Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos
(versión preliminar)

Héctor Méndez Lango

1. Presentación

El material aquí reunido pretende ser un acompañante útil de aquellos estudiantes que emprenden un primer curso de Sistemas Dinámicos Discretos.

En el desarrollo reciente de esta teoría es posible destacar dos momentos muy importantes: El primero se da en la década de los sesentas, 1960-1970, con los trabajos de Steve Smale y el grupo de matemáticos que trabajaba cercano a él. El estudio de las propiedades dinámicas de un ejemplo propuesto en aquellos años, hoy conocido como la *Herradura de Smale*, permitió a muchísimos matemáticos, y estudiosos de otras áreas, acercarse a la observación de comportamientos realmente sorprendentes en los sistemas dinámicos discretos. El segundo momento se presenta en la década de los ochentas, 1980-1990, donde se inicia la difusión entre un gran número de personas (cercanas o no a las matemáticas) de conceptos como *función caótica* y *conjunto fractal*. Los trabajos de Robert Devaney son determinantes en la génesis de este segundo momento. La definición de función caótica propuesta por Devaney en su libro *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* ([Dev1]) es hoy en día uno de los primeros escalones a recorrer para los que se inician en el estudio de esta área de las matemáticas. Es por ello que hemos decidido tomar como meta de estas notas introductorias recorrer el camino necesario para llegar a la presentación de dicha definición. Estamos convencidos que este recorrido inicial permitirá a la lectora y al lector continuar después por su cuenta el estudio de los muchísimos otros temas que forman esta teoría contiene.

Este trabajo contiene una buena cantidad de ejercicios y preguntas junto con unas cuantas definiciones y proposiciones. A diferencia de otros textos, hemos colocado los ejercicios no al final si no en el lugar donde nos pareció que la lectora, o el lector, ya tenía las herramientas necesarias para enfrentarlos. La solución o, al menos, el intento de solución de estos problemas es parte fundamental del recorrido propuesto. Siempre que nos fue posible damos la referencia al lugar donde el ejercicio (o el teorema) fue planteado (o demostrado) anteriormente.

Al final ofrecemos una lista de títulos que nos parece muy recomendable consultar. Todos ellos han ayudado a formar el punto de vista con el que nos introduciremos en los sistemas dinámicos. A los estudiantes que están cursando su primerísima experiencia en este tema les recomendamos considerar también la lectura del folleto: *ITERACIÓN DE FUNCIONES (notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos)* ([Men]).

En dos ocasiones hemos tenido la oportunidad de impartir en la Facultad de Ciencias de la UNAM un curso de introducción a la Teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos. La primera vez en el semestre 1995-I (junto con el profesor Jefferson King). La segunda durante el semestre 2001-II. De estas dos experiencias se formó la base de este trabajo. Los estudiantes que asistieron a estos cursos hicieron, sin saberlo plenamente, un gran aporte. Gracias a todos ellos.

2. Primeras definiciones

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y sea $f : X \to X$ una función continua. Dado que el contradominio y el dominio de f son el mismo espacio, podemos definir nuevas funciones a partir de la composición de f consigo misma: f^0 será la función identidad, $id : X \to X$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ..., $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$. Llamaremos a estas funciones las iteradas de f. Las siguientes dos propiedades son inmediatas: Si $n, m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ representa al conjunto de los números enteros positivos), entonces $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{nm}$.

Dado un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la órbita de x bajo f

$$\left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\} = o(x, f).$$

La *dinámica* de f aparece cuando consideramos cada órbita, $o(x, f)$, como las distintas posiciones que va recorriendo un objeto al paso del tiempo. En $t = 0$ estaba en x; en $t = 1$ en $f(x)$; en $t = 2$ en $f^2(x)$; y así sucesivamente.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{tiempos} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \text{posiciones} & x & f(x) & f^2(x) & f^3(x) & \cdots & f^n(x) \end{array}.$$

Cada x en X da lugar a una órbita, es decir, a una secuencia de movimientos. Bajo este punto de vista la función f genera un *sistema dinámico discreto*. Decir que nos interesa estudiar las propiedades dinámicas de f es sólo otra manera de expresar que nos interesa conocer cómo son todas las órbitas que ella y los puntos de I producen.

