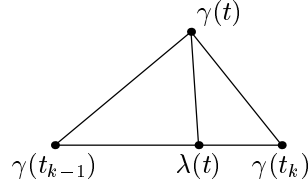


Figura 2.15: Aproximación con una curva \mathcal{C}^1 por tramos.

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ es una curva continua, donde A es una región en \mathbb{C} , entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $|z - \gamma(t)| < \varepsilon$ para alguna $t \in [a, b]$, entonces $z \in A$. Esta afirmación se sigue del siguiente lema.

Lema 2.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $B \subset \mathbb{C}$ subconjuntos de \mathbb{C} , A compacto y B cerrado, tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces existen $u \in A$ y $v \in B$, tales que $|u - v| \leq |z - w|$, para cualesquiera $z \in A$, $w \in B$.

DEMOSTRACIÓN. Se puede suponer que B también es compacto, puesto que, si $z_0 \in B$, y $M = \text{diam}(A \cup \{z_0\})$, se tiene que $D(z_0, 2M) \cap B$, que es compacto, contiene a todos los puntos de B que estén más cerca de A que z_0 . Para demostrar esta afirmación tomese $z_1 \in B$, tal que

$$d(z_1, A) < d(z_0, A).$$

Como la función distancia es continua, y A es compacto, existe $w_1 \in A$ tal que

$$d(z_1, A) = d(z_1, w_1),$$

por lo tanto,

$$d(z_1, z_0) \leq d(z_1, w_1) + d(w_1, z_0) < 2M.$$

Finalmente, si B es compacto, $A \times B$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^4 , ya que, si $A \subset D(0, r_1)$ y $B \subset D(0, r_2)$, $A \times B \subset D(0, \sqrt{r_1^2 + r_2^2})$, y si $\{(z_n, w_n)\} \rightarrow (z, w)$, con $z_n \in A$ y $w_n \in B$, entonces $(z, w) \in A \times B$, por lo que el lema es consecuencia de que la función $(z, w) \mapsto |z - w|$ es continua. ■

Ahora consideremos A una región en \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una curva continua, $\varepsilon = d(\gamma([a, b]), A^c)$ y λ_1, λ_2 dos curvas de clase \mathcal{C}^1 por tramos ε - cercanas a γ , i. e. $|\lambda_i(s) - \gamma(s)| < \varepsilon$, para cualquier s , $i = 1, 2$. Se sigue del lema que ambas curvas están en A .

Definimos una homotopía entre λ_1 y λ_2 como sigue:

$$H(s, t) = t\lambda_1(s) + (1 - t)\lambda_2(s).$$

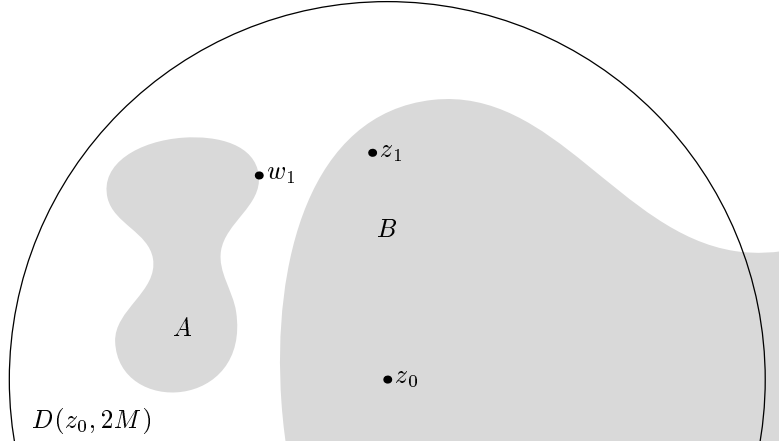


Figura 2.16: Se puede suponer que B es compacto.

Es claro que esta homotopía es de clase \mathcal{C}^1 por tramos cuando se restringe a segmentos verticales y horizontales, además H toma valores en A , puesto que

$$\begin{aligned} |H(s, t) - \gamma(s)| &= |t\lambda_1(s) + (1-t)\lambda_2(s) - \gamma(s)| = \\ &= |t(\lambda_1(s) - \gamma(s)) + (1-t)(\lambda_2(s) - \gamma(s))| \leq t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\int_{\lambda_1} f = \int_{\lambda_2} f.$$

Definición 2.8. Sean A , f , γ y ε como arriba, y λ , una curva de clase \mathcal{C}^1 por tramos, ε -cercana a γ , se define

$$\int_{\gamma} f = \int_{\lambda} f.$$

Las observaciones anteriores muestran que esta integral está bien definida. Finalmente, probaremos el teorema de la deformación.

Teorema 2.17 (Teorema de la Deformación). Sean A una región, γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas de clase \mathcal{C}^1 por tramos homotópicas como curvas cerradas en A y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, entonces

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ una homotopía de curvas cerradas entre γ_1 y γ_2 . Sea

$$\varepsilon = d(H([a, b] \times [0, 1]), A^c).$$

Como H es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)| < \delta$$

entonces

$$|H(s_1, t_1) - H(s_2, t_2)| < \varepsilon/2.$$

Sean $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tales que

$$|t_j - t_{j+1}| < \delta$$

para cualquier $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, y denotemos por γ_{t_j} a $H|([a, b] \times t_j)$. Obsérvese que

$$|\gamma_{t_j}(s) - \gamma_{t_{j+1}}(s)| < \varepsilon/2,$$

para cualquier j .

Ahora, la curva γ_1 es \mathcal{C}^1 por tramos, mientras que γ_{t_1} puede ser solo continua, pero puesto que, por construcción son $\varepsilon/2$ -cercanas, se sigue de la definición que

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_{t_1}} f,$$

ya que $d(\gamma_{t_1}([a, b]), A^c) \geq \varepsilon$.

Finalmente, si λ_1 , una curva de clase \mathcal{C}^1 por tramos, es $\varepsilon/2$ -cercana a γ_{t_1} , entonces es ε -cercana a γ_{t_2} , ya que

$$|\gamma_{t_2}(s) - \lambda_1(s)| \leq |\gamma_{t_2}(s) - \gamma_{t_1}(s)| + |\gamma_{t_1}(s) - \lambda_1(s)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

por lo que

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_{t_1}} f = \int_{\lambda_1} f = \int_{\gamma_{t_2}} f.$$

Repetiendo este proceso se obtiene el resultado deseado.

Obsérvese que como $\forall j, d(\gamma_{t_j}([a, b]), A^c) \geq d(H([a, b] \times [0, 1]), A^c) = \varepsilon$ se sigue que si λ_j es \mathcal{C}^1 por tramos, ε -cercana a γ_{t_j} , entonces

$$\int_{\gamma_{t_j}} f = \int_{\lambda_j} f. \quad \blacksquare$$

Ahora que tenemos una prueba rigurosa del teorema de la deformación, podemos usarlo para demostrar el teorema de Cauchy.

Teorema 2.18 (Cauchy). Sean A una región, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y γ una curva en A que es homotópica a un punto en A , entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

En particular, si A es simplemente conexo y γ es cualquier curva cerrada en A entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ es homotópica a $\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow A$, $\bar{\gamma}(t) = z_0$, para algún $z_0 \in A$, se tiene directamente

$$\int_{\bar{\gamma}} f = 0,$$

y por el teorema de la deformación

$$\int_{\gamma} f = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.19 (Antiderivadas). *Sea A una región simplemente conexa y sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, entonces existe $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que, $\forall z \in A$,*

$$g'(z) = f(z).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración del teorema 2.9 fue rigurosa salvo que dependía de la independencia de trayectorias, que a su vez depende del teorema de Cauchy. Habiendo establecido formalmente el teorema de Cauchy en su generalidad se sigue pues el resultado. \blacksquare

Una vez establecida la validez del teorema 2.9 (o 2.19) se sigue también la validez del teorema 2.10.

Es importante mencionar el teorema de Schönflies, que complementa el teorema de Jordan de la siguiente manera: Dada γ una curva simple cerrada en \mathbb{C} , el interior de γ es simplemente conexo. Esto por supuesto nos permite integrar en dichos dominios de forma inmediata.

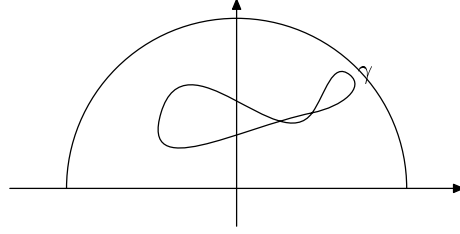
2.3.4 Ejemplos Desarrollados

1. Sea A la región acotada por el eje X y la curva

$$\sigma(\theta) = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

donde $R > 0$; y sea $f(z) = \frac{e^z}{(2R - z)^2}$. Entonces, para toda curva cerrada γ en A ,

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Figura 2.17: γ es homotópica a 0.

Solución. Como f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{2R\}$, y $2R \notin A$, f es analítica en A , y como A es simplemente conexo por el teorema de Schönflies, dicha integral es cero.

Otra manera de mostrar que A es simplemente conexo consiste en probar la convexidad: Si $z_1, z_2 \in A$,

$$|tz_1 + (1-t)z_2| \leq t|z_1| + (1-t)|z_2| \leq tR + (1-t)R = R,$$

para cualquier $t \in [0, 1]$. (Ciertamente $tz_1 + (1-t)z_2$ está en el semiplano superior).

2. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 4\}$. Demuestre que A no es simplemente conexo, y que los círculos $|z| = 2$ y $|z| = 3$ son homotópicos en A .

Solución. $\frac{1}{z}$ es analítica en A . Si A fuera simplemente conexo, se tendr'ia que

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z} dz = 0,$$

lo cual ya se probó es falso. Por otra parte,

$$H(t, s) = 2e^{it} + se^{it},$$

con $t \in [0, 2\pi)$, y $s \in [0, 1]$ es una homotopía entre $|z| = 2$ y $|z| = 3$ en A .

3. Sean γ el círculo unitario $|z| = 1$, γ_1, γ_2 los dos círculos de radio $1/4$ con centros en $-1/2$ y $1/2$ respectivamente y A una región que contenga estas curvas y la región comprendida entre ellas. Supóngase también que $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, entonces

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Haga un esbozo de la demostración de este hecho.

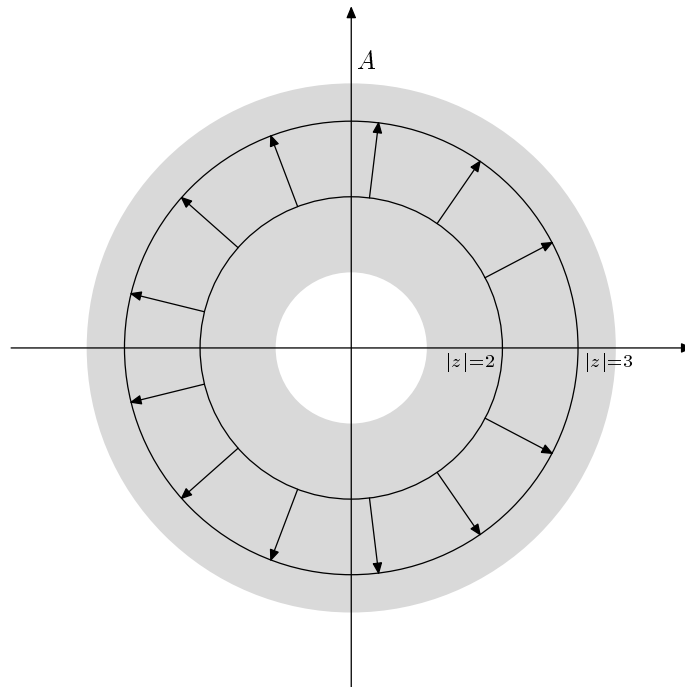


Figura 2.18: Homotopía entre $|z| = 2$ y $|z| = 3$.

Solución. Es geoméricamente claro que la curva $\bar{\gamma}$ descrita en la figura 2.20 es homotópica a γ . No es muy difícil formalizar esta afirmación. Una manera de obtener una homotopía explícita es la siguiente.