En estas notas nuestro interés principal es el estudio de las propiedades dinámicas de las funciones continuas. En todas las proposiciones y en todos los ejercicios asumiremos, como parte de las hipótesis, que la función con la que trabajamos es continua en su dominio. Si bien hemos iniciado nuestro estudio en un nivel muy general al considerar funciones definidas en un espacio métrico, la mayoría de nuestros ejemplos y observaciones se refiren a funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado de la recta real, digamos $f : [a, b] \to [a, b]$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. De aquí en adelante denotaremos con la letra I el intervalo $[0, 1]$. Las funciones cuya dinámica más nos interesa estudiar son de la forma $f : I \to I$. Veremos que aún en este terreno (en este conjunto de funciones) se presentan propiedades dinámicas muy interesantes.

Definición 2.1 *Sea $f : X \to X$. Decimos que x es un punto periódico de f, o tiene una órbita periódica bajo f, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menor de estos números le llamamos el período de x. Si $f(x) = x$, decimos que x es un punto fijo (además de ser un punto periódico de período 1). Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos así: $Per(f)$.*

Sea $f : I \to I$. Dada x en I, la órbita de x bajo f es un conjunto. Si lo pensamos un poco más, la $o(x, f)$ es también una sucesión: el primer elemento es x, el segundo es $f(x)$, el tercer elemento es $f^2(x)$, y así sucesivamente. Por ejemplo si x es un punto fijo de f, entonces $o(x, f) = \{x\}$ o, sin faltar a la verdad, podríamos decir que $o(x, f) = \{x, x, x, \ldots\}$, una sucesión constante. Obsérvese que si x es un punto fijo de f, entonces el punto $(x, f(x))$ pertenece tanto a la gráfica de f como a la gráfica de la función identidad, $id : I \to I$, $id(x) = x$ para todo $x \in I$. Consideraremos a los puntos fijos como puntos periódicos de período 1.

Ejercicio 2.1 *Considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $[a, b]$ un intervalo en la recta real $\mathbb{R}$. Demuestra lo siguiente:*

i) Si $[a,b] \subset f([a,b])$, *entonces* f *tiene un punto fijo en* $[a,b]$.
ii) Si $[a,b] \supset f([a,b])$, *entonces* f *tiene un punto fijo en* $[a,b]$.

Sugerencia: Cada una de las afirmaciones es consecuencia del Teorema del Valor Intermedio.

Ejercicio 2.2 *Considera* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Sean* $[a,b]$ *y* $[c,d]$ *dos intervalos tales que* $[c,d] \subset f([a,b])$. *Demuestra que existe un subintervalo de* $[a,b]$, *digamos* $[\alpha,\beta]$, *tal que* $f([\alpha,\beta]) = [c,d]$.

Sugerencia: Nuevamente el Teorema del Valor Intermedio es importante. Además es conveniente saber que el conjunto $\{x \in [a,b] \,|\, f(x) = c\}$ es un conjunto cerrado, de hecho compacto, ya que f es continua. Este tipo de conjuntos tiene máximo y mínimo.

Ejercicio 2.3 *Sean* $[a,b]$ *y* $[c,d]$ *dos intervalos tales que* $[c,d] \subset f([a,b])$, $[a,b] \subset f([c,d])$ *y* $[c,d] \cap [a,b] = \phi$. *Demuestra que* f *tiene un punto periódico de período 2.*

Sugerencia: Utilizar los dos ejercicios anteriores.

Ejercicio 2.4 *([Dev1]) Sean* $J = [a,b]$ *y* $f : J \to J$ *una función derivable en* J. *Supongamos que para todo* $x \in J$ *se tiene que* $|f'(x)| < 1$.
i) Demuestra que para toda pareja de puntos $x \neq y$ *en* J *se tiene que* $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.
ii) Demuestra que f *tiene un único punto fijo en* J.

Sugerencia: Ahora es el Teorema del Valor Medio el que conviene recordar. La existencia de al menos un punto fijo está garantizada por el ejercicio 2.1.

Ejercicio 2.5 *Verdadero o falso. Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función derivable en todo* $\mathbb{R}$. *Si para toda pareja de puntos* $x \neq y$ *en* $\mathbb{R}$ *se tiene que* $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, *entonces* f *tiene un único punto fijo.*

Observación: Si se opta por considerar que la afirmación es falsa, entonces hay que construir una función que cumpla las condiciones y cuya gráfica no toque la recta $y = x$. Tomar esta opción es recomendable.