- Parametrizando γ procediendo como en la figura 2.20, a partir de una parametrización natural para $\bar{\gamma}$.
- Definiendo

$$H(t, s) = s\bar{\gamma}(t) + (1 - s)\gamma(t).$$

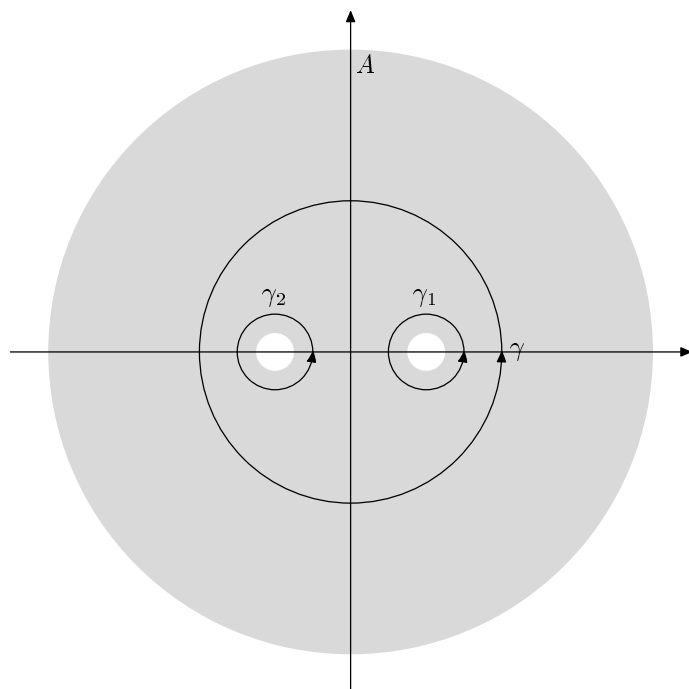
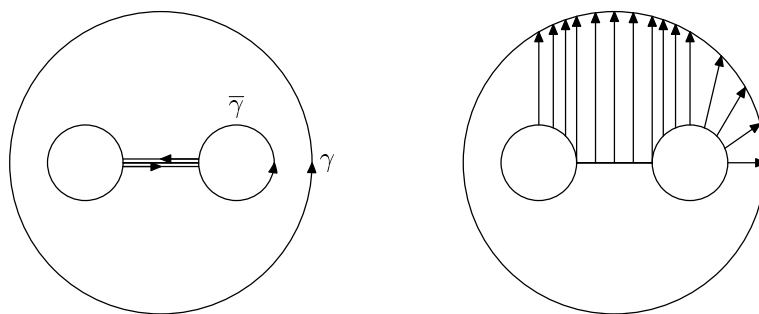
- Verificando que el segmento de recta que une $\gamma(t)$ y $\bar{\gamma}(t)$ está en A .

Ahora, por el teorema de la deformación,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\bar{\gamma}} f,$$

y, además,

$$\int_{\bar{\gamma}} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f,$$

Figura 2.19: La región A .Figura 2.20: La curva $\bar{\gamma}$ es homotópica a γ .

puesto que $\bar{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_0$, donde γ_0 es el segmento que une $-1/4$ con $1/4$. Obsérvese que $\bar{\gamma}$ no es simple, y sin embargo se aplica el teorema 2.17 (de la deformación).

En muchos casos es importante apelar a la intuición para encontrar homotopías, muchas de estas son fácilmente comprobadas mediante la topología algebraica.

2.4 Fórmula Integral de Cauchy

En esta sección se establece el hecho de que las funciones analíticas son de clase \mathcal{C}^∞ , y se da una demostración del teorema fundamental del álgebra.

2.4.1 Índice de una Curva Cerrada

Se definirá el índice de una curva cerrada γ con respecto a un punto z_0 fuera de γ . De manera intuitiva esto será el ‘número de vueltas’ que la curva efectúa alrededor del punto.

Para definir esta idea rigurosamente, recuérdese (de la sección 2.1) que

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 2\pi i & n = -1. \end{cases}$$

Esto se generaliza a curvas que consisten en recorrer n veces dicho círculo, por ejemplo, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, es una curva que rodea al cero n veces, y se tiene que

$$\int_{\gamma} z^{-1} = (2\pi i)n \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = n.$$

También, si γ' es una curva cerrada que rodea n veces al 0, $0 \notin \gamma'$ y γ es homotópica a γ' en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, resulta que entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{1}{z} dz = n$$

por el teorema de la deformación. Es intuitivamente claro que, como γ y γ' son homotópicas, rodean al cero el mismo número de veces.

Mas generalmente se puede demostrar, por ejemplo con topología algebraica elemental, que si γ es una curva cerrada que rodea z_0 n veces, entonces γ es homotópica a $\varphi(\theta) = z_0 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi n]$ y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = n$$

En particular, si γ es una curva simple cerrada que contiene a z_0 en su interior,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 1.$$

Por otra parte, si $z_0 \in \text{ext } \gamma$ los teoremas de Cauchy, Jordan y Schönflies implican que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 0.$$

Estas ideas desembocan en la siguiente:

Definición 2.9. Sea γ una curva cerrada en \mathbb{C} , y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. El índice o número de vueltas de γ con respecto a z_0 se define como

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

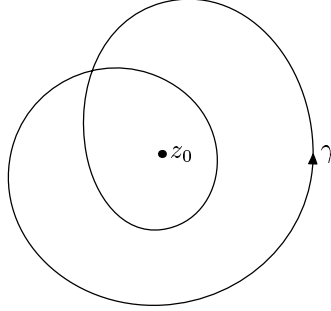


Figura 2.21: $I(\gamma, z_0) = 2$. γ 'da dos vueltas' a z_0 .

Las observaciones anteriores muestran que el círculo

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi n, \quad n > 0,$$

tiene índice n con respecto a z_0 , y el círculo

$$-\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$$

tiene índice $-n$.

Además si γ y γ' son dos curvas que no pasan por z_0 y γ es homotópica a γ' en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ entonces

$$I(\gamma, z_0) = I(\gamma', z_0),$$

por el teorema de la deformación.

Teorema 2.20. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ una curva cerrada, entonces

$$I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

(i. e. $I(\gamma, z_0) = \frac{g(b)}{2\pi i}$.) Aplicando el teorema fundamental del cálculo a las partes real e imaginaria del integrando, se tiene

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0},$$

si $t \in [a, b]$ y γ es de clase \mathcal{C}^1 en una vecindad de t , por lo cual en dichos puntos

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) \right) = e^{-g(t)} \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} (\gamma(t) - z_0) + e^{-g(t)} \gamma'(t) = 0.$$

y $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ es constante por tramos, sin embargo dicha función es continua, puesto que $g(t)$ es continua, (esto se sigue de la definición de curva \mathcal{C}^1 por tramos y de la continuidad de integrales con discontinuidades simples).

Se concluye que $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ es constante, en particular

$$e^{-g(a)} (\gamma(a) - z_0) = e^{-g(b)} (\gamma(b) - z_0),$$

y como $\gamma(a) = \gamma(b)$, $e^{-g(b)} = e^{-g(a)} = e^0 = 1$, de donde se tiene que $g(b) = 2\pi ni$, con $n \in \mathbb{Z}$, i. e.

$$I(\gamma, z_0) = n. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que si γ es una curva simple cerrada entonces

$$\text{int } \gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid I(\gamma, z) \neq 0\},$$

es decir, se puede definir el interior de una curva en forma analítica y no topológica, usando la integral que define el índice.

2.4.2 Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 2.21 (Fórmula de Cauchy para la integral). *Sea A una región, γ una curva cerrada homotópica a un punto en A , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in A \setminus \gamma$, entonces*

$$f(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Esta fórmula se aplica especialmente cuando γ es una curva simple y z_0 es un punto del interior de γ , obteniéndose

$$f(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Esta última fórmula es realmente espectacular, dice que los valores que toma f en γ , determinan los valores de f en el interior de γ .

DEMOSTRACIÓN. El teorema de Cauchy se generaliza para regiones donde f es analítica excepto posiblemente en un punto, la razón es que la herramienta que se usa para demostrarlo es el teorema de antiderivadas locales (teorema 2.13), el cual puede ser substituido por el teorema 2.14 (este permite que la función sea s'olo continua en un punto aislado).

Se define

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

g es analítica en $A \setminus \{z_0\}$ y continua en A . La observación anterior implica que

$$\int_{\gamma} g = 0.$$

Por lo cual

$$0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0)I(\gamma, z_0). \quad \blacksquare$$

Es importante observar que esta fórmula es útil para calcular integrales, por ejemplo,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

2.4.3 Las Funciones Analíticas son C^∞

Para poder establecer el hecho de que las funciones analíticas tienen derivadas de todos los órdenes se necesita un importante lema. Al lector no familiarizado con convergencia de funciones, se le sugiere leer la demostración una vez comprendida la primera parte del capítulo 3.

Lema 2.4 (Integrales de tipo Cauchy). Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva, φ una función continua definida en $\gamma([a, b])$ y

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w)(w - z)^n dw,$$

entonces g es analítica y C^∞ en el sentido complejo en $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Además, si $n = -1$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$g^{(k)}(z) = k! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{k+1}} dw.$$

(Se puede recordar esta fórmula derivando respecto a z dentro del signo de integral.)

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el siguiente resultado, que será demostrado en el capítulo 3:

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una curva \mathcal{C}^1 por tramos en la región A , y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a una función f en $\gamma([a, b])$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.$$

Para demostrar el lema basta probar que, para cualquier $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ y cualquier $\{h_k\}$ sucesión que converja a cero, se tiene

$$\frac{g(z_0 + h_k) - g(z_0)}{h_k} \rightarrow -n \int_{\gamma} (w - z_0)^{n-1} \varphi(w) dw,$$

ya que esto implica que g es derivable en z_0 y que

$$g'(z_0) = -n \int_{\gamma} (w - z_0)^{n-1} \varphi(w) dw,$$

e iterando este proceso inductivamente se demuestra el lema.

Ahora,

$$\frac{g(z_0 + h_k) - g(z_0)}{h_k} = \int_{\gamma} \frac{(w - z_0 - h_k)^n - (w - z_0)^n}{h_k} \varphi(w) dw,$$

así que es suficiente demostrar que

$$\left(\frac{(w - z_0 - h_k)^n - (w - z_0)^n}{h_k} \right) \varphi(w) \rightarrow -n(w - z_0)^{n-1} \varphi(w)$$

uniformemente en γ , lo cual equivale a demostrar que

$$\frac{(w - z_0 - h_k)^n - (w - z_0)^n}{h_k} \rightarrow -n(w - z_0)^{n-1}$$

uniformemente en γ .

Escribimos, para abreviar, $a = w - z_0$.

Si $n > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{(a - h_k)^n - a^n}{h_k} + na^{n-1} \right| &= \\ \left| -na^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h_k - \binom{n}{3} a^{n-3} h_k^2 + \cdots + na^{n-1} \right| &\leq \\ c(|h_k| + |h_k|^2 + \cdots + |h_k|^{n-1}), & \end{aligned}$$

para alguna constante c . Esta última desigualdad se justifica por la compacidad de γ , que implica que $|a| = |w - z_0|$ está acotado. Como el último término no depende de w , esto demuestra la convergencia uniforme.

Si $n < 0$, escribiendo $m = -n$,

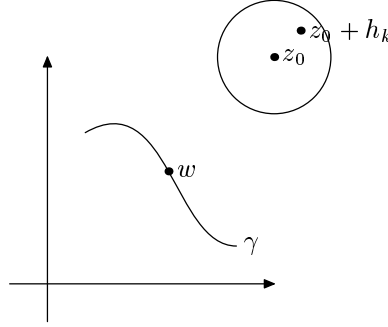


Figura 2.22: $z_0 + h_k$ queda fuera de γ .

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{(a - h_k)^n - a^n}{h_k} + na^{n-1} \right| &= \left| \frac{1}{h_k} \left(\frac{1}{(a - h_k)^m} - \frac{1}{a^m} \right) + na^{n-1} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{h_k} \left(\frac{a^m - (a - h_k)^m}{(a - h_k)^m a^m} \right) + na^{n-1} \right| \\
 &= \left| \frac{mh_k a^{m-1} - \binom{m}{2} h_k^2 a^{m-2} + \dots}{h_k (a - h_k)^m a^m} + na^{n-1} \right| \\
 &\leq \left| \frac{mh_k a^{m-1}}{h_k (a - h_k)^m a^m} + na^{n-1} \right| + c' (|h_k| + |h_k|^2 + \dots + |h_k|^m) \\
 &\leq \left| \frac{m}{(a - h_k)^m a} + na^{n-1} \right| + \frac{\varepsilon}{2},
 \end{aligned}$$

para alguna $\varepsilon > 0$, si k es suficientemente grande. La primera desigualdad se sigue de que $|a|$ y $|a - h_k|$ están acotadas inferiormente, debido a la compacidad de γ .

Finalmente

$$\left| \frac{m}{(a - h_k)^m a} - \frac{m}{a^{m+1}} \right| = \left| \frac{ma^m - m(a - h_k)^m}{(a - h_k)^m a^{m+1}} \right| \leq c'' |a^m - (a - h_k)^m|,$$

donde c'' es una constante. Esta última expresión converge uniformemente a 0, lo cual termina la demostración del lema. ■

Teorema 2.22 (Existencia de derivadas k-ésimas). Si f es una función holomorfa en una región A , entonces:

i) f tiene derivadas de todos los órdenes.

ii) $\forall z_0 \in A$ y para toda curva cerrada γ homotópica a un punto en A , si $z_0 \notin \gamma$ se tiene que, para cualquier $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw.$$

DEMOSTRACIÓN. Dada $z_0 \in A$, existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset A$. Denotando por $\bar{\gamma}$ a $\partial D(z_0, r)$, y ya que $I(\bar{\gamma}, z_0) = 1$, por la fórmula integral de Cauchy, $\forall z \in \text{int } \bar{\gamma}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Esta expresión nos permite usar el lema 2.4 y concluir que f es \mathcal{C}^∞ en $D(z_0, r)$, el lema también nos dice que

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw$$

es analítica y \mathcal{C}^∞ en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, de hecho es localmente constante por tomar valores enteros.