Ejercicio 2.6 *Sean J un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|,$$

para toda pareja x, y en J, donde c es alguna constante, $0 < c < 1$. Demuestra que:

i) f es continua en J (de hecho es uniformemente continua).

ii) Existe a lo más un punto fijo de f en J.

iii) Si existe un punto fijo en J, entonces la órbita de cualquier punto $x \in J$ es convergente a dicho punto fijo.

Una de las funciones con propiedades dinámicas más interesantes es la *función logística*. Ésta es su definición: Sea $f : I \to I$ dada por $f(x) = 4x(1 - x)$. Es sencillo confirmar las siguientes propiedades iniciales de f. La gráfica es una parábola contenida en el cuadrito $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, f es suprayectiva, no es inyectiva, es estrictamente creciente en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y estrictamente decreciente en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Todas estas consideraciones son útiles para el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.7 *Sea $f : I \to I$ la función logística.*

i) ¿Tiene f puntos periódicos de período 2?

ii) ¿Tiene f puntos periódicos de período 3?

iii) Si la respuesta a alguno de los dos incisos anteriores es afirmativa, ¿cuántos puntos periódicos del período respectivo tiene f?

Sugerencia: Observa la intersecciones de las gráficas de f^2 y f^3 con la recta $y = x$.

Otra de las funciones clave en el estudio de los sistemas dinamicos discretos es la siguiente: Sea $T : I \to I$ dada por la regla de correspondencia

$$T(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

En la literatura en inglés esta función es conocida como el *tent map*. En estas notas siempre nos referiremos a ella como *la tienda*, y siempre la denotaremos con la letra T.

Definición 2.2 *Sean J y K dos espacios métricos y sea $f : J \to K$ una función. Decimos que f es un homeomorfismo si f es continua en J, f es biyectiva y $f^{-1} : K \to J$ es continua en K.*

Ejemplo 2.1 *La función* $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *dada por* $f(x) = \arctan(x)$ *es un homeomorfismo.*

Ejercicio 2.8 *Sean* $k \in \mathbb{N}$ *y* $l \in \left\{0, 1, 2, 3, \ldots 2^k - 1\right\}$. *Entonces*

$$T^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además, si $x \in \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$, *entonces* $T^k(x) = px + q$ *donde* $|p| = 2^k$ *y* $q \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 2.9 *Decimos que dos órbitas son distintas si son ajenas como conjuntos. ¿Cuántas órbitas distintas de período tres tiene* T*?*

Sugerencia: Dibujar la gráfica de T^3 es un posible camino a seguir.

Ejercicio 2.10 *¿Son las siguientes dos afirmaciones verdaderas o falsas?*

i) Si x *es un número racional, entonces la* $o(x, T)$ *tiene cardinalidad finita.*

ii) Si x *es un número irracional, entonces la* $o(x, T)$ *no es periódica.*

Sugerencia para i): Un punto $x \in \mathbb{Q} \cap I$ se puede expresar así: $x = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos primos entre sí. Sea $B = \left\{o, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$, observa que $x \in B$ y $T(x) \in B$.

Sugerencia para ii): Suponte que la $o(x, T)$ sí es periódica. Esto nos proporciona una $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$. Pero, ¿qué tipo de puntos pueden cumplir esta última ecuación?

Ejercicio 2.11 *Sea* $(a, b) \subset I$, $a < b$. *Demuestra que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $T^n(a, b) = I$.

Sugerencia: El ejercicio 2.8 puede ayudar.

Ejercicio 2.12 *Sean* $J = [a, b]$ *y* $f : J \to J$. *Si* $Per(f) = J$, *entonces* f *es un homeomorfismo.*

Sugerencia: Demuestra primero que f es suprayectiva. La inyectividad se sigue de que f debe ser, bajo las condiciones dadas, estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Ejercicio 2.13 *([Dev1]) Sean $J = [a, b]$ y $f : J \to J$. Si f es un homeomorfismo, entonces f no tiene puntos periódicos de período distinto de 1 ó 2.*

Sugerencia: Supongamos que la órbita de $x \in Per(f)$ es de período $n \geq 3$. Considera el máximo y el mínimo del conjunto $o(x, f)$, digamos M y m. Observa que no es posible que $f(\{m, M\}) = \{m, M\}$.

Definición 2.3 *Sean J y K dos conjuntos tales que $J \subset K$. Decimos que J es denso en K si para todo punto $x \in K$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe $y \in J$ tal que la distancia de x a y es menor que ε, $d(x, y) < \varepsilon$.*

Observa que si $J \subset K \subset \mathbb{R}$, entonces J es denso en K si para todo intervalo (a, b) con la propiedad de que $(a, b) \cap K \neq \phi$ se tiene que $(a, b) \cap J \neq \phi$. Si K es un intervalo, entonces J es denso en K si para todo intervalo $(a, b) \subset K$, $a < b$, se tiene que $(a, b) \cap J \neq \phi$.

Proposición 2.1 *$Per(T)$ es un conjunto denso en I.*

Demostración. Sea $(a, b) \subset I$, $a < b$. Por el ejercicio 2.11, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(a, b) = I$. Por lo tanto existe $x \in (a, b)$ tal que $T^n(x) = x$. $\square$

Sea $f : I \to I$. Dos órbitas periódicas, digamos $o(x, f)$ y $o(y.f)$, de período distinto son ajenas. Por tanto, la presencia de una cantidad infinita de órbitas periódicas bajo f tales que cada par de ellas tiene período distinto nos dice que el sistema dinámico discreto generado por f tiene una infinidad de comportamientos distintos posibles. Si, además, los puntos periódicos forman un conjunto denso en I, entonces la dinámica de $f : I \to I$ es realmente muy rica. Tal es el caso de la función T.

Ejercicio 2.14 *Demuestra que el conjunto de las $n \in \mathbb{N}$ tales que existe un punto periódico de T de período n no es acotado.*

Sugerencia: Cuenta el número de intersecciones de la gráfica de la función T^{2^n} con la recta $y = x$.

Definición 2.4 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Decimos que x es un punto atrapado si su órbita bajo f es un conjunto acotado. Al conjunto de todos los puntos atrapados lo denotamos así:*

$$A(f) = \{x \,|\, o(x, f) \text{ está acotada}\}.$$

Ejercicio 2.15 *Describe, en cada caso, el conjunto $A(f)$. Asumimos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.*

i) $f(x) = 2\arctan(x)$.

ii) $f(x) = x^2 - 2$.

iii) $f(x) = x + sen(x)$.

iv) $f(x) = \begin{cases} 3x \ si\ x \leq \frac{1}{2} \\ 3-3x \ si\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

v) $f(x) = \frac{1}{e}e^x$.

Ejercicio 2.16 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que si $A(f)\neq\phi$, entonces f tiene un punto fijo.*

Sugerencia: Si f no tiene puntos fijos, entonces su gráfica está enteramente sobre la diagonal $y = x$, o está enteramente bajo esa diagonal. Observa que en el primer caso todas las órbitas son estrictamente crecientes. Una de ellas, al menos, es acotada y, por tanto, es convergente.

3. Transitividad topológica

El concepto de transitividad topológica, que definiremos a continuación, trata de reflejar la siguiente característica (presente en algunos sistemas dinámicos): Dadas dos zonas cualesquiera del espacio donde esta definida la función, existe un punto en la primera zona cuya órbita visita, en algún momento, la segunda. Así, una función transitiva, aseguraría la existencia de puntos cuya órbita viaja de una parte arbitraria del espacio a otra parte igualmente arbitraria del mismo.

Definición 3.1 *Sea $f:X\to X$. Decimos que f es topológicamente transitiva (o transitiva) en X si para cualquier pareja de subconjuntos abiertos de X, A y B, distintos del vacío, existen $a\in A$ y $n\geq 1$ tales que $f^n(a)\in B$.*

Proposición 3.1 *La función tienda, T, es transitiva en I.*

Demostración: Es suficiente demostrar que para cualesquiera dos intervalos abiertos, (a,b), $a<b$, (c,d), $c<d$, en I, existen $x\in(a,b)$ y $n\geq 0$ tales que $T^n(x)\in(c,d)$. Por el ejercicio 2.11, sabemos que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $T^n(a,b) = I$. De aquí se sigue, de manera inmediata, la existencia del punto x y de la iteración n que necesitamos. $\square$

Ejercicio 3.1 *Demuestra que cualquier homeomorfismo $f : I \to I$ que sea creciente no es transitivo.*

Sugerencia: Observa que bajo las condiciones del problema se puede concluir que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Considera los intervalos abiertos $U = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $W = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. ¿Es posible que $f(U) \cap W \neq \phi$ y $f(W) \cap U \neq \phi$?