Ahora, por la fórmula integral de Cauchy, si $z \in A \setminus \gamma$,

$$f(z)I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

aplicando el lema a $G(z) = f(z)I(\gamma, z)$ se obtiene inductivamente que

$$G^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)I(\gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

2.4.4 Desigualdades de Cauchy y el Teorema de Liouville

Teorema 2.23 (Desigualdades de Cauchy). *Sea A una región en \mathbb{C} , sean $z_0 \in A$ y $R > 0$ tales que $D(z_0, R) \subset A$ y sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \partial D(z_0, r)$, entonces*

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k!}{R^k} M.$$

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por γ a la frontera de $D(z_0, R)$. Utilizando la fórmula para la derivada k -ésima se obtiene

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw,$$

y

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} \ell(\gamma) = k! \frac{M}{R^k}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.24 (Teorema de Liouville). *Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entera y acotada, entonces f es constante.*

Obsérvese que en el cálculo real esto no es cierto, por ejemplo, $f(x) = \text{sen}x$.

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el teorema 2.23 se tiene que, si $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ y } \forall R \in \mathbb{R},$$

por lo cual $f'(z) = 0$ y f es constante. ■

2.4.5 Teorema Fundamental del Algebra

Teorema 2.25 (Teorema fundamental del Algebra). *Sea*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

un polinomio con coeficientes complejos, $n \geq 1$, entonces p tiene una raíz, i. e., existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $p(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ entonces $\frac{1}{p(z)}$ es entera.

Ahora, si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{\frac{1}{z^n}}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}},$$

por lo que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = \frac{0}{a_n} = 0,$$

de donde existe M tal que, si $|z| > M$, $\left| \frac{1}{p(z)} \right| < \varepsilon$, así que $\frac{1}{p(z)}$ es acotada fuera de $D(0, M)$, y es acotada en $\overline{D(0, M)}$ pues éste es compacto, es decir $\frac{1}{p(z)}$ es acotada.

Entonces, por el teorema 2.24, $\frac{1}{p(z)}$ es constante, y por lo tanto p también, pero esto es una contradicción. ■

Existe un recíproco parcial al teorema de Cauchy llamado Teorema de Morera.

Teorema 2.26 (Teorema de Morera). *Sea f continua en una región A , supóngase también que $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada γ en A , entonces f es analítica en A y $f = g'$, para alguna g analítica en A .*

DEMOSTRACIÓN. La condición $\int_\gamma f = 0$ equivale la posibilidad de definir, fijando $z_0 \in A$, $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que

$$g(z) = \int_z^{z_0} f(z) dz.$$

Se demostró que bajo tales condiciones g es analítica y $g'(z) = f(z)$ (por el teorema 2.9). Ahora, por el teorema 2.22, g' también es analítica, por lo que $f = g'$ lo es. ■

Corolario 2.4. *Sea f continua en una región A y analítica en $A \setminus \{z_0\}$, entonces f es analítica en A .*

DEMOSTRACIÓN. Se demostró en el teorema 2.14 y en el corolario 2.2 que para toda curva cerrada γ contenida en el interior de cualquier rectángulo en A ,

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Dado cualquier $z \in A$, existe un rectángulo R_z en A que contiene a z en su interior, por lo que aplicando el teorema de Morera se obtiene que f es analítica en R_z y por consiguiente en A . ■

2.4.6 Ejemplos Desarrollados

1. Sea $\gamma(t) = (\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 4\pi]$. Demuestre de manera rigurosa que $I(\gamma, 0) = 2$.

Solución. Restringiendo el dominio a $[0, 2\pi]$, la función

$$H(t, s) = \cos t + i(3 - 2s) \operatorname{sen} t$$

es una homotopía entre γ y $\bar{\gamma}(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Denotando por γ_1 a la curva γ restringida a $[0, 2\pi]$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} \frac{1}{z} dz = 1,$$

por lo que $I(\gamma, 0) = 2$.

2. Evaluar

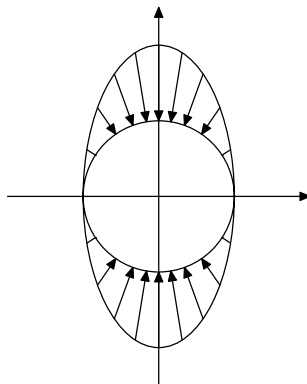
$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz \quad \text{y} \quad \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} dz.$$

Solución. $\cos z$ es una función entera, así que, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\cos(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = 1,$$

es decir,

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i.$$

Figura 2.23: Homotopía entre γ y $\bar{\gamma}$.

También, $|z| = 1$ es homotópica a un punto en el dominio de analiticidad de $\text{sen } z$, por lo que, usando la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada se tiene

$$\text{sen}'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\text{sen } z}{z^2} dz,$$

de donde

$$\int_{|z|=1} \frac{\text{sen } z}{z^2} dz = 2\pi i.$$

3. Evaluar

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + z}{z - 2} dz,$$

cuando γ es el círculo unitario y cuando γ es el círculo de radio 3 con centro en cero.

Solución. Si $\gamma = \{z \mid |z| = 1\}$, como f es analítica en $\gamma \cup \text{int } \gamma$,

$$\int_{\gamma} f = 0,$$

por el teorema de Cauchy.

Si $\gamma = \{z \mid |z| = 3\}$, γ es homotópica a $\bar{\gamma} = 2 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, en $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. No es difícil encontrar una homotopía, por ejemplo procediendo como en la figura 2.24.

Por lo tanto, $I(\gamma, 2) = 1$, y como γ es contraíble a un punto en el dominio de analiticidad de $e^z + z$, podemos aplicar la fórmula integral de

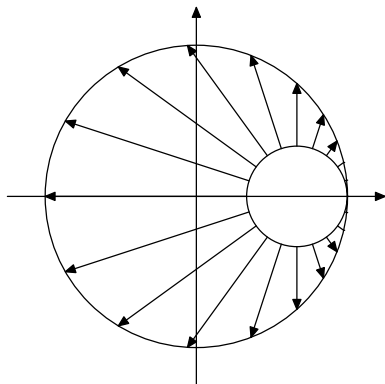


Figura 2.24: Homotopía entre $|z| = 3$ y $\bar{\gamma} = 2 + e^{it}$.

Cauchy, de donde

$$e^2 + 2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z + z}{z - 2} dz,$$

es decir

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + z}{z - 2} dz = 2\pi i(e^2 + 2).$$

2.5 Teorema del Máximo Modulo. Funciones Armónicas

Teorema 2.27 (Propiedad del valor intermedio). *Sea f analítica en una región A y $D(z_0, r) \subset A$, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Esta fórmula dice que el valor de f en el centro del disco es el promedio de sus valores en el círculo.

DEMOSTRACIÓN. Usando la fórmula integral de Cauchy, si $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

es decir,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.28. *Sea A una región y f analítica en A . Supóngase que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D(z_0, r_0)$, entonces f es constante en $D(z_0, r_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Se puede suponer que $f(z_0) \in \mathbb{R}^+$, ya que, de otra manera, si $f(z_0) = w$, $w^{-1}f$ satisface las condiciones del teorema, es constante si y sólo si f lo es, y además $w^{-1}f(z_0) = 1$.

Sea $g(z) = f(z) - \operatorname{Re} f(z)$, y $r < r_0$. Obsérvese que $g(z)$ es real y no negativo. Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta &= 2\pi f(z_0) - \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(z_0 + re^{i\theta})) d\theta = \\ &= 2\pi f(z_0) - 2\pi \operatorname{Re} f(z_0) = 0, \end{aligned}$$

por la propiedad del valor intermedio aplicada a f .

Como la función

$$\theta \mapsto g(z_0 + re^{i\theta})$$

es real no negativa, y su integral es cero, se tiene que

$$g(z_0 + re^{i\theta}) = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

es decir

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z), \quad \forall z \text{ tal que } |z - z_0| = r.$$

Aplicando este argumento para cada $r < r_0$, se tiene que

$$\operatorname{Re} f(z) = f(z) \quad \forall z \in D(z_0, r_0).$$

Finalmente, las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que una función holomorfa cuya parte real es constante, debe ser constante. ■

Teorema 2.29 (Del máximo módulo). *Sea A una región acotada en \mathbb{C} , y $f: \overline{A} \rightarrow \mathbb{C}$ continua y tal que $f|_A$ es analítica. Sea $M = \sup_{z \in \partial A} |f(z)|$, entonces:*

i) $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in A$.

ii) Si existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M$, entonces f es constante.

DEMOSTRACIÓN. Sea $M' = \sup_{z \in \overline{A}} |f(z)|$.

Caso 1. Si, $\forall z \in A$, $|f(z)| < M'$, entonces existe $z_0 \in \partial A$ tal que $|f(z_0)| = M'$, y $M = M'$, ya que \overline{A} , y ∂A son compactos.

Caso 2. Si existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$, sea

$$B = \{z \in A \mid f(z) = f(a)\}.$$

Por el teorema 2.28 B es abierto, ya que, si $w \in B$, cualquier disco alrededor de w está en B . Por otro lado, $B = |f|^{-1}(M')$, por lo que es cerrado, y como es no vacío, y A es conexo, $B = A$. Por consiguiente, f es constante en A , y por continuidad, lo es en \bar{A} . ■

Mencionaremos ahora una importante aplicación.

Teorema 2.30 (Lema de Schwarz). *Sea f analítica en $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$. Supóngase que $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in \Delta$, y que $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \Delta$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si existe $z_0 \in \Delta$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces $f(z) = e^{i\theta}z$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

g es analítica en $\Delta \setminus \{0\}$ y continua en Δ , por lo que es analítica en Δ . (Véase el corolario al teorema de Morera.)

En el círculo $|z| = r$, $|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$, por lo que, usando el teorema del máximo módulo, se tiene

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall z \in \overline{D(0, r)},$$

es decir,

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{r}, \quad \forall z \in \overline{D(0, r)}.$$

Fijando z , y haciendo que r converja a 1, se tiene el primar resultado.

Esto dice también que $|g(z)| \leq 1$, $\forall z \in \Delta$, en particular, $|f'(0)| \leq 1$.

Finalmente, si $|f(z_0)| = |z_0|$, con $z_0 \neq 0$, entonces, para cualquier r entre $|z_0|$ y 1, $|g(z)|$ alcanza su máximo en $\overline{D(0, r)}$, por lo que, por el teorema del máximo módulo, g es constante en $\overline{D(0, r)}$, y como esto es válido $\forall r$ tal que $|z_0| < r < 1$, g es constante en Δ , i. e. $\frac{f(z)}{z} = k$, o $f(z) = kz$. Además, $|k| = 1$, ya que $|f(z_0)| = |z_0|$. ■

2.5.1 Funciones Armónicas

Definición 2.10. *Sea A una región en \mathbb{C} y $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , se dice que u es armónica si su laplaciano es 0, es decir, si*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Se demostró que las partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas de clase C^∞ . El recíproco también es cierto.

Teorema 2.31. *Sea A una región y $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ armónica, entonces u es de clase C^∞ , y para cualquier $z_0 \in A$, u es la parte real de una función analítica en una vecindad de z_0 . Si además A es simplemente conexa, existe $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $\operatorname{Re} f = u$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar la segunda parte, pues localmente siempre existe una vecindad simplemente conexa, por ejemplo $D(z_0, r)$.

Sea $g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z)$, $z \in A$. Se afirma que g es analítica en A .

Denotando a $g = U + iV$, se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

por lo cual

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

También

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

de donde

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

ya que u es C^2 . Esto demuestra que g es analítica.

Usando ahora el teorema de antiderivadas, existe $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $f' = g$. Si $f = \bar{u} + i\bar{v}$,

$$f' = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - i \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

por lo que $\bar{u} = u + k$ para alguna constante k , y $u = \operatorname{Re}(f - k)$. ■

Obsérvese que el resultado también es válido si se sustituye $\operatorname{Re} f$ por $\operatorname{Im} f$, ya que $\operatorname{Im}(-if) = \operatorname{Re} f$.

Definición 2.11. *Se dice que u y v son armónicas conjugadas si existe f analítica tal que $f = u + iv$.*

Corolario 2.5. *Sea A una región simplemente conexa en \mathbb{C} y $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ armónica, entonces u tiene una conjugada en A .*

Obsérvese que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que la conjugada es única salvo una constante aditiva.

Teorema 2.32. Sean u y v armónicas conjugadas en una región A . Sea $c_1 \in u(A)$ tal que $\forall (x, y) \in u^{-1}(c_1), \nabla u(x, y) \neq 0$, y $c_2 \in v(A)$ tal que $\forall (x, y) \in v^{-1}(c_2), \nabla v(x, y) \neq 0$. Entonces $u^{-1}(c_1)$ y $v^{-1}(c_2)$ son curvas que, de intersectarse, lo hacen ortogonalmente.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del teorema de la función implícita que $u^{-1}(c_1)$ y $v^{-1}(c_2)$ son curvas diferenciables. Como el vector gradiente es perpendicular a

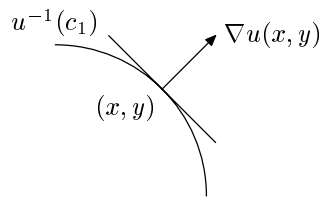


Figura 2.25: ∇u es perpendicular a $u^{-1}(c_1)$.

las curvas de nivel, basta demostrar que, para cualquier punto en la intersección,

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0,$$

que es lo mismo que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

que se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Como ejemplo del teorema 2.32 tenemos $f(z) = z^2$, que tiene como partes real e imaginaria a

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy,$$

respectivamente.

2.5.2 Propiedad del Valor Intermedio y Principio del Máximo para Funciones Armónicas

Teorema 2.33 (del valor intermedio). Sea u armónica en una región A que contiene a $\overline{D}(z_0, r)$, entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

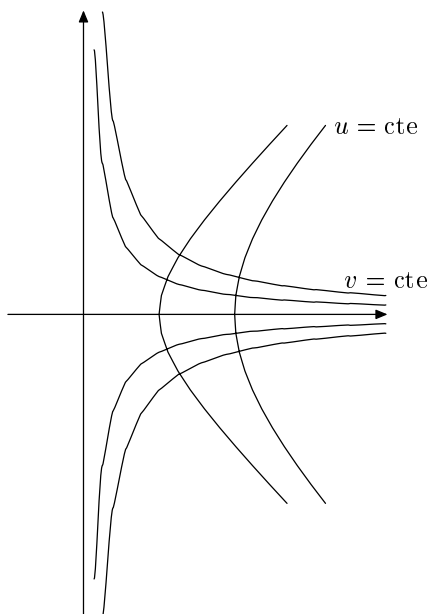


Figura 2.26: Las curvas de nivel de $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

DEMOSTRACIÓN. A^c es cerrado, y $z_0 \in A$, por lo que existe $w \in A^c$ tal que $|z_0 - w| \leq |z_0 - z|$, $\forall z \in A^c$. Como $\overline{D(z_0, r)} \subset A$, se tiene que

$$|z_0 - w| > r.$$

Tomando r_1 tal que $|z_0 - w| > r_1 > r$ tenemos que $D(z_0, r_1) \subset A$, por lo que, por el teorema 2.31, existe f analítica en $D(z_0, r_1)$ tal que $\operatorname{Re} f = u$. Por el teorema del valor intermedio para funciones analíticas

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

y tomando parte real a ambos lados se obtiene el resultado. ■

Teorema 2.34. *Sea u armónica en una región A , supóngase que u alcanza un máximo local en $z_0 \in A$, i. e., existe $r > 0$ tal que $u(z_0) > u(z)$, $\forall z \in D(z_0, r)$, entonces u es localmente constante.*

DEMOSTRACIÓN. Existe f analítica en $D(z_0, r)$ tal que $\operatorname{Re} f = u$. e^f también es analítica, y

$$|e^f| = |e^u| = e^u.$$

Como e^x es creciente, los máximos de u lo son de e^u , aplicando el teorema del máximo módulo para funciones analíticas e^f es constante en $D(z_0, r)$, por lo que también e^u y u lo son. ■

Obsérvese que se puede obtener el mismo resultado reemplazando máximo por mínimo, tomando $-u$ en lugar de u .

Teorema 2.35 (Máximo módulo para funciones armónicas).

Sea A una región acotada, $u: \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y armónica en A . Si $M = \sup_{z \in \partial A} u(z)$, entonces:

i) $u(z) \leq M, \quad \forall z \in A.$

ii) Si $u(z) = M$, para alguna $z \in A$, u es constante.

DEMOSTRACIÓN. Se aplica el mismo argumento de conexidad que se utilizó para las funciones analíticas. ■

Observación. Existe también el principio del mínimo, i. e., si $m = \inf_{z \in \partial A} u(z)$, $u(z) \geq m, \quad \forall z \in A$, y si $u(z) = m$ para alguna $z \in A$, u es constante. Esto se demuestra aplicando el teorema anterior a $-u$.

2.5.3 Ejemplos Desarrollados

1. Sea f analítica y distinta de cero en una región A . Muestre que $|f|$ no tiene mínimos locales si f no es constante.

Solución. $\frac{1}{f}$ es analítica, y $\frac{1}{|f|}$ tiene máximos locales sólo si $|f|$ tiene mínimos. Nótese que todas las hipótesis son necesarias, pues para $f(z) = z$, $|f|$ tiene un mínimo local en 0 .

2. Encuentre el máximo de $|\operatorname{sen} z|$ en $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Solución. Por el teorema del máximo módulo, el máximo de $|\operatorname{sen} z|$ se toma en la frontera. Ahora

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z|^2 &= |\operatorname{sen} x \cdot \cos iy + \operatorname{sen} iy \cdot \cos x|^2 = |\operatorname{sen} x \cdot \cosh y + i \operatorname{senh} y \cdot \cos x|^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 x (1 + \operatorname{senh}^2 y) + (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x, \end{aligned}$$

así que,

$$\begin{aligned} \text{si } x &= 0, 2\pi, & |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{senh}^2 y, \\ \text{si } y &= 0, & |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \leq 1, \\ \text{si } y &= 2\pi, & |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{senh}^2(2\pi) + \operatorname{sen}^2 x, \end{aligned}$$

y por consiguiente el máximo es tomado en $z_0 = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi i$, y tiene el valor

$$|\operatorname{sen} z_0| = |\operatorname{sen} x_0 \cdot \cosh y_0 + i \operatorname{senh} y_0 \cdot \cos x_0| = \cosh 2\pi.$$

3. Encuentre las conjugadas armónicas de las siguientes funciones en \mathbb{C} .

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2$.

(b) $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y$.

Solución. Sabemos que estas funciones corresponden a z^2 y $\operatorname{sen} z$, respectivamente, sin embargo, es didáctico exhibir un método.

- (a) Si v es la conjugada armónica de u , que existe ya que u es armónica en \mathbb{C} , que es simplemente conexo,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

integrando con respecto a x se obtiene $v(x, y) = 2xy + \text{cte}$, es decir,

$$v(x, y) = 2xy + g_1(y),$$

análogamente

$$v(x, y) = 2xy + g_2(x),$$

por lo que $g_1(y) = g_2(x)$, $\forall (x, y) \in A$, y necesariamente son constantes, por lo que $v(x, y) = 2xy + k$.

- (b) En este caso

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cdot \operatorname{cosh} y,$$

por lo que $v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{senh} y + g_1(y)$, y $v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{senh} y + g_2(x)$. De nuevo g_1 y g_2 son constantes y $v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{senh} y + k$.

4. Encuentre el máximo de $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y$ en $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución. Por el principio del máximo módulo para funciones armónicas el máximo se alcanza en la frontera,

$$\begin{array}{ll} \text{si } x = 0, & u(x, y) = 0, \\ \text{si } y = 0, & u(x, y) = \operatorname{sen} x, \\ \text{si } x = 1, & u(x, y) = \operatorname{cosh} y \cdot \operatorname{sen} 1, \\ \text{si } y = 1, & u(x, y) = \operatorname{cosh} 1 \cdot \operatorname{sen} x, \end{array}$$

por lo que el máximo se obtiene en $(1, 1)$.

Capítulo 3

Series

3.1 Convergencia de Series

3.1.1 Definiciones Básicas

En este capítulo veremos que la analiticidad de una función se puede definir en función de la existencia de una serie convergente. Se desarrollarán los importantes teoremas de Weierstrass, Taylor y Laurent.

Definición 3.1. Una sucesión compleja $\{z_n\}$ converge a z si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que si $n > N$, entonces $|z_n - z| < \varepsilon$.

Definición 3.2. Se dice que la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (de números complejos) converge a s si la sucesión de sumas parciales (es decir la sucesión con términos $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$) converge a s .

Se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ o simplemente $\sum a_k = s$.

Se mencionó en el capítulo 1 que el límite de una sucesión es único y que una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy. En el caso de las series esto se traduce en el siguiente criterio importante de convergencia.

Proposición 3.1 (Criterio de Cauchy). La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tal que si $n \geq N$ se tiene

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots$$

En particular para $p = 1$, se obtiene un criterio útil de divergencia.

Corolario 3.1. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $a_k \rightarrow 0$.

El recíproco del corolario no es cierto: la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (ver proposición 3.3), sin embargo, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Definición 3.3. Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

Proposición 3.2. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, entonces converge.

DEMOSTRACIÓN. Usando el criterio de Cauchy, dada $\varepsilon > 0 \exists N$ tal que, si $n > N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

usando de nuevo el criterio de Cauchy, esto implica que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. ■

Obsérvese la utilidad de esta proposición, ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es real y se pueden aplicar criterios de convergencia para series reales.

Proposición 3.3 (Pruebas de convergencia para series reales).

i) Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge a $\frac{1}{1-r}$, y diverge si $|r| \geq 1$.

ii) Prueba de la comparación.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $b_k \geq 0$, y $0 \leq a_k \leq b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ diverge, y $0 \leq c_k \leq d_k$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ diverge.

iii) Prueba de las series p .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ converge si $p > 1$, y diverge a ∞ (i. e., las sumas parciales son crecientes y no acotadas) si $p \leq 1$.

iv) Prueba de la Razón.

Supóngase que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe y es menor que 1, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente; si el límite es mayor que 1 la serie diverge, y si el límite es 1 puede ocurrir cualquiera de las dos cosas.

v) Prueba de la Raíz.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe y es igual a L , entonces si $L < 1$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, si $L > 1$ la serie diverge y si el límite es 1 ambas cosas pueden suceder.

DEMOSTRACIÓN.

i) Escribiendo $s_n = 1 + r + \dots + r^n$, $rs_n = r + r^2 + \dots + r^{n+1}$, por lo cual $rs_n - s_n = 1 - r^{n+1}$, y

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Si $|r| < 1$, $s_n \rightarrow \frac{1}{1 - r}$;

si $|r| > 1$, $r^{n+1} \rightarrow \infty$, y la serie diverge;

si $r = 1$, $\sum_{k=1}^n r^k = n + 1 \rightarrow \infty$, por lo que diverge; y

si $r = -1$, $s_n = 0$ si n es par, y $s_n = 1$ si n es impar, por lo que la serie diverge.

ii) Aplicando el criterio de Cauchy, $a_k + \dots + a_{k+p} \leq b_k + \dots + b_{k+p}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

converge. También, dada $M > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^j d_k \geq \sum_{k=1}^j c_k \geq M$ (ya que una sucesión creciente de números positivos diverge si y sólo si no es acotada), por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ diverge.

iii) Si $p \leq 1$, entonces $n^{-p} \geq n^{-1}$ (puesto que n^x es creciente), por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ diverge si la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ diverge. Esta última es bien sabido que diverge. Una forma de demostrar este hecho es la siguiente: Se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1 \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} &\geq 2^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando estas desigualdades es fácil deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a ∞ .

Ahora, si $p > 1$,

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &= \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \cdots + \\ &\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^p} \right) \leq \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^p} = \\ &\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}, \end{aligned}$$

por lo cual s_{2^k-1} está acotado y, por consiguiente, las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ lo están (ya que estas son una sucesión creciente de números positivos).

Consecuentemente $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ converge.

Obsérvese que esta demostración muestra también que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de números positivos decreciente (i. e., $a_{n+1} \leq a_n$) y si $\sum_{j=1}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ converge entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge también. A este criterio se le llama prueba

de la condensación de Cauchy.

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_1, \\ a_2 + a_3 &\leq 2a_2, \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leq 2^2 a_4, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

iv) Sea $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1}}{a_n} \right|$.

Si $r < 1$, tomando r' tal que $r < r' < 1$, existe N para el cual si $n > N$, $\left| \frac{a^{n+1}}{a_n} \right| < r'$, lo que implica que $|a_{N+p}| < |a_N| (r')^p$ y que $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$

converge, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

Si $r > 1$ sea r' tal que $r > r' > 1$, de nuevo existe N para el cual si $n > N$, $\left| \frac{a^{n+1}}{a_n} \right| > r'$ y $|a_{N+p}| > |a_N| (r')^p$, esto implica que $|a_{N+p}|$ no converge a 0 cuando $p \rightarrow \infty$ y, por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Ahora, las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, divergen y convergen respectivamente, sin embargo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = 1.$$

v) Sea $r = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Si $r < 1$, tomando $r < r' < 1$, existe N tal que, si $n > N$, $|a_n|^{1/n} < r'$, es decir $|a_n| < (r')^n$, por lo cual $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

Si $r > 1$, tomando $r > r' > 1$, existe N tal que, si $n > N$, entonces $|a_n|^{1/n} > r'$, y $|a_n| > (r')^n$, así que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ y por consiguiente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Finalmente, la serie armónica diverge, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(1/n) \log n}} = 1,$$

por la regla de L'Hôpital, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(2/n) \log n}} = 1. \quad \blacksquare$$

3.1.2 Convergencia Uniforme

Definición 3.4. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Se dice que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A si $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tal que, si $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in A.$$

Definición 3.5. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $g_k: A \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente a g si $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tal que, si $n > N$,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z) - g(z) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in A.$$

Estas definiciones se traducen en términos de sucesiones de Cauchy como sigue.