Ejercicio 3.2 *Sea $f : I \to I$ una función suprayectiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f es transitiva en I.

ii) Para todo intervalo (a, b), $a < b$, en I, se tiene que $\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(a, b)$ es un conjunto denso en I.

iii) Para todo intervalo (a, b), $a < b$, en I, se tiene que $\cup_{n=0}^{\infty} f^{n}(a, b)$ es un conjunto denso en I.

Observación: En este ejercicio $f^{-n}(a, b)$ representa la imagen inversa de (a, b) bajo la función f^n.

La transitividad y la existencia de puntos en el espacio cuya órbita forma un conjunto denso son dos condiciones relacionadas.

Proposición 3.2 *Sean $f : I \to I$ y $x \in I$. Si la $o(x, f)$ es un conjunto denso en I, entonces el conjunto de puntos en I tales que tienen órbita densa forman un conjunto, a su vez, denso en I.*

Demostración. Sea $A = o(x, f)$. Como este conjunto es denso en I, entonces el conjunto $A \setminus \{x\} = o(f(x), f)$ también es un conjunto denso en I. De hecho, para cada número natural n se tiene que el conjunto $A \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\} = o(f^n(x), f)$ es denso en I. Así la órbita de cada elemento de la órbita de x es densa en I. Es ahora inmediato que el conjunto de puntos con órbita densa es un conjunto denso en I. $\square$

Proposición 3.3 *Sean $f : I \to I$ y $x \in I$. Si la $o(x, f)$ es un conjunto denso en I, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos de I, abiertos y distintos del vacío. De la densidad de $o(x, f)$ se sigue que existe $n > 0$ tal que $f^n(x) \in A$. De la densidad de $o(f^n(x), f)$, existe $m > 0$ tal que $f^m(f^n(x)) \in B$. Y con ello, concluimos que f es transitiva. $\square$

Las rotaciones de ángulo irracional en el círculo son ejemplos de funciones transitivas ya que en cada una de ellas todas las órbitas forman conjuntos densos (una demostración de esta afirmación se puede encontrar en [Dev1]). Un ejemplo en donde se tengan al mismo tiempo las dos condiciones: i) densidad de puntos periódicos y ii) transitividad, es la función T. Este hecho es por lo menos sorprendente. Más adelante veremos que estas dos condiciones están fuertemente ligadas con la definicón de función caótica dada por R. Devaney.

4. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Supongamos que x_0 es un punto fijo de $f : I \to I$. Si para puntos cercanos a x_0 observamos que sus órbitas se mantienen , para toda iteración de f, cercanas a x_0, entonces diremos que x_0 es un punto fijo estable. Digamos que nuestra idea de estabilidad en un punto fijo se refiere a que el comportamiento de todas las órbitas que inician cerca de él se comportan casi como órbitas de puntos fijos. La siguiente definición presenta de manera formal esta idea.

Definición 4.1 *Sea x_0 es un punto fijo de $f : I \to I$. Decimos que x_0 es un punto fijo estable si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ se tiene que $|f^n(y) - x_0| < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 4.1 *La función $f : I \to I$ dada por $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos, 0 y 1. El primero de ellos es estable y el segundo no lo es.*

Consideremos ahora el concepto de estabilidad en un punto t aún cuando este punto no sea fijo.

Definición 4.2 *Sean $f : I \to I$ y $t \in I$. Decimos que la $o(t, f)$ es estable si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $y \in (t - \delta, t + \delta) \cap I$ se tiene que $|f^n(y) - f^n(t)| < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 4.2 *Sea $f : I \to I$ dada por $f(x) = 1 - x$. La órbita de cualquier punto en I es estable ya que f es una isometría (preserva las distancias).*

Ejercicio 4.1 *Demuestra que todo $t \in [0, 1)$ tiene órbita estable bajo la función considerada en el ejemplo 4.1.*

Observemos que un punto x en I tendría órbita no estable (también llamada inestable) si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ y $n > 0$ tales que $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \varepsilon_0$. Tendríamos un valor positivo fijo tal que en toda vecindad de x habría al menos un punto cuya órbita, en alguna iteración, se separaría de la órbita de x (en esa misma iteración) una distancia mayor o igual a ese valor positivo fijo. Una función tal que todas sus órbitas fueran inestables sería sumamente interesante. Tal función sí existe. Antes de presentarla consideremos la siguiente definición:

Definición 4.3 *Sea $f : I \to I$. Decimos que f es sensible a las condiciones iniciales en I si existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $x \in I$ y para toda $\delta > 0$, existen $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ y $n > 0$ tales que $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \varepsilon$.*

Observemos que si f es sensible, entonces todas sus órbitas son inestables.