Proposición 3.4. Sea $A \subset \mathbb{C}$.

i) Una sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en A si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que, si $n > N$, $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in A$ y $\forall p \in \mathbb{N}$.

ii) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que, si $n > N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in A \text{ y } \forall p \in \mathbb{N}.$$

DEMOSTRACIÓN.

i) Si el criterio de Cauchy es cierto, para cada $z \in A$ sea $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$. Este límite existe siempre ya que \mathbb{C} es completo, es decir, cualquier sucesión de Cauchy converge.

Ahora, dada $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $n > N$,

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon/2, \quad \forall z \in A \text{ y } \forall p \in \mathbb{N}.$$

También, $\forall z \in A$, existe $p_z \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(z) - f_{N+p_z}(z)| < \varepsilon/2,$$

ya que $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$.

Por consiguiente, si $n > N$ y $z \in A$

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f_{N+p_z}(z)| + |f_{N+p_z}(z) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A .

Ahora, si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A , $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tal que si $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/2, \quad z \in A.$$

Por lo cual

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in A.$$

ii) La demostración hecha en i), aplicada a las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ demuestra este caso. ■

La convergencia uniforme es útil en muchos aspectos, uno de los cuales es el siguiente.

Teorema 3.5. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente en A a una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, entonces f es continua.*

Análogamente, si $g_k: A \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A a una función g , entonces g es continua.

DEMOSTRACIÓN. Como la suma finita de funciones continuas es continua, basta demostrar el teorema para sucesiones. Para esto, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3, \quad \forall z \in A.$$

También, para $z_0 \in A$, f_N es continua en z_0 , por lo que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3, \quad \text{si } |z - z_0| < \delta.$$

Por consiguiente, si $|z - z_0| < \delta$,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Probablemente el criterio más útil para detectar convergencia uniforme es el dado por el siguiente teorema.

Teorema 3.6 (Prueba M de Weierstrass). *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $g_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Supongase también que existe una sucesión de reales no negativos $\{M_n\}$ que satisfacen:*

$$i) |g_n(z)| \leq M_n, \quad \forall z \in A,$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge.}$$

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniforme y absolutamente en A .

DEMOSTRACIÓN. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$, $\forall n > N$ y $\forall p \in \mathbb{N}$, por lo cual

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon, \quad \forall z \in A,$$

es decir, las hipótesis del criterio de Cauchy se aplican (Proposición 3.4) y las series $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(z)|$ y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ convergen uniformemente en A . ■

Como un ejemplo de como aplicar el teorema 3.6, considerese la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

se afirma que $g(z)$ converge uniforme y absolutamente en

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}, \quad r < 1.$$

Escribiendo $g_n(z) = \frac{z^n}{n}$, se tiene que $|g_n(z)| = \frac{|z^n|}{n} \leq \frac{r^n}{n}$. Sea $M_n = \frac{r^n}{n}$, como $\frac{r^n}{n} \leq r^n$, se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, y por lo tanto se sigue la afirmación.

Es interesante observar que, en contraste, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ no converge uniformemente en $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Si esto fuera cierto, se tendría que

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ convergería uniformemente en $[0, 1)$. En tal caso, $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$,

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1) \text{ y } \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ahora, como la serie armónica diverge, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N+p} > 2\varepsilon,$$

y también existe $x \in [0, 1)$ tal que $x^{N+p} > 1/2$. (Ya que esta condición se satisface si $x > (1/2)^{\frac{1}{N+p}} = e^{(\log 1/2) \frac{1}{N+p}}$.) Se obtiene que

$$\frac{x^N}{N} + \cdots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p} \left(\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N+p} \right) > \varepsilon,$$

(x^n decrece cuando $n \rightarrow \infty$), lo cual es una contradicción a la primera afirmación.

Sin embargo, obsérvese que $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ es continua en $D(0, 1)$, puesto que $\forall z \in D(0, 1)$ existe $r > 0$ tal que $z \in D(0, r)$ y en dicho disco hay convergencia uniforme, por lo que el teorema 3.5 nos muestra la continuidad de g .

Teorema 3.7 (Weierstrass).

i) Sea A una región en \mathbb{C} y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas definidas en A . Supóngase también que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en A , entonces f es analítica. Además, $f'_n \rightarrow f'$ puntualmente en A y uniformemente en cualquier disco cerrado de A .

ii) Si $\{g_k\}$ es una sucesión de funciones analíticas tales que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge a una función g uniformemente en discos cerrados de A , entonces g es analítica en A . Además, $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(z)$ puntualmente en A y uniformemente en discos cerrados de A .

Este tipo de convergencia, si además es absoluta, se llama normal, y se dice que las funciones convergen normalmente.

Esta propiedad no es cierta en el caso real, pues convergencia uniforme no implica que se pueda diferenciar término a término, por ejemplo, si

$$f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{n}}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

y es fácil ver que la convergencia es uniforme en \mathbb{R} . Sin embargo

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx,$$

y $f'_n(0) = \sqrt{n}$ no converge a $f'(0) = 0$.

Se necesita un resultado adicional para demostrar el teorema 3.7.

Teorema 3.8. *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ de clase C^1 por tramos y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en γ y que además convergen uniformemente a una función f en γ , entonces*

$$\int_{\gamma} f_n \rightarrow \int_{\gamma} f \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

También, si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en γ , entonces

$$\int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} g_k(z).$$

Lo que dice este teorema es que, bajo la hipótesis de convergencia uniforme, se pueden intercambiar los signos de límite e integral.

DEMOSTRACIÓN. Dada $\varepsilon > 0$ existe N tal que, si $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \gamma,$$

así que

$$\left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n - f) \right| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| < \varepsilon \cdot \ell(\gamma),$$

por lo cual se sigue la primera parte del teorema. La segunda consiste en aplicar la primera parte a la sucesión de sumas parciales. ■

DEMOSTRACIÓN. (TEOREMA 3.7). Solo es necesario demostrar i), ya que ii) se sigue de aplicar i) a la sucesión de sumas parciales, ya que la derivada es disitributiva con respecto a la suma.

Primero demostraremos que f es analítica en A . Sea $z_0 \in A$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z_0, r) \subset A$. Como $D(z_0, r)$ es simplemente conexo, se sigue del teorema de Cauchy que $\int_{\gamma} f_n = 0$, $\forall \gamma$ curva cerrada en $D(z_0, r)$ y por consiguiente, como $f_n \rightarrow f$ uniformemente en γ , se sigue del teorema 3.8 que $\int_{\gamma} f = 0$. Como esto es cierto para toda curva cerrada γ , por el teorema de Morera f es analítica en $D(z_0, r)$. (La convergencia uniforme implica que f es continua.)

Falta demostrar que $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente en discos cerrados. Hay que demostrar que dados $\varepsilon > 0$ y $\overline{D(z_0, r)} \subset A$ existe N tal que si $n > N$,

$$|f'_n(z) - f'(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \overline{D(z_0, r)}.$$

Sea $\rho > r$ tal que $D(z_0, \rho) \subset A$, la existencia de dicho disco ya se demostró, (en la demostración del teorema 2.33). Si se denota por γ la frontera del disco $\overline{D(z_0, \rho)}$, usando la fórmula integral de Cauchy se tiene

$$f'_n(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw, \quad \forall z \in \overline{D(z_0, r)}.$$

Obsérvese que si $w \in \gamma$ y $z \in \overline{D(z_0, r)}$, $|w-z| \geq \rho-r$ y que existe N tal que si $n > N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \overline{D(z_0, \rho)},$$

por lo cual

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(\rho-r)^2} 2\pi\rho = \varepsilon \cdot \frac{\rho}{(\rho-r)^2}, \quad \forall z \in \overline{D(z_0, r)}. \quad \blacksquare$$

Obsérvese que aplicando el teorema de Weierstrass repetidas veces se obtiene que $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente en discos cerrados. Nótese que el teorema de Weierstrass no supone convergencia uniforme en A , por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{z}$ converge en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, pero no uniformemente como ya se demostró, sin embargo como converge uniformemente en $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, $\forall r \in (0, 1)$, converge uniformemente en cualquier disco cerrado en A , por lo cual se aplica el teorema de Weierstrass y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

es analítica en A , y su derivada es $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$, la cual converge uniformemente en discos cerrados de A .

Es fácil demostrar que una sucesión de funciones converge uniformemente en discos cerrados si y sólo si converge uniformemente en compactos, por lo cual se puede sustituir ‘discos cerrados’ por ‘compactos’ en el teorema de Weierstrass.

3.1.3 Ejemplos Desarrollados

1. Se prueba que la función ζ (zeta) de Riemann definida por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

es analítica en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$, y se calcula $\zeta'(z)$ en dicho conjunto.

Solución. Sea B un disco cerrado en A y δ la distancia de B a la recta $x = 1$, se tiene

$$n^{-z} = e^{-z \log n} \quad \text{y} \quad |n^{-z}| = e^{-x \log n} = n^{-x}.$$

(se define n^{-z} eligiendo la rama principal del logaritmo).

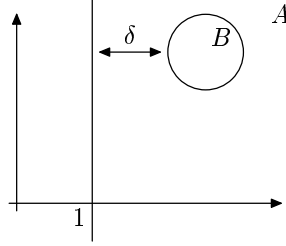


Figura 3.1: La distancia del disco B a $x = 1$.

Ahora si $z \in B$, $z = x + iy$, $x \geq 1 + \delta$ y $|n^{-z}| = n^{-x} \leq n^{-(1+\delta)}$, puesto que $t \mapsto e^{t \log n}$ es creciente. Escribiendo $M_n = n^{-(1+\delta)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es una serie p convergente, por lo cual usando la prueba M de Weierstrass, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge en forma absoluta y uniforme en B . Consecuentemente usando el teorema de Weierstrass, ζ es analítica en A y

$$\zeta'(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\log n) n^{-z},$$

además esta serie es convergente en discos cerrados de A .

2. Demuestre que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ es analítica en $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, y escriba la serie para $f'(z)$.

Solución. Sea $M_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge y $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$, $\forall z \in \Delta$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en forma absoluta y uniforme en Δ .

Por consiguiente, el teorema de Weierstrass implica que f es analítica, y que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}.$$

3. Calcular $\int_{|z|=1/2} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz$.

Solución. Sea B un disco cerrado en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, δ la distancia de B al círculo $|z| = 1$, y $M_n = (1 - \delta)^n$.

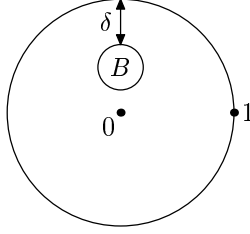


Figura 3.2: La distancia del disco B a $|z| = 1$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge en forma absoluta y uniforme en B , y de nuevo por el teorema de Weierstrass, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es analítica en A , por tanto

$$\int_{|z|=1/2} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z} dz + \int_{|z|=1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = 2\pi i.$$

3.2 Teorema de Taylor

3.2.1 Series de Potencias

En esta sección demostraremos que f es analítica si y sólo si f se puede expresar localmente como una serie de potencias, llamada serie de Taylor. Dichas series son de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Esta propiedad es otra instancia donde el cálculo real es distinto del complejo, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

es de clase \mathcal{C}^{∞} y $f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, sin embargo f no es idénticamente 0 cerca de 0, por lo que f no tiene una expansión en serie de Taylor alrededor del 0.

Definición 3.6. Una serie de potencias es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Lema 3.1 (Abel). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos y r_0, M reales positivos tales que $|a_n|r_0^n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces si $r < r_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge en forma absoluta y uniforme en

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $M_n = M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$. Como $\frac{r}{r_0} < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge. Además $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n = |a_n| \frac{r^n r_0^n}{r_0^n} \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n = M_n$, por lo que la prueba M de Weierstrass demuestra el resultado. ■

Obsérvese que si existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w - z_0| = r_0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$ converge, entonces se satisfacen las hipótesis del lema ya que

$$|a_n| |w - z_0|^n = |a_n| r_0^n \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Teorema 3.9. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias, entonces existe un número $R \in [0, \infty]$, llamado radio de convergencia, tal que si $|z - z_0| < R$ la serie converge, y si $|z - z_0| > R$ la serie diverge. La convergencia es uniforme y absoluta en discos cerrados de $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$.

Al círculo $|z - z_0| = R$ se le llama círculo de convergencia.

DEMOSTRACIÓN. Sea $R = \sup\left\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge}\right\}$. Se afirma que R es el radio de convergencia.

Dada $r_0 < R$, existe r_1 tal que $r_0 < r_1 < R$, y tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n$ converge por lo que $\{|a_n| r_1^n\}$ es acotada ya que converge a 0. Consecuentemente, por el lema de Abel, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge en forma absoluta y uniforme en $A_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r_0\}$.

Ahora, si $|z_1 - z_0| > R$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ converge, se tendría que el conjunto $\{|a_n r_1^n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, con $r_1 = |z_1 - z_0|$.

En este caso, tomando $R < r < r_1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sería absoluta y uniformemente convergente en A_r por el lema de Abel, en particular, si $z = z_0 + r$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ sería convergente, lo cual contradice la definición de R .

Finalmente como la convergencia es absoluta y uniforme en A_r , $\forall r < R$ también lo es en cualquier disco cerrado de A . ■

Como consecuencia de este teorema y del teorema de Weierstrass se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es analítica en el interior del círculo de convergencia.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es consecuencia de que las funciones $a_n(z - z_0)^n$ son enteras. ■

El teorema de Weierstrass también permite derivar término por término.

Teorema 3.11. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in D(z_0, R)$, R el radio de convergencia, entonces $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ y el radio de convergencia de esta nueva serie es R . Además, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Weierstrass,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z_1 - z_0)^{n-1}$ converge para $z_1 \in \left(\overline{D(z_0, R)}\right)^c$, se tendría que $\{n a_n r_0^{n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, donde $r_0 = |z_1 - z_0|$, por lo que $\{a_n r_0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ también es un conjunto acotado, y, aplicando el lema de Abel, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge en $D(z_0, R_1)$, con $R_1 > R$, lo cual contradice la definición de R . Por consiguiente, el radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

es de nuevo R .

Para demostrar la última parte, se evalúa la serie y sus derivadas en z_0 : $f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = a_1$, iterando el proceso de derivar la serie de potencias, inductivamente se obtiene

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

y evaluando en z_0 se obtiene $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$. ■

Ahora establecemos dos criterios para encontrar R .

Teorema 3.12. *Sea R el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.*

i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existe o es ∞ , dicho límite es R .

ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, existe o es ∞ , entonces $R = \begin{cases} 1/\rho & \text{si } \rho \neq 0, \infty \\ 0 & \text{si } \rho = \infty \\ \infty & \text{si } \rho = 0 \end{cases}$.

DEMOSTRACIÓN. Como se vio en la demostración del teorema 3.9, el radio de convergencia está dado por

$$R = \sup \left\{ r > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}.$$

i) Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Consideramos primero el caso $0 < L < \infty$. Aplicamos el criterio de la razón real a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Si $0 < r < L$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} = \frac{r}{L} < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge. En cambio, si $L < r$ dicho límite es mayor a 1 y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ diverge.

Finalmente, si $L = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} = 0$ y la serie converge en todo el plano, pero si $L = 0$ el límite es ∞ y el radio de convergencia es 0. Por lo tanto, L es el radio de convergencia en todos los casos.

ii) Consideramos primero el caso $\rho \in (0, \infty)$. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge o diverge, de acuerdo a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} r$ sea menor o mayor que 1, respectivamente. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, esto equivale a decir que ρr sea menor o mayor a

1, esto es $r < \frac{1}{\rho}$ ó $r > \frac{1}{\rho}$, por lo que $\frac{1}{\rho}$ es el radio de convergencia. Si $\rho = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} r = 0$ para toda r y $R = \infty$, etc. ■

Ejemplos

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tiene radio de convergencia 1, puesto que $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1.$$

2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $R = \infty$, es decir, es una función entera, ya que $a_n = \frac{1}{n!}$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = \infty.$$

3. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ tiene radio de convergencia 0, puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

No es difícil demostrar que, para toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, donde \limsup es el supremo de los puntos de acumulación de $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$. (Una demostración de este hecho aparece en el libro de Ahlfors).

3.2.2 Teorema de Taylor

La discusión sobre series de potencias mostró que estas son funciones analíticas. El recíproco es cierto, cualquier función analítica es representable localmente por una serie de potencias.

Teorema 3.13 (Taylor). Sea f analítica en una región A , $z_0 \in A$, y $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset A$, entonces, $\forall z \in D_r$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

A esta serie se le llama serie de Taylor.

Como ejemplo, si $f(z) = e^z$, f es entera y $f^{(n)}(z) = e^z$, $\forall n \in \mathbb{N}$, así que $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

A la serie de Taylor alrededor del 0 se le llama serie de MacLaurin. Para demostrar el teorema de Taylor se necesita un lema.

Lema 3.2. *La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge en forma absoluta y uniforme en los círculos de radio $\rho < 1$ y en los interiores de dichos círculos a $\frac{1}{1-z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el teorema 3.12 podemos ver que el radio de convergencia de la serie es 1, de donde se deduce la primera parte del lema. Para calcular el límite observemos que, como en el caso de la serie geométrica, $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}. \quad \blacksquare$$

Otro resultado necesario para demostrar el teorema de Taylor es el siguiente: Si $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente en $B \subset \mathbb{C}$ y $h(z)$ es acotada en B ,

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} h(z)g_n(z)$ converge uniformemente en B a $h(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$.

Esto es cierto ya que, si $|h(z)| < M$, $\forall z \in B$, dada $\varepsilon > 0 \exists N$ tal que

$$\begin{aligned} |g_n(z)h(z) + \dots + g_{n+p}(z)h(z)| &= |g_n(z) + \dots + g_{n+p}(z)| |h(z)| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall z \in B \quad \text{y} \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN (TEOREMA DE TAYLOR). Sea $r' > r$ tal que $D_{r'} \subset A$, y sea $\gamma(\theta) = z_0 + r^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por la fórmula integral de Cauchy, si $z \in \text{int } \gamma = \text{int } D_{r'}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ahora se aplica el truco de Taylor, esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{(w - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n. \end{aligned}$$

Usando el lema 3.2 se observa que para z fijo esta serie converge uniformemente en γ , ya que al variar w , los valores $\frac{z - z_0}{w - z_0}$ están todos en un círculo de radio menor a 1.

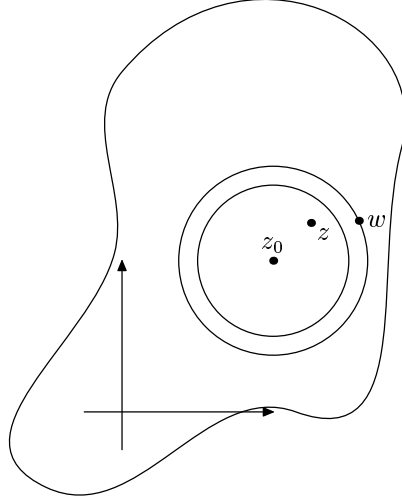


Figura 3.3: $|z - z_0| < |w - z_0|$.

Ahora, $\frac{f(w)}{w - z_0}$, $w \in \gamma$, es acotada, ya que es una función continua en el compacto γ , así que, por la observación hecha después del lema 3.2,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente en γ a

$$\frac{f(w)}{w - z_0} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)} \right) = \frac{f(w)}{w - z}.$$

Finalmente, usando el teorema 3.8, se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right) dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

por lo cual, usando la fórmula integral de Cauchy para la n -ésima derivada se

tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall z \in \text{int } D_{r'}. \end{aligned}$$

En particular, la fórmula de Taylor se cumple en el disco cerrado de radio r . ■

Obsérvese que se sigue del teorema de Taylor y del teorema 3.10 que si A es una región en \mathbb{C} y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, entonces f es analítica en A si y solo si $\forall z_0 \in A$ y $\forall D(z_0, r) \subset A$, $f|_{D(z_0, r)}$ es representable como una serie de potencias. Esta representación es además única.

3.2.3 Ejemplos Desarrollados

1. ¿Es posible que una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ converja en $z=0$ pero diverja en $z=3$?

Solución. Por el lema de Abel, el radio de convergencia es cuando menos 2, por lo que la serie debe ser convergente para $z=3$.

2. Sean f y g analíticas en $D(0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, entonces $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $\forall z \in D(0, r)$, donde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, es decir, las series se pueden multiplicar como polinomios infinitos.

Solución. Se afirma que

$$(f \cdot g)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z).$$

Esto se demuestra inductivamente, es claro para $n=1$, y suponiendo que

$$(f \cdot g)^{(n-1)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-1-k)}(z).$$

se tiene

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)}(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k+1)}(z) g^{(n-1-k)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) + f^{(n)}(z) g(z) + f(z) g^{(n)}(z), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la afirmación.

Ahora,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k}, \end{aligned}$$

puesto que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Obsérvese que este resultado es también cierto para series de Taylor que no tienen el centro en el 0 sino en cualquier otro punto.

3. Calcule la serie de $\log(1+z)$ alrededor de 0, y encuentre el radio de convergencia.

Solución. Si se elige la rama principal del logaritmo, $\log(1+z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < -1 \text{ e } \operatorname{Im} z = 0\}$, por lo que el radio de convergencia es mayor o igual a 1.

Ahora, $f(0) = \log(1) = 0$; $f'(z) = \frac{1}{z+1}$, de donde $f'(0) = 1$;
 $f''(z) = \frac{-1}{(z+1)^2}$ y $f''(0) = -1$. Inductivamente se tiene

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(z+1)^n},$$

ya que

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-2)!(-1)^{n-2}}{(z+1)^{n-1}},$$

por lo tanto $f^{(n)}(0) = (n-1)!(-1)^{n-1}$, y

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Si $z = -1$, la serie es $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge, por lo cual $R = 1$.

4. Encontrar la serie de Taylor de $\frac{z}{z-1}$ alrededor de 0 y su radio de convergencia.

Solución. Se demostró que si $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, y por la unicidad de la serie de Taylor, ésta es precisamente su serie.

Ahora, por el ejemplo 2, la serie de Taylor de $-\frac{1}{1-z} \cdot z$ es

$$-\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Si $z = 1$ esta serie diverge, por lo que $R = 1$.

5. Calcule los primeros términos de la serie de $\frac{e^z}{1-z}$ alrededor del 0.

Solución. De nuevo por el ejemplo 2, como

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \\ \frac{e^z}{1-z} &= (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots) \\ &= 1 + (z + z) + (\frac{z^2}{2} + z^2 + z^2) + (\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + z^3 + z^3) + \dots \end{aligned}$$

3.3 Series de Laurent. Clasificación de Singularidades

3.3.1 Series de Laurent

Si f es analítica en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, f tiene una expansión en series llamadas de Laurent. Primero se establece un lema análogo al de Abel.

Lema 3.3. Sean $\{b_n\}$ una sucesión de números complejos y $r_0 \in \mathbb{R}^+$, y supongamos que el conjunto $\left\{ \frac{|b_n|}{r_0^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ está acotado, entonces para todo

$$r_1 > r_0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{converge en forma absoluta y uniforme en}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0|\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea M una cota superior de $\left\{ \frac{|b_n|}{r_0^n} \right\}$, si $|z - z_0| \geq r_1$,

$$\left| \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \right| \leq \frac{|b_n|}{r_1^n} = \frac{|b_n| r_0^n}{r_0^n r_1^n} \leq M \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n,$$

y por la prueba M de Weierstrass se sigue el resultado. ■

Otro ingrediente necesario para el teorema de Laurent es el siguiente.

Lema 3.4 (Fórmula de Cauchy para el anillo). Sea f holomorfa en el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, y $\gamma_j(\theta) = z_0 + s_j e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $j = 1, 2$, donde $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$, entonces, $\forall z \in \mathbb{C}$ si $s_1 < |z - z_0| < s_2$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

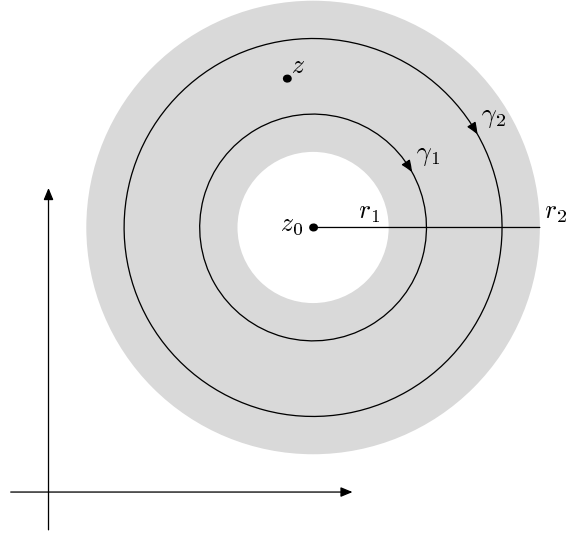


Figura 3.4: Fórmula de Cauchy para el anillo.

DEMOSTRACIÓN. Dada z en el anillo determinado por γ_1 y γ_2 fijas, sea

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Como g es analítica en $A \setminus \{z\}$ y continua en A , g es holomorfa en A . (Corolario 2.4). Ahora, γ_1 es homotópica a γ_2 en A , por lo que

$$\int_{\gamma_2} g(w) dw - \int_{\gamma_1} g(w) dw = 0,$$

esto es

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_2} \frac{1}{w - z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + f(z) \int_{\gamma_1} \frac{1}{w - z} dw = 0.$$

Como el segundo sumando es $-f(z)2\pi i$ y el cuarto es 0, por el teorema de Cauchy, esta igualdad establece el lema. ■

Teorema 3.14 (Laurent). Sea f holomorfa en un anillo

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

entonces $\forall z \in A$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

la convergencia es absoluta en A y uniforme en subanillos de A de la forma

$$A_{\rho_1, \rho_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}, \quad r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2.$$

Esta es la denominada serie de Laurent.