Proposición 4.1 *La función T es sensible en I.*

Demostración. Considera $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sean $x \in I$ y $\delta > 0$. Por el ejercicio 2.11, existe $n > 0$ tal que $T^n((x-\delta, x+\delta) \cap I) = I$. Por lo tanto existen u y w en $(x-\delta, x+\delta) \cap I$ tales que $T^n(u) = 0$ y $T^n(w) = 1$.

Como

$$1 = |T^n(u) - T^n(w)| \leq |T^n(u) - T^n(x)| + |T^n(x) - T^n(w)|,$$

uno de estos dos valores: $|T^n(u) - T^n(x)|$, $|T^n(x) - T^n(w)|$, es mayor o igual a ε. □

5. La definición de caos

Hemos alcanzado nuestra meta. Estamos ya en condiciones de presentar la definición de caos propuesta por R. Devaney.

Definición 5.1 *Sea $f : X \to X$. Decimos que f es caótica en X si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

i) El conjunto de puntos periódicos de f forma un conjunto denso en X.

ii) f es transitiva en X.

iii) f es sensible a las condiciones iniciales en X.

Proposición 5.1 *La función tienda, T, es caótica en I.*

Demostración. La afirmación es inmediata a partir de las proposiciones 2.1, 3.1 y 4.1. $\square$

Ejercicio 5.1 *Verdadero o falso. Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$. Sea $f : M \to M$ una isometría. Entonces f no es caótica en M.*

Proposición 5.2 *Sea $f : I \to I$ una función caótica en I. Entonces los períodos de los puntos periódicos de f forman un conjunto no acotado.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considera los siguientes n intervalos abiertos: $A_i = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Como f es transitiva y continua, existen $n-1$ numeros positivos, $k_1, \ldots, k_{n-1}$, tales que

$$\begin{array}{rcl} A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n) & \neq & \phi, \\ A_{n-2} \cap f^{-k_2}\left(A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n)\right) & \neq & \phi, \\ A_{n-3} \cap f^{-k_3}\left(A_{n-2} \cap f^{-k_2}\left(A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n)\right)\right) & \neq & \phi, \\ & & \vdots \\ A_1 \cap f^{-k_{n-1}}\left(A_2 \cap \left(f^{-k_{n-2}}(A_3 \cap \cdots)\right)\right) & \neq & \phi. \end{array}$$

Como el conjunto $A_1 \cap f^{-k_{n-1}}\left(A_2 \cap \left(f^{-k_{n-2}}(A_3 \cap \cdots)\right)\right)$ es abierto en I, contiene un punto periódico de f, digamos x. Como la órbita de este punto recorre n conjuntos ajenos, en parejas, entonces su período no es menor que n. $\square$

Ejercicio 5.2 *Demuestra que cualquier homeomorfismo $f : I \to I$ no es caótico.*

Sugerencia: Junta la información contenida en la proposición anterior y el ejercicio 2.13.

Ejercicio 5.3 *Sean $S = \{(x, y) \,|x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \,||z| = 1\}$, y $f : S \to S$ dada por $f(z) = z^2$. Demuestra que f es caótica en S.*

Estimado lector y estimada lectora, ojalá que al final de este recorrido tu interés en este tema haya crecido. La promesa es la siguiente: Todavía hay muchísimos hechos sorprendentes e interesantes que conocer en esta teoría.

Referencias

[Dev1] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition,* Addison Wesley, 1989.

[Dev2] R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Addison Wesley, 1992.

[Hol] Richard A Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer, 1996.

[Men] Héctor Méndez L., *ITERACIÓN DE FUNCIONES (notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos)*. Vínculos Matemáticos, Serie Textos, número 4, 2000.

[Mend] Héctor Méndez L., *Las Quebraditas (Propiedades dinámicas de una peculiar familia de funciones en el Intervalo)*. Miscelánea Matemática, Número 35, (2002), 59-71.

Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM,
Ciudad Universitaria, CP 04510,
D.F. México.
e-mail: hml@hp.fciencias.unam.mx