DEMOSTRACIÓN. Sean $r_1 < s_1 < \rho_1$, $\rho_2 < s_2 < r_2$ y γ_1 y γ_2 como en el lema 3.4. Tomemos $z \in \text{int } \gamma_2$ fija, y $w \in \gamma_2$. Como en el teorema de Taylor,

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}},$$

y

$$\frac{f(w)}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w)$$

uniformemente en γ_2 , por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right). \end{aligned}$$

escribiendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

como la serie converge $\forall z \in \text{int } \gamma_2$, converge en forma absoluta y uniforme en A_{ρ_1, ρ_2} , por el lema de Abel. (Puesto que $A_{\rho_1, \rho_2} \subset D(z_0, s_2)$.)

3.3. SERIES DE LAURENT. CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES 127

Por otra parte, si $z \in \text{ext } \gamma_1$ fija y $w \in \gamma_1$,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{w-z} &= \frac{+1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

donde la convergencia es uniforme en γ_1 , por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} f(w) dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \end{aligned}$$

donde $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw$.

Esta última serie converge $\forall z \in \text{ext } \gamma_1$, por lo que usando el lema 3.3 se tiene que la convergencia es uniforme y absoluta en conjuntos de la forma

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \geq r\}, \quad r > s_1,$$

y en particular en A_{ρ_1, ρ_2} . Consecuentemente, usando el lema 3.4, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

uniformemente en A_{ρ_1, ρ_2} y absolutamente en A . ■

Corolario 3.2. *Sea f holomorfa en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$, su-pongase también que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \quad \forall z \in A,$$

donde ambas series convergen independientemente, entonces

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw,$$

donde $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $r_1 < r < r_2$, es decir, la expansión de Laurent es única. A los números a_n y b_n se les llama coeficientes de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema de Abel y su análogo, las series convergen uniformemente en γ . Así mismo las series determinadas por

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-(k+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^{n+k+1}},$$

convergen uniformemente en γ . Si $k \geq 0$ integrando término a término se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i a_k, \quad \text{si } k \geq 0.$$

También, si $k < 0$, se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i b_{-k},$$

tomando $n = -k$, se sigue el resultado. ■

Algunas veces se escribe la expansión de Laurent como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

donde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$.

3.3.2 Clasificación de Singularidades

Se estudiará el comportamiento de las funciones que son analíticas en

$$D(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Definición 3.7. Si f es analítica en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, a z_0 se le llama singularidad aislada de f .

En este caso se el teorema de Laurent es aplicable y

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \cdots$$

$$\forall z \in D(z_0, r).$$

Existen exactamente tres posibilidades excluyentes:

i) $b_k \neq 0$ y $b_\ell = 0$, $\forall \ell > k$.

ii) $b_k \neq 0$ para un número infinito de k 's.

iii) $b_k = 0, \quad \forall k$.

En el primer caso se dice que f tiene un polo de orden k en z_0 , en el segundo que f tiene una singularidad esencial en z_0 y en el tercero que z_0 es una singularidad removible de f . Si el orden de un polo es 1, se dice que es un polo simple.

Definición 3.8. Al número complejo b_1 en la expresión de Laurent se le llama residuo de f en z_0 .

Definición 3.9. Una función analítica en una región A excepto por polos en dicha región se llama meromórfica en A . A una función meromórfica en A se le llama meromórfica.

Definición 3.10. Si f tiene un polo de orden k en z_0 , a la expresión

$$\frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0}$$

en la serie de Laurent, se le llama la parte principal de f en z_0 .

Obsérvese que si f tiene una singularidad removible en z_0 entonces f es analítica en una vecindad de z_0 .

Los residuos son muy útiles para calcular integrales, por ejemplo se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.3. Sea f analítica en una región $A \setminus \{z_0\}$, donde z_0 es una singularidad con residuo b_1 . Si γ es cualquier círculo alrededor de z_0 contenido en A , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i b_1.$$

DEMOSTRACIÓN. Los coeficientes de Cauchy están dados por

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{k-1} dw,$$

en particular, para $k = 1$, tenemos el resultado. ■

Como ejemplo, $\forall w \in \mathbb{C}, e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots$, en particular, si $z \neq 0$ y $w = 1/z$, $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$, y se sigue de la unicidad de las series de

Laurent que 0 es una singularidad esencial de $z \mapsto e^{1/z}$. Además, como el residuo es 1, se tiene que, $\forall r > 0$,

$$\int_{|z|=r} e^{1/z} dz = 2\pi i.$$

Ahora se establece un criterio para distinguir los diversos tipos de singularidades. Este resultado se debe principalmente a Riemann.

Teorema 3.15. Sea A una región, $z_0 \in A$ y $f: A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, entonces

i) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) z_0 es una singularidad removible de f .
- (b) $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in (D(z_0, r) \setminus \{z_0\}) \subset A$.
- (c) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- (d) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0$.

ii) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) z_0 es un polo de orden menor o igual a k , o una singularidad removible.
- 2) Existe M tal que $|f(z)(z - z_0)^k| \leq M$ en una vecindad agujerada de z_0 .
- 3) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe.
- 4) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$.

iii) z_0 es un polo simple si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$ existe y no es 0. Este límite es el residuo de f en z_0 .

iv) z_0 es un polo de orden $k \geq 1$ si y sólo si existe $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, donde U es una vecindad de z_0 en A , con $\varphi(z_0) \neq 0$ y tal que $f(z)(z - z_0)^k = \varphi(z)$.

DEMOSTRACIÓN.

i) Evidentemente a) \implies b), c) y d). También b) o c) \implies d), por lo que basta probar que d) implica que z_0 es una singularidad removible de f . Para esto se prueba que los coeficientes b_k en la expansión de Laurent son 0.

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w)(w-z_0)^{k-1} dw, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |w-z_0| \leq r\} \subset A.$$

Dada $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $|f(w)||w-z_0| < \varepsilon$ si $|w-z_0| \leq r$, por lo que si $|w-z_0| = r$ se tiene $|f(w)| < \frac{\varepsilon}{r}$. Por consiguiente, ya que se puede tomar $r < 1$,

$$|b_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|w-z_0|=r} |f(w)||w-z_0|^{k-1} dw < \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} r^{k-1} 2\pi r = \varepsilon r^{k-1} < \varepsilon,$$

y por lo tanto

$$b_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ii) Aplicando i) a la función $(z - z_0)^k f(z)$ se obtiene el resultado. Si z_0 es una singularidad removible o un polo de orden menor o igual a k , se sigue de la expansión de Laurent que $(z - z_0)^k f(z)$ es analítica y se siguen 2), 3) y 4). Como 2) \implies 4) y 3) \implies 4), basta probar que 4) implica que z_0 es removible o polo de orden $\leq k$.

Usando i), 4) implica que $(z - z_0)^k f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 , y como la serie de Laurent para $(z - z_0)^k f(z)$ se obtiene de la de $f(z)$ multiplicandola término a término por $(z - z_0)^k$, (ya que estas series son únicas) se sigue el resultado. $f(z)$ no puede tener un polo de orden mayor a k si $(z - z_0)^k f(z)$ es holomorfa en una vecindad de z_0 .

iii) Se sigue de ii) que si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z)(z - z_0)^n$ existe, entonces z_0 es una singularidad removible o un polo simple. El límite es 0 si y sólo si f es analítica en z_0 (por i)), como el límite no es 0, z_0 es un polo simple. El recíproco y la segunda parte son consecuencia de la expansión de Laurent.

iv) Si f tiene un polo de orden k en z_0 , entonces se sigue de la expansión de Laurent que $\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^k$ es analítica en una vecindad U de z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$, ya que $\varphi(z_0) = b_k$.

Viceversa, si $\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^k$ es analítica y $\varphi(z_0) \neq 0$, se sigue de ii) que f tiene una singularidad removible o un polo de orden $\leq k$ en z_0 . Se trata de un polo de orden exactamente k , pues de otra manera, al expandir f en series de Laurent se tendría que $\varphi(z_0) = 0$. ■

Ceros de Orden k

Definición 3.11. Sea f analítica en una región A , se dice que f tiene un cero de orden k en $z_0 \in A$ si $f(z_0) = 0$, $f^{(r)}(z_0) = 0$, $\forall r < k$ y $f^{(k)} \neq 0$.

Observación. f tiene un cero de orden k en z_0 si y sólo si se cumple que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en una vecindad de z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Esto es consecuencia de la unicidad de la expansión de f en series de Taylor. En efecto, f tiene un cero de orden k en z_0 si y solo si

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k g(z),$$

donde g es analítica y $g(z_0) \neq 0$, ya que $\forall z \neq z_0$ se puede factorizar $(z - z_0)^k$, puesto que ambas series divergen o convergen simultáneamente, y si $z = z_0$, las dos series son 0.

Teorema 3.16. Sea f analítica en una vecindad de z_0 , entonces f tiene un cero de orden k en z_0 si y sólo si $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden k en z_0 . Además, si h es analítica y $h(z_0) \neq 0$, $\frac{h}{f}$ tiene un polo de orden k en z_0 .

DEMOSTRACIÓN. Si f tiene un cero de orden k , $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ con g analítica y $g(z_0) \neq 0$. Como

$$\left(\frac{1}{g(z)(z - z_0)^k} \right) (z - z_0)^k = \frac{1}{g(z)}, \quad \forall z \neq z_0,$$

$\frac{(z - z_0)^k}{f(z)}$ es una función analítica en una vecindad agujerada de z_0 , sin embargo z_0 es una singularidad removible ($\frac{1}{g(z)}$ es analítica en z_0) y el valor de la función ahí es $\frac{1}{g(z_0)} \neq 0$, se sigue entonces del teorema 3.15-iv) que z_0 es un polo de orden k para $\frac{1}{f}$.

Inversamente, si $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden k en z_0 , $g(z) = \frac{(z - z_0)^k}{f(z)}$ es analítica y $g(z_0) \neq 0$, por el teorema 3.15-iv), y por lo tanto tenemos que $\frac{1}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$ es analítica en una vecindad de z_0 y $\frac{1}{g(z_0)} \neq 0$, por lo que f tiene un cero de orden k en z_0 ($f(z) = (z - z_0)^k \frac{1}{g(z)}$ en una vecindad de z_0).

Finalmente, si h es analítica en una vecindad de z_0 , $h(z_0) \neq 0$ y f tiene un cero de orden k , entonces por la primera parte $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden k , por lo que $g(z) = \frac{(z - z_0)^k}{f(z)}$ es analítica con $g(z_0) \neq 0$, y $h(z)g(z) = \frac{(z - z_0)^k h(z)}{f(z)}$ es analítica con $g(z_0)h(z_0) \neq 0$, y por lo tanto $\frac{h}{f}$ tiene un polo de orden k en z_0 . ■

Singularidades Esenciales

Observación. Si f tiene un polo de orden k en z_0 , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Esto es cierto ya que $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$, con h analítica y $h(z_0) \neq 0$, así que $|f(z)| \geq \frac{M}{|z - z_0|^k}$ si z está cerca de z_0 , y como $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{M}{|z - z_0|^k} = \infty$,

se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Sin embargo en el caso de singularidades esenciales no sucede nada parecido.

Teorema 3.17 (Picard). *Sea z_0 una singularidad esencial de f , y U cualquier vecindad agujerada de z_0 , entonces existe un número complejo w_0 que depende de z_0 tal que, si $w \in \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ la ecuación $f(z) = w$ tiene un número infinito de soluciones en U .*

La demostración de este teorema corresponde a un curso más avanzado, sin embargo se puede demostrar una versión más débil.

Teorema 3.18 (Casorati-Weierstrass). *Sea z_0 una singularidad esencial de f y $w \in \mathbb{C}$, entonces existe una sucesión $\{z_n\}$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ y $f(z_n) \rightarrow w$.*

DEMOSTRACIÓN. Si el teorema no es cierto, entonces existe $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ y una vecindad U de z_0 tal que

$$|f(z) - w| > \varepsilon, \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Ahora sea

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

como g es analítica en $U \setminus \{z_0\}$, y como $|g(z)| < \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$, g tiene una singularidad removible en z_0 . Ahora, z_0 es un cero de orden k de g , k finito, ya que de otra manera se tendría $g(z) \equiv 0$ en U , y esto no es cierto. Por lo tanto $\frac{1}{g}$ tiene un polo de orden k en z_0 ó es analítica en z_0 , además

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) - w \quad \text{ó} \quad f(z) = \frac{1}{g(z)} + w,$$

lo que implicaría que f tiene un polo de orden k en z_0 ó es analítica en z_0 , lo cual contradice las hipótesis. ■

3.3.3 Ejemplos Desarrollados

1. Encuentre expansiones de Laurent, y los residuos en los puntos especificados para:

(a) $\frac{z+1}{z}$, $z_0 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$.

$$(b) \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = i, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2.$$

Solución.

$$(a) \frac{z+1}{z} = \frac{1}{z} + 1. \quad \text{Por unicidad, ésta es la serie de Laurent. El residuo es 1.}$$

(b) Podemos descomponer la función como sigue:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Ahora, $\frac{1}{z+i}$ es analítica cerca de $z_0 = i$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z-(-i)} = \frac{1}{2i \left(1 - \frac{z-i}{-i-i}\right)} \\ &= \frac{1}{2i \left(1 - \frac{z-i}{-2i}\right)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n, \end{aligned}$$

lo cual es válido si $|z-i| < |2i| = 2$. (El truco es el de Taylor.)

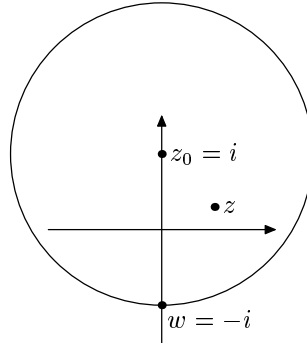


Figura 3.5: Truco de Taylor

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z_0-w+z-z_0} = \frac{1}{(z_0-w) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$$

Por consiguiente

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n},$$

y el residuo es $1/2$.

2. Determine el orden del polo de las siguientes funciones, y encuentre los residuos.

(a) $\frac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$.

(b) $\frac{e^z - 1}{z^2}$, $z_0 = 0$.

(c) $\frac{z + 1}{z - 1}$, $z_0 = 0$.

Solución.

(a) z^2 tiene un cero de orden 2 y $\cos 0 = 1$, por lo que $\frac{\cos z}{z^2}$ tiene un polo de orden 2 en $z_0 = 0$. Alternativamente

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$$

que además nos da el valor del residuo: 1.

(b) Como el numerador en 0 es 0, el teorema 3.16 no se aplica.

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots,$$

y por tanto 0 es un polo simple con residuo 1.

(c) f es analítica en z_0 .

3. Determine cuales de las siguientes funciones tienen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

(a) $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$.

(b) $\frac{e^z}{z}$.

(c) $\frac{(e^z - 1)^2}{z^2}$.

(d) $\frac{z}{e^z - 1}$.

Solución.

(a) $\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sen} z = 0$, y 0 es una singularidad removible. Alternativamente

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots.$$

- (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z} z = 1$ y 0 es un polo simple.
- (c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} z = 0$ y por lo tanto $\frac{e^z - 1}{z}$ es entera y $\frac{(e^z - 1)^2}{z^2}$ también.
- (d) $\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots$, así que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ y $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$, por lo que $\frac{z}{e^z - 1}$ tiene una singularidad removible en 0.

3.4 Teorema del Residuo. Integrales Definidas

3.4.1 Teorema del Residuo

Establecemos ahora un resultado muy importante, especialmente por su uso en el cálculo de integrales indefinidas.

Teorema 3.19 (Teorema del Residuo). *Sea A una región en \mathbb{C} , z_1, z_2, \dots, z_n puntos en A , $f: A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y γ una curva cerrada en $A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ que es homotópica a un punto en A , entonces*

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=0}^n \text{Res}(f, z_j) I(\gamma, z_j),$$

donde $\text{Res}(f, z_j)$ es el residuo de f en z_j .

Antes de demostrar el teorema, es fácil mostrar de manera intuitiva porque éste es cierto para curvas simples. Se tiene por la fórmula para los coeficientes de Cauchy que

$$2\pi i b_1(z_k) = \int_{|z - z_k| = r} f(z) dz,$$

por lo cual el teorema es resultado del teorema generalizado de la deformación.

DEMOSTRACIÓN. Como z_j es singularidad aislada de f , $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $r_j > 0$ tal que f se puede expandir en series de Laurent en

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_j| < r_j\},$$

de modo que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_j)^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_j)^m}.$$

Recuérdese que la parte singular $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_j)^m}$ converge en $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ y lo hace uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| \geq \varepsilon\}$, $\forall \varepsilon > 0$, por lo cual, usando el

teorema de Weierstrass, $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-z_j)^m}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$. Denotamos esta parte singular de f alrededor de z_j como $S_j(z)$. Ahora, la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n S_j(z)$$

es analítica en $A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Se afirma que z_1, z_2, \dots, z_n son singularidades removibles de g . Para demostrar esto, observese que en una vecindad $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_j| < r_j\}$ tal que no contenga a otras singularidades, se tiene

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_j)^m + S_j(z),$$

por lo cual

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_j)^m - \sum_{k=1}^{j-1} S_k(z) - \sum_{k=j+1}^n S_k(z),$$

así que $\lim_{z \rightarrow z_j} g(z)$ existe, ya que S_k es analítica en z_j , $\forall k \neq j$. Consecuentemente, g es analítica en A , y el teorema de Cauchy implica que $\int_{\gamma} g = 0$, por lo que

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma} S_j.$$

Para calcular $\int_{\gamma} S_j$, observese que S_j es de la forma $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-z_j)^m}$, que converge uniformemente en los exteriores de círculos alrededor de z_j , en particular, la convergencia es uniforme en γ y se puede integrar término a término, i. e.,

$$\int_{\gamma} S_j = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{b_m}{(z-z_j)^m} dz.$$

Estas integrales son todas cero, si $m \neq 1$, ya que γ es una curva cerrada y los integrandos son derivadas de otras funciones, obteniéndose

$$\int_{\gamma} S_j = 2\pi i b_1 \cdot I(\gamma, z_j). \quad \blacksquare$$

3.4.2 Integrales Definidas

El teorema del residuo es muy útil para reducir integrales definidas que no es fácil calcular mediante métodos reales.

Teorema 3.20. Sea f analítica en \mathbb{C} , excepto por un número finito de polos, los cuales no son reales; supongase también que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \forall |z| > R, \quad R, M \in \mathbb{R}^+,$$

y que f toma valores reales en \mathbb{R} , entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i \sum \{\text{Residuos de } f \text{ en el semiplano superior}\} \\ &= -2\pi i \sum \{\text{Residuos de } f \text{ en el semiplano inferior}\}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea γ_r como en la figura 3.6, donde $r > R$ se toma suficientemente grande para que todos los polos de f en el semiplano superior esten en el interior de γ_r , entonces, por el teorema del residuo

$$\int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum \{\text{Residuos de } f \text{ en el semiplano superior}\}. \quad (3.1)$$

Además

$$\int_{\gamma_r} f = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_{\sigma_r} f(z) dz, \quad (3.2)$$

donde σ_r es el semicírculo superior de radio r .

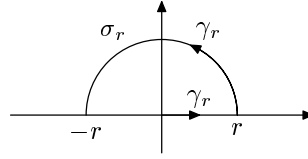


Figura 3.6: La curva γ_r .

Por otra parte, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ es por definición $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow -\infty}} \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx$. Este límite existe si existen los límites $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_0^{x_1} f(x) dx$ y $\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \int_{x_2}^0 f(x) dx$, y la existencia de estos dos queda asegurada por la condición $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ si $|x| > R$:

$$\int_R^{x_1} |f(x)| dx \leq \int_R^{x_1} \frac{M}{x^2} dx = \frac{M}{R} - \frac{M}{x_1} \rightarrow \frac{M}{R} \quad \text{cuando } x_1 \rightarrow \infty,$$

por lo que $\int_0^{\infty} f(x) dx$ existe, análogamente se demuestra que $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ existe. En este argumento se está usando el hecho de que si $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ existe entonces también existe $\int_0^{\infty} f(x) dx$.

(Brevemente, $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$, y $f = (f + |f|) - |f|$, por lo que es integrable; el criterio de comparación vale para funciones no negativas, si $0 \leq h(x) \leq g(x)$ y $\int_0^\infty g(x) dx$ existe, entonces $\int_0^\infty h(x) dx$ también ya que la función $H(t) = \int_0^t h(x) dx$ es creciente y acotada.)

Consecuentemente $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ existe y es igual a $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$.

Ahora, $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\sigma_r} f(z) dz = 0$, puesto que

$$\left| \int_{\sigma_r} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{r^2} \pi r = \frac{M}{r} \pi \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty.$$

Juntado esta información, el teorema es consecuencia inmediata de (3.1) y (3.2). La segunda igualdad para el semiplano inferior se obtiene de forma análoga. ■

Corolario 3.4. *Las hipótesis del teorema 3.20 se cumplen si $f = \frac{P}{Q}$, donde P y Q son polinomios reales, $\text{grado } Q \geq 2 + \text{grado } P$ y Q no tiene ceros en el eje real.*

DEMOSTRACIÓN. Sean n y m , $m \geq n + 2$, los grados de P y Q respectivamente. Se afirma que existe $R \in \mathbb{R}^+$, $R > 1$ tal que $|P(z)| \leq M_1 |z|^n$ si $|z| > 1$ y $|Q(z)| \geq M_2 |z|^m$ si $|z| > R$, con M_1 y M_2 constantes positivas. Esta afirmación implica el corolario, puesto que si $|z| > R$,

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M_1}{M_2} \frac{1}{|z|^{m-n}} \leq \frac{M_1}{M_2} \frac{1}{|z|^2}.$$

Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $|z| > 1$,

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq |a_n| |z|^n + \cdots + |a_0| \leq |a_n| |z|^n + \cdots + |a_0| |z|^n \\ &= |z|^n (|a_n| + \cdots + |a_0|). \end{aligned}$$

Escribiendo $Q(z) = a_m z^m + \cdots + a_0$, tenemos que

$$a_m z^m = Q(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{m-1} z^{m-1}$$

y

$$|a_m z^m| \leq |Q(z)| + |a_0| + |a_1 z| + \cdots + |a_{m-1} z^{m-1}|,$$

por lo tanto

$$|Q(z)| \geq |a_m z^m| - |a_{m-1} z^{m-1}| - \cdots - |a_0|.$$

Si $a = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|$ y $|z| > 1$,

$$|Q(z)| \geq |z|^{m-1} \left(|a_m| |z| - |a_{m-1}| - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^{m-1}} \right) \geq |z|^{m-1} (|a_m| |z| - a).$$

Finalmente, si $k < |a_m|$, $|z|^{m-1} (|a_m| |z| - a) = |z|^m |a_m| - a |z|^{m-1} \geq k |z|^m \iff |z| \geq \frac{a}{|a_m| - k}$, así que tomando $R = \frac{a}{|a_m| - k}$ se obtiene la desigualdad que se deseaba. ■

Como ejemplo se evalúa $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$. El integrando claramente satisface las hipótesis del corolario 3.4, y las singularidades son $e^{\pi i/4}$, $e^{3\pi i/4}$, $e^{5\pi i/4}$ y $e^{7\pi i/4}$, denotando estas por α_1 , α_2 , α_3 , y α_4 , se tiene que son polos simples, ya que

$$\lim_{z \rightarrow \alpha_j} \frac{z - \alpha_j}{z^4 - 1}$$

existe y es distinto de 0.

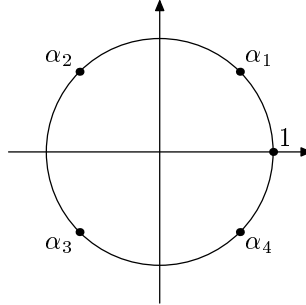


Figura 3.7: Puntos singulares de $\frac{1}{z^4+1}$.

Estos límites son precisamente los residuos, en el semiplano superior estos son

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{z - \alpha_1}{z^4 - 1} &= \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{1}{(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)} \\ &= \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}} 2\alpha_1 \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) i} = \frac{1}{4i\alpha_1}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \alpha_2} \frac{z - \alpha_2}{z^4 - 1} &= \lim_{z \rightarrow \alpha_2} \frac{1}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)} \\ &= \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \\ &= \frac{1}{\frac{-2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2i}{\sqrt{2}} \right) 2\alpha_2} = \frac{-1}{4i\alpha_2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{4i\alpha_1} - \frac{1}{4i\alpha_2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1\alpha_2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-2/\sqrt{2}}{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Integrales Trigonómicas

Teorema 3.21. Sea $R(x, y)$ una función racional de x e y , y

$$f(z) = \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz},$$

supóngase también que f no tiene polos en el círculo unitario, entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sen \theta) d\theta = 2\pi i \sum \{ \text{Residuos de } f \text{ en } |z| < 1 \}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\gamma(\theta) = \cos \theta + i \sen \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, por el teorema del residuo

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{z \in \text{int } \gamma} \text{Res}(f, z).$$

El número de singularidades de f es finito ya que al evaluar R en

$$\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \right),$$

si $z \neq 0$ se puede multiplicar numerador y denominador por una potencia adecuada de z y obtener una función racional en z . Ahora

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sen \theta) d\theta. \quad \blacksquare$$

Como ejemplo evaluamos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Si $\gamma(\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ y f es como en el teorema

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz \left(1 + a^2 - \frac{2a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} = \frac{1}{i(z + za^2 - az^2 - a)} \\ &= \frac{i}{a(z^2 - (a + 1/a)z + 1)} = \frac{i}{a(z - a)(z - 1/a)}, \end{aligned}$$

y los polos no están en γ .

$$\text{Si } a < 1, \quad \operatorname{Res}(f, a) = \frac{i}{a(a - 1/a)} = \frac{i}{a^2 - 1}.$$

$$\text{Si } a > 1, \quad \operatorname{Res}(f, 1/a) = \frac{i}{a(1/a - a)} = \frac{i}{1 - a^2}, \text{ y por lo tanto,}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - a^2} & \text{si } a < 1, \\ \frac{2\pi}{a^2 - 1} & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] Robert G. Bartle. *Introducción al Análisis Matemático*. Limusa, primera edición.
- [2] Jerold E. Marsden y Michael J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja*. Trillas, primera edición, 1996